1 Системы с трением.

1.1 Свободные колебания диссипативных систем с одной степенью свободы при линейной восстанавливающей силе

Системы называются диссипативными, если их движения сопровождаются некомпенсируемыми потерями энергии и затуханием колебаний за счёт сил сопротивления.

В диссипативных системах единственным стационарным состоянием является равновесное состояние, обладающее периодической устойчивостью. В диссипативных системах невозможны строго периодические колебательные движения. Не всякая система, движение которой сопровождается расходом энергии за счёт сил сопротивления, ничем не компенсируется. Колебания таких систем затухают. Критерием диссипативности является условие, при котором скорость точки и приложенная к ней сила сопротивления, противоположно направлены.

1.2 Вязкое трение

Рассмотрим свободные колебания системы с одной степенью свободы с учётом трения и при линейной восстанавливающей силе.

Уравнение имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - R, \tag{1}$$

c — жёсткость пружины. Зависимость силы трения от смещения при скорости определяется физической природой трения. Наиболее простым солучаем является так называемое вязкое трение, когда сила пропорциональна скорости движения:

$$R = \alpha\dot{x}$$

В этом случае уравнение движения (1) запишется в виде:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0;\ 2n = \frac{\alpha}{m};\ k^2 = \frac{c}{m} \tag{2}$$

Решение уравнения (2) определяется формулой

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\right) \tag{3}$$

$$\omega^2 = \sqrt{k^2 - n^2},\ k > n$$

Как известно из (3), при наличии вязкого трения закон движения $x(t)$ массы m описывается непериодической функцией по времени t. Однако часто это движение называют периодическими затухающими по времени колебаниями, несмотря на математическую неточность этого названия. Под периодом T этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величину ω называют круговой частотой затухающих колебаний.

Логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений A_k и A_{k+1} называют логарифмическим декрементом колебанияя.

$$\delta = \ln\frac{A_k}{A_{k+1}} = nT \tag{4}$$

Представив A_{k+1} в виде $A_{k+1} = A_k - \Delta A_k$ и считая, что колебания затухают медленно

$$\frac{\Delta A_k}{A_k} << 1,$$

из (4) находим:

$$\delta = \ln\frac{A_k}{A_k - \Delta A_k} = \ln\frac{1}{1 - \Delta A_k/A_k} \approx \frac{\Delta A_k}{A_k} \tag{5}$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент примерно равен относительному изменению амплитуды колебания за период T.

Из (4) и выражения для ω в (3) выводим:

$$\delta = nT = n\frac{2\pi}{\omega} = n\frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

Отсюда находим:

$$n^2 = k^2\frac{(\delta/(2\pi))^2}{1 + (\delta/(2\pi))^2} \tag{6}$$

Подставив это значение n^2 в выражение для ω в (3), получаем:

$$\omega = \sqrt{k^2 - n^2} = \frac{k}{1 + (\delta/(2\pi))^2} \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что даже при значительном затухании частота ω затухающих колебаний мало отличается от частоты k собственных колебаний соответствующей системы без трения. Так, например, даже когда каждый следующий взмах вдвое меньше предыдущего ($\ln 2 = 0,693$), то частота ω лишь на $0,6\%$ меньше, чем k.

1.3 Сухое трение

Рассмотрим движение упруго опёртого груза массы m по шероховатой поверхности.

Сила трения, действущая на груз, постоянна по величине и направлена против движения. Уравнение свободных колебаний такой системы при линейной восстанавливающей силе имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - R_0\mathrm{sgn}\dot{x},\ \mathrm{sgn}\dot{x} = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0; \\ -1, & \dot{x} < 0; \\ 0, & \dot{x} = 0; \end{cases} \tag{8}$$

Отклоним груз в крайнее правое положение на величину A и отпустим его без начальной скорости. В этом случае:

$$x_0 = A,\ \dot{x}_0 = 0. \tag{9}$$

Чтобы груз начал двигаться, необходимо, чтобы восстанавливающая сила cA была численно больше статической силы трения R_0, то есть движение возможно при

$$A > \frac{R_0}{c}.$$

Зона

$$-\frac{R_0}{c} < x < \frac{R_0}{c}$$

называется зоной застоя или мёртвой зоной.

