

Стохастическое моделирование

Введение

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2025-02-18

Развитие теории вероятности связано с введением новых объектов исследований

- ❶ случайное событие (например, выпадение «орла» или «решки» при подбрасывании монетки);
- ❷ случайная величина (некоторое обобщение понятия случайного события, которому можно сопоставить случайную величину, принимающую значения «1» или «0».);
- ❸ случайная функция (в 1827 г. открытие броуновского движения жидкости, развитие теории случайных функций с XX века).

Определение

*Будем называть **случайной функцией** $X(t)$ такую функцию своего аргумента, значение которой при любом значении t является случайной величиной. Аргумент t — величина не случайная.*

Как правило, t — время ($0 \leq t < \infty$).

Определение

Если $t \in [a, b]$ (т.е. аргумент t задан в некотором интервале, например $t \in [0, \infty)$), то случайную функцию $X(t)$ будем называть **случайным процессом**.

Пример: ордината поверхности моря в данной точке с течением времени.

Определение

Если $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ (т.е. аргумент t принимает только определенные дискретные значения), то случайную функцию $X(t)$ будем называть **случайной последовательностью**.

Пример: испытание — подбрасывание монеты один раз за k испытаний. Далее будем рассматривать случайные процессы. Случайные функции используют при описании неровности всякого рода поверхностей: дороги, поверхность моря, микронеровности и т.д.

Описание случайной функции

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$. Предположим, что для ее исследования произведено n независимых опытов. В каждом опыте будет получена определенная функциональная зависимость (реализация случайной функции $X(t)$). Будем их обозначать $X_1(t)$, $X_2(t)$, ...

Способы описания свойств случайных функций:

1) **Плотность распределения** — дает представление о распределении случайной функции в фиксированные моменты времени t_i .

Если выберем момент времени t_1 , то значение случайной функции $X(t_1)$ будет описывать плотность распределения $f(x_1|t_1)$. Для более детального описания случайной функции можно выбрать 2 момента времени t_1 и t_2 .

$f(x_1, x_2|t_1, t_2)$ — двумерная плотность распределения. ...

$f(x_1, x_2, \dots, x_n|t_1, t_2, \dots, t_n)$ — n -мерная плотность распределения.

Случайная функция считается заданной, если для произвольного набора времен $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ задана n -мерная плотность распределения $f(x_1, x_2, \dots, x_n|t_1, t_2, \dots, t_n)$.

В силу громоздкости задания $X(t)$ удобнее ввести некоторые характеристики: моменты первого и второго порядка.

2) Моменты случайной функции или математическое ожидание случайной функции характеризуют поведение функции во времени в среднем. Наиболее важными являются моменты I и II порядков.

2.1) $m_1(t_1) = M(X(t_1))$ — математическое ожидание случайной функции в произвольный момент. Поскольку m_1 зависит от t_1 , то в дальнейшем будем обозначать $\bar{x}(t) = M_x = m_x(t) = M(X(t))$ — в силу произвольности аргумента индекс опущен.

Вспомним свойства:

Если $X(t)$ — случайная функция, $\phi(t)$ — не случайная функция, то

$$M(\phi(t)) = \phi(t)$$

$$M(X(t) + \phi(t)) = \phi(t) + M(X(t))$$

$$M(X(t) \cdot \phi(t)) = \phi(t) \cdot M(X(t))$$

Если задана плотность распределения $f(X, t)$, то

$$M(X, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, t) dx = \bar{x}$$

2.2) Момент II порядка (математическое ожидание квадрата случайной функции)

$$m_2 = M(X^2(t))$$

$$m_{1,2} = M(X(t_1) \cdot X(t_2))$$

На практике чаще используют центрированные моменты II порядка, т.е. дисперсию случайной функции.

2.3) $D(x, t) = M((X(t) - \bar{x}(t))^2)$ — дисперсия случайной величины $X(t)$. $D(x, t)$ характеризует рассеивание случайной функции во времени от среднего значения. $D(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}(t))f(x, t)dx = D(t)$ — обычные, не случайные функции.

$$D(\phi(t)) = 0$$

$$D(\phi(t) + X(t)) = D(X(t))$$

$$D(\phi(t) \cdot X(t)) = \phi^2(t) \cdot D(X(t))$$

2.4) Корреляционный момент (или корреляционная функция) определяет зависимость поведения случайной функции в различные моменты времени, t_1 и t_2 . $K_x(t_1, t_2) = M((X(t_1) - \bar{x}(t_1)) \cdot (X(t_2) - \bar{x}(t_2))) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}(t_1))(x_2 - \bar{x}(t_2)) \cdot f(x_1, x_2 | t_1, t_2) dx_1 dx_2$

Определение

Корреляционная функция — обычная функция, которая определяет связь между ординатами случайного процесса в различные моменты времени t_1 и t_2 .

Определение

Теория случайных функций, в которой для описания случайных функций достаточно моментов I и II порядков называется корреляционной теорией (т.е. оперирует вероятностными характеристиками).

Основным упрощением этой теории является переход от случайных функций к обычным функциям.

Классификация случайных функций

I: Зависимость или независимость случайного процесса от начала отсчета времени:

- Стационарные случайные функции;
- Не стационарные случайные функции.

Определение

Стационарные случайные функции – это такие, для которых все плотности распределения не зависят от начала отсчета, т.е. это те процессы, которые протекают во времени однородно и имеют вид непрерывных случайных колебаний.

$$f(x_1, \dots, x_n | t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0) = f(x_1, \dots, x_n | t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (1)$$

Свойства стационарных случайных процессов Рассмотрим стационарный процесс при $n = 1$ и при $n = 2$.

$$n = 1: f(x, t_1 + t_0)|_{t_0=-t_1} = f(x, 0)$$

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, 0) dx = const \quad (2)$$

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}) \cdot f(x, 0) dx = const \quad (3)$$

$$n = 2: f(x_1, x_2, t_1 + t_0, t_2 + t_0)|_{t_0=-t_1} = f(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1)$$

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}) \cdot (x_2 - \bar{x}) \cdot f(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1) dx_1 dx_2 = \\ &= K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (4)$$

В корреляционной теории, где рассматривают только моменты I, II порядков (т.е. $n = 1$, $n = 2$), условия (2), (3) и (4) служат определением стационарного процесса.

Определение

Процесс называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия есть постоянные, а корреляционная функция зависит от разности времен. $M_x = \text{const}$, $D_x = \text{const}$

II: Зависимость от распределения ординат случайной функции.

Определение

Если ординаты случайной функции подчиняются нормальному закону распределения, то такие процессы называются гауссовскими (нормальными) случайными процессами.

Определение

Случайный процесс называется марковским, если функция распределения в момент времени t_k зависит от функции распределения t_{k-1} и не зависит от предыдущих состояний случайного процесса.

Пример

Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию, если случайная величина $X(t) = A \cdot e^{-\alpha t}$, где A — это случайная величина с известным математическим ожиданием m_A и D_A .

Решение:

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= M[(X(t) - M[X(t)])^2] = M[(Ae^{-\alpha t} - e^{-\alpha t}m_A)^2] = \\ &= e^{-2\alpha t} M[(A - m_A)^2] = e^{-2\alpha t} D_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M[(X(t_1) - M[X(t_1)])(X(t_2) - M[X(t_2)])] = \\ &= M[(Ae^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_1}m_A)(Ae^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_2}m_A)] = e^{-\alpha(t_1+t_2)} M[(A - m_A)^2] = \\ &= e^{-\alpha(t_1+t_2)} D_A \end{aligned}$$