Под действием натяжения пружины на первом этапе груз будет двигаться влево ($\dot{x} < 0$) и уравнение движения будет:

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = 0 \tag{10}$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 a; \tag{11}$$

$$k^2 = \frac{c}{m},\ a = \frac{R_0}{c}.$$

Величина a представляет собой отклонение груза под действием максимально возможной силы трения.

Общее решение уравненя (11) имеет вид:

$$x = a + C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \tag{12}$$

Определяя постоянные из начальных условий (9), получаем:

$$x = a + (A - a)\cos pt \tag{13}$$

Этот закон движения справедлив, пока $\dot{x} < 0$. Так как

$$\dot{x} = -p\,(A - a)\sin pt,$$

то скорость движения будет отрицательной до момента времени t_1, определяемого из условия $pt_1 = \pi$. В этот момент груз остановится. Смещение его:

$$x = a + (A - a)\cos\pi = 2a - A \tag{14}$$

Под действием трения отклонения груза уменьшилось по абсолютной величине на $2a$. После остановки груз начинает двигаться вправо.

Повторяя приведённые выше расчёты, можно показать, что движение направо продолжается в течении временит π/p. Максимальное отклонение вправо равно $A - 4a$. Процесс движения продолжается до тех пор, пока груз не попадёт в зону застоя и не остановится. Зависимость смещения от времени на каждом этапе движения представляет собой косинусоиду, смещённую по оси Ox на величину a или $-a$ с амплитудой, уменьшающейся по закону арифметической прогрессии.

Время между соседними максимумами отклонения можно условно назвать периодом движения

$$T = \frac{2\pi}{p}.$$

Частота колебаний при сухом трении такая же, как в соответствующей системе без трения.

Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением строится следующим образом. В координатах x, $\dot{x}/p$ гармонический закон движения изображается дугами окружности. Если в уравнение (11) ввести новую переменную $x-a$,

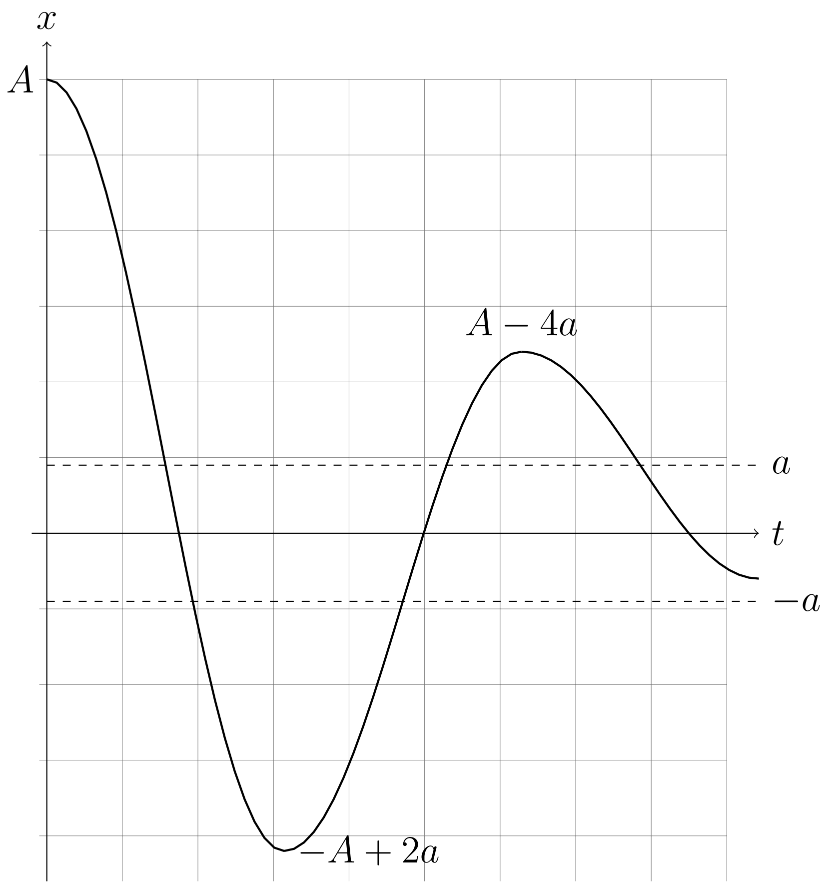

Рис. 1: График движения

то получится уравнение гармонических колебаний без трения. Это движение на фазовой плоскости отображается полуокружностью радиуса $A - a$ и центром в точке $x = -a$. На втором этапе движения, когда $\dot{x} > 0$, уравнение движения

$$\ddot{x} + p^2 x = -p^2 a$$

может рассматриваться как уравнение гармонических колебаний со смещением $x + a$. На фазовой плоскости на втором этапе движения получаем получаем полуокружность с центром в точке $x = a$. И так до тех пор, пока кривая при $\dot{x} = 0$ не попадает в зону застоя $-a < x < a$. В результате фазовый портрет свободных колебаний с сухим трением имеет вид:

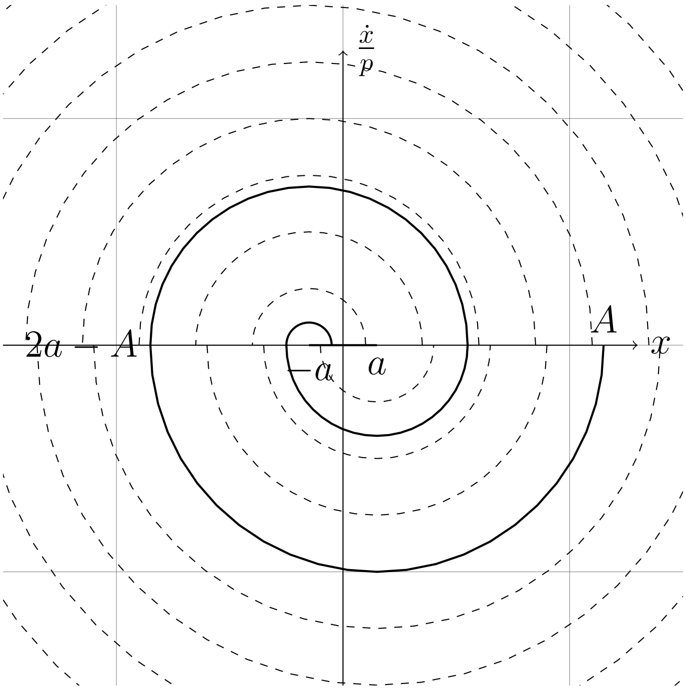

Рис. 2: Фазовый портрет

1.4 Трение, степенным образом зависящее от скорости

Часто принимают, что трение пропорционально некоторой n-й степени скорости. Эта зависимость записывается в формуле:

$$R = -\alpha \dot{x}^n \mathrm{sgn} \dot{x}$$

или

$$R = -\alpha |\dot{x}|^{n-1} \dot{x}.$$

В таком случае основное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$m\ddot{x} + \alpha |\dot{x}|^{n-1} \dot{x} + cx = 0 \tag{15}$$

Точное решение этого уравнения при произвольном n — задача сложная (в элементарных функциях решение непредставимо), и для определения $x(t)$ приходится пользоваться приближёнными методами.

Рассмотрим метод энергетического баланса. Примем, что искомое движение близко к гармоническому, характеризуется медленно меняющейся амплитудой и постоянной частотой, для которой можно принять значение

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

соответствующее рассматриваемой системе без трения. Таким образом, рассматривая какой-либо один период колебаний и совмещая начало отчёта времени с моментом, когда отклонение достигает максимума, можно принять, что движение описывается функцией:

$$x = A(t)\cos kt \tag{16}$$

При этом $A(t)$ — медленно меняющаяся функция времени ($\dot{A}T << A$). Из (16) находим:

$$\dot{x} = -kA(t)\sin kt + \dot{A}(t)\cos kt \tag{17}$$

Так как

$$\dot{A} << \frac{A}{T} = A\frac{k}{2\pi},$$

то из (17) следует приближенное равенство:

$$\dot{x} = -kA\sin kt \tag{18}$$

Тогда сила трения

$$R = -\alpha\left(Ak\right)^n |\sin kt|^{n-1}\sin kt. \tag{19}$$

Работа силы трения за рассматриваемый период равна:

$$U = \int\limits_A^0 R dx = \int\limits_0^{T/4} R\frac{dx}{dt}dt \tag{20}$$

Подставляя (18) и (19) в (20), найдём работу силы трения за рассматриваемый период:

$$U = -4 \int\limits_0^{T/4} \alpha \left(Ak\right)^{n+1} |\sin kt|^{n+1} dt \tag{21}$$

При вычислении интеграла в (21) можно приближенно принять, что в течении рассматриваемого периода величина A неизменна. Тогда получим:

$$\begin{aligned} U = -4\alpha \left(Ak\right)^{n+1} \int\limits_0^{T/4} |\sin kt|^{n+1} dt = -4\alpha A^{n+1} k^n \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n+1}\psi d\psi = \\ = -4\alpha A^{n+1} k^n I(n) \end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим интеграл в последнем равенстве. Он выражается через бета-функцию Эйлера:

$$I(n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n+1}\psi d\psi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1 + n/2\right)}{\Gamma\left(3/2 + n/2\right)} \tag{23}$$

Работа сил трения равна изменению энергии системы за рассматриваемый период. Так, в начале и в конце рассматриваемого периода скорость равно нулю, а поэтому и кинетическая энергия равна нулю, то изменение полной механической энергии определяется изменением потенциальной энергии

$$\Delta\Pi = \Pi(T) - \Pi(0):$$

$$\Delta\Pi = \int\limits_{A(0)}^{A(T)} cxdx = c\left.\frac{x^2}{2}\right|_{A(0)}^{A(T)} = \frac{c}{2}\left[A^2(T) - A^2(0)\right]$$

или

$$\Delta\Pi = \frac{c}{2}\left[A(T) + A(0)\right]\left[A(T) - A(0)\right] = cA\Delta A$$

Приравнивая работу сил трения приращению энергии, получим уравнение в конечных разностях:

$$-4\alpha A^{n+1} k^n I(n) = cA\Delta A$$

или

$$\Delta A = -\frac{4}{c}\alpha(Ak)^n I(n) \tag{24}$$

Уравнение (24) связывает приращение (отрицательное) амплитуды за один период со значением амплитуды в начале этого периода, то есть определяет вид непрерывной огибающей. Рассматривая эту огибающую как непрерывную кривую, описываемую дифференцируемой функцией времени $A = A(t)$ приближённо имеем:

$$\Delta A = \frac{\Delta A}{\Delta t}T \approx \frac{dA}{dt}T,\ T = \frac{2\pi}{k} \tag{25}$$

Тогда уравнение в конечных разностях (24) примет вид дифференциального уравнения для огибаюшей:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{2\alpha k^{n+1} I(n)}{\pi c}A^n \tag{26}$$

В случае $n = 1$ (вязкое трение)

$$I(1) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(3/2\right)}{\Gamma\left(2\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\Gamma\left(1/2\right) = \frac{\pi}{4}$$

и уравнение (26) приобретает форму:

$$\frac{dA}{dt} = -\gamma A,\ \gamma = \frac{\alpha k^2}{2c} = \frac{\alpha}{2m}$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$A = A_0 e^{-\gamma t},$$

где A_0 — начальная ордината огибающей. Таким образом, при $n = 1$ изложенный приближённый метод энергетического баланса приводит к точному результату.

При $n \neq 1$ уравнение (26) решается методом разделения переменных:

$$\frac{dA}{A^n} = -\frac{2\alpha k^{n+1} I(n)}{\pi c} dt \tag{27}$$

После интегрирования при начальном условии $A(0) = A_0$ находится зависимость $A(t)$:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt[n-1]{1 + \frac{2\alpha}{\pi c}(n-1) k^{n+1} I(n) t}}, \; n \neq 1 \tag{28}$$

В частности, при $n = 2$ (случай турбулентного трения) получается:

$$I(2) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{(3/2)\Gamma(3/2)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{(3/4)\Gamma(1/2)} = \frac{2}{3}$$

$$A = A_0 / \left(1 + \frac{4\alpha}{3\pi c} k^3 t\right),$$

то есть, огибающая имеет вид гиперболы.

Из (27) при $n = 0$ (сухое трение) выводим:

$$A = A_0 - \frac{2\alpha k}{\pi c} t,$$

то есть убывание амплитуд следует линейному закону, а амплитуда образует арифметическую прогрессию. Этот результат также соответствует точному решению.

Для логарифмического декремента колебаний в силу малости $\Delta A / A$ можно записать:

$$\delta = \ln \frac{A_j}{A_{j+1}} = \ln \frac{A_{j+1} - (A_{j+1} - A_j)}{A_{j+1}} = \ln \frac{A_{j+1} - \Delta A_j}{A_{j+1}} = \ln \left(1 - \frac{\Delta A_j}{A_{j+1}}\right) \approx -\frac{\Delta A}{A}$$

Подставляя сюда A из (24), выводим:

$$\delta = \frac{4\alpha k^n I(n)}{c} A^{n-1}$$

Отсюда видно, что логарифмический декремент колебаний не зависит от амплитуды колебаний и остаётся неизменным лишь в случае вязкого трения ($n = 1$). В остальных случаях он оказывается переменной величиной, зависящей от амплитуды.

2 Автоколебательные системы

2.1 Диссипативные системы

Системы, движение которых сопровождается потерями энергии, не относятся к диссипативным, если энергия, расходуемая на преодоление сопротивлений, автоматически компенсируется поступлениями из неколебательного источника.

При этом дозировка поступлений по времени подачи и по величине регулируется лишь самой колебательной силой. Вследствие этого в системе с трением могут возникнуть устойчивые периодические незатухающие колебания. Эти колебания называются автоколебаниями. Примером таких колебаний могут служить колебания маятника часов, в которых энергия падающего груза передаётся маятнику порциями, величина и время подачи которых определяется колебаниями самого маятника.

Автоколебательной системой называется неконсервативная система, способная совершать незатухающие периодические колебания.

На фазовой плоскости периодические движения автоколебательной системы с одной степенью свободы изображаются замкнутыми траекториями, которые называются предельными циклами.

Существуют критерии, позволяющие по некоторым свойствам коэффициентов дифференциального уравнения системы доказать возможность существования в этой системе незатухающих периодических колебаний.

2.2 Критерий Льенара

Система, уравнение движения которой имеет вид:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{29}$$

будет иметь устойчивый предельный цикл при следующих условиях:

1. Функция $f(x)$ должна быть чётной, а $g(x)$ — нечётной функцией переменной x;

2. $f(0) < 0$;

3. $xg(x) > 0$ для всех $x \neq 0$;

4.
$$F(x) = \int\limits_0^x f(x)dx \to +\infty,$$
когда $x \to +\infty$;

5. Функция $F(x)$ имеет один нуль в точке $x = a > 0$ и монотонно возрастает для $x \geq a$;

Нечётность функции $g(x)$ и условие 3 означает, что востанавливающая сила $-g(x)$ всегда имеет знак, противоположный знаку x (знаку отклонения), то есть действует как восстанавливающая сила в линейной упругой системе, всегда направленная к среднему, нулевому положению.

Чётность функции $f(x)$ вместе с условием $f(x) < 0$ означает, что коэффициент сопротивления имеет отрицательный знак для малых значений x, то есть при малых отклонениях сопротивление раскачивает систему. График $f(x)$ при указанных условиях имеет вид параболической кривой вблизи начала координат. Для больших x сопротивление становится положительным и вызывает затухание колебаний.

Условия 4 и 5 означают, означают, что система не является диссипативной вблизи нулевого положения, что подтверждает аналогичный вывод из 1 и 2.

Системы, в которых возбуждение возрастающих колебаний происходит после сколь угодно малых начальных возмущений состояния равновесия, называют автоколебательными системами с мягким самовозбуждением.

Если возрастающие колебания возникают лишь после достаточно больших начальных возмущений, то автоколебательная система называется системой с жёстким самовозбуждением.

Примером автоколебательной системы с мягким самовозбуждением будет система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0 \tag{30}$$

В самом деле, для уравнения (30) выполнены все условия критерия Льенара:

1. $f(x) = -\mu\left(1 - x^2\right)$ — функция чётная, а $g(x)$ — функция нечётная;

2. $f(0)<0$;

3. $xg(x) = x^2 > 0$ для всех $x \neq 0$;

4. $$F(x) = -\mu \int\limits_0^x \left(1 - x^2\right) dx = -\mu x + \mu\frac{x^3}{3} \to +\infty$$

   когда $x \to +\infty$;

5. Функция $F(x) = 0$ для $x = \pm\sqrt{3}$ и для $x > \sqrt{3}$ растёт вместе с x монотонно, оставаясь всё время положительной;

Поэтому механическая система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля, будет иметь один устойчивый предельный цикл.

Проследим за изменением энергии рассматриваемой системы в зависимости от величины отклонения x. Для этого умножим обе части уравнения (30) на $\dot{x}$ и результат запишем в виде:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} + x\frac{dx}{dt} = \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x}^2$$

или:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2 + x^2\right) = 2\mu\left(1 - x^2\right)\dot{x}^2$$

то есть:

$$\frac{dE}{dt} = \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x}^2;\ E = T + \Pi; = \frac{\dot{x}^2}{2};\ \Pi = \frac{x^2}{2}$$

Здесь T, Π и E — кинетическая, потенциальная и полная энергии системы.

Из последнего равенства видно, что при сколь угодно малых начальных возмущениях (пока $|x| < 1$) производная по времени о полной энергии положительна, то есть энергия системы возрастает, что проявится в увеличении отклонений x — силы сопротивления оказывают дестабилизирующее воздействие при $|x| < 1$.

Однако с увеличением амплитуды колебаний при $|x| > 1$ производная по времени от полной механической энергии будет отрицательной в тех интервалах времени, в которых $\dot{x} > 1$. В этих интервалах времени полная энергия убывает и система ведёт себя как дисипативная, что проявляется в уменьшении отклонений x.

Силы сопротивления оказывают демпфирующее действие при $|x| > 1$. В результате колебания системы будут приближаться к режиму установившихся колебаний. Этому режиму соответствует компенсация дестабилизирующих и демпфирующих влияний.

Уравнения весьма многих нелинейных систем могут быть приведены к виду (29). Например, уравнение

$$\ddot{y} + F(\dot{y}) + y = 0$$

В самом деле, продифференцировав это уравнение по t и положив $\dot{y} = x$, получим:

$$\ddot{x} + F'(x)\dot{x} + x = 0,$$

то есть уравнение (29), в котором $f(x) = F'(x)$ и $g(x) = x$.

2.3 Критерий Бендиксона

Предположим, что уравнение движения изображающей систему точки на фазовой плоскости приведены к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{31}$$

Критерий Бендиксона формулируется так: Если в некоторой односвязной области S на фазовой плоскости выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

сохраняет знак и не обращается тождественно в нуль, то в этой области не существует замкнутых фазовых траекторий.

Таким образом, критерий Бендиксона представляет достаточное условия отсутствия предельных циклов в некоторых областях фазовой плоскости.

Доказательство приведём от противного. Предположим, что в области S существует периодическое решение уравнения (31). Обозначим замкнутую траекторию, соответствующую этому решению, через L, и ограничиваемую этой траекторией облать, лежащую в области S, через D.

Тогда

$$\int\limits_L (Pdy - Qdx) = \int\limits_0^T \left(P\frac{dy}{dt} - Q\frac{dx}{dt} \right) dt = \int\limits_0^T (PQ - QP)\, dt \tag{32}$$

По формуле Грина:

$$\int\limits_L (Pdy - Qdx) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy \tag{33}$$

Согласно (32) из (33) следует:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

Последнее равенство возможно, когда:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

меняет знак в области D, что противоречит условиям теоремы.

3 Метод Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{34}$$

Уравнение вида (34), содержащее малый множитель ε при нелинейном слагаемом, называется квазилинейным. Уравнение, полученное из (34) при $\varepsilon \to 0$, называется порождающим

Будем искать решение (34) в виде

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \tag{35}$$

В представлении (35) две неизвестные функции, в уравнении (34) — только одна. Для определенности замены свяжем функции A и B дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{36}$$

Продифференцируем (35):

$$\dot{x} = \dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t + \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

С учетом (36) получаем:

$$\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]$$

Продифференцируем (35) ещё раз:

$$\ddot{x} = \omega\left[-\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t\right] - \omega^2\left[A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t\right] \tag{37}$$

Подставляя (37) в (34), имеем:

$$\begin{aligned}&\omega\left[-\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t\right] = \\ &= \varepsilon f\left\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\right\}\end{aligned} \tag{38}$$

Соотношения (36) и (39) образуют систему уравнений вида

$$\begin{cases}\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0, \\ -\dot{A}(t)\sin\omega t + \dot{B}(t)\cos\omega t = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\end{cases} \tag{39}$$

где

$$F(t) = f\left\{A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t, \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right]\right\}$$

Решаем систему (39):

$$\begin{cases}\dot{A}(t) = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\omega t\end{cases} \tag{40}$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}(t) &= R(t)\cos\theta(t), \\
\dot{B}(t) &= R(t)\sin\theta(t)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Найдем выражения для x и $\dot{x}$:

$$
x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t = R(t)\left[\cos\omega t\cos\theta(t) + \sin\omega t\sin\theta(t)\right]
$$

или

$$
x = R(t)\cos\left[\omega t - \theta(t)\right] \tag{42}
$$

Аналогично

$$
\dot{x} = \omega\left[-A(t)\sin\omega t + B(t)\cos\omega t\right] = -\omega R(t)\left[\sin\omega t\cos\theta(t) - \cos\omega t\sin\theta(t)\right]
$$

или

$$
\dot{x} = -\omega R(t)\sin\left[\omega t - \theta(t)\right]
$$

Подставим (41) в (40):

$$
\begin{cases}
\dot{R}\cos\theta - R\sin\theta\dot{\theta} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\
\dot{R}\sin\theta + R\cos\theta\dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\omega t
\end{cases}
\tag{43}
$$

Решим систему (43) относительно $\dot{R}$ и $\dot{\theta}$

$$
\begin{cases}
\dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right), \\
R\dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega}F(t)\cos\left(\omega t - \theta\right)
\end{cases}
\tag{44}
$$

или

$$
\begin{cases}
\dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{\omega}f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\sin\left(\omega t - \theta\right), \\
\dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{\omega R}f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right]\cos\left(\omega t - \theta\right)
\end{cases}
\tag{45}
$$

Все выкладки до настоящего момента — точные. Теперь приближенно заменим правые части (45) из средними значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right] \sin\left(\omega t - \theta\right) dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi} \displaystyle\int\limits_0^T f\left[R\cos(\omega t - \theta), -\omega R\sin(\omega t - \theta)\right] \cos\left(\omega t - \theta\right) \dfrac{dt}{R} \end{cases}$$

При вычислении интегралов в правых частях последних выражениях будем считать $R(t)$ и $\theta(t)$ постоянными. Произведём в интегралах замену переменных

$$\psi = \omega t - \theta$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right) \sin\psi dt = \varepsilon\Phi(R), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi\omega} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right) \cos\psi \dfrac{dt}{R} = \varepsilon\Psi(R) \end{cases} \tag{46}$$

Уравнения (46) называется уравнениями установления. В первое уравнение входит только $R(t)$ и оно может быть проинтегрировано независимо от второго.

Особые точки определяются уравнениями

$$\Phi(R) = 0,\ \Psi(R) = 0 \tag{47}$$

В случае $\Psi(R) = 0$ из второго уравнения (46) находим

$$\theta = \theta_0 = const,$$

что означает, что особые точки лежат на радиальных прямых и их положение на радиальных лучах определяется корнями уравнения

$$\Phi(R) = 0.$$

Уравнение может иметь несколько корней

$$R = R_j.$$

Об устойчивости равновесного состояния $R = R_j$ можно судить по характеру изменения вариации амплитуды колебаний R_j. Согласно (46) имеем:

$$\dot{R} = \varepsilon\Phi(R) = 0, \tag{48}$$

Рассмотрим возмущённое движение $R_j + \delta R_j$. Для амплитуды возмущённого движения получаем:

$$\frac{d(R_j + \delta R_j)}{dt} = \varepsilon\Phi(R_j + \delta R_j), \tag{49}$$

Разлагаем правую часть (48) и ограничиваясь линейным приближением, получаем:

$$\frac{d(\delta R_j)}{dt} = \varepsilon\Phi'(R_j)\delta R_j, \tag{50}$$

Если

$$\Phi'(R_j) < 0,$$

то возмущения амплитуды δR будут стремиться к нулю и режим колебаний, соответствующий $R = R_j$, является устойчивым

После отыскания R и θ для отыскания решения и построения скелетной кривой пользуемся выражением (42).