Основы корреляционной теории. Свойства корреляционной функции.

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2026-03-02

Корреляционная функция устанавливает степень зависимости между двумя сечениями случайной функции (например, между сечениями при $t = t_1$ и $t = t_2$). Рассмотрим случайную функцию $X(t)$, которая при вещественном аргументе t имеет комплексное значение, тогда отделяя мнимую от вещественной части имеем

$$X(t) = U(t) + i \cdot V(t) \quad \text{и} \quad X^*(t) = U(t) - i \cdot V(t) \tag{1}$$

Математическое ожидание случайной функции (1)

$$M[X(t)] = \begin{matrix} \tilde{x}(t) = M[U(t)] + i \cdot M[V(t)] \\ \tilde{x}^*(t) = M[U(t)] - i \cdot M[V(t)] \end{matrix} \tag{2}$$

Найдем корреляционную функцию, которая определяется как
$K(t_1, t_2) = M\{[X^*(t_1) - \tilde{x}^*(t_1)][X(t_2) - \tilde{x}(t_2)]\} =$
$= M\{[U(t_1) - i \cdot V(t_1) - M[U(t_1)] + i \cdot M[V(t_1)]] \cdot$
$\cdot [U(t_2) + i \cdot V(t_2) - M[U(t_2)] - i \cdot M[V(t_2)]]\} =$
$= M[(U_{t_1} - M[U_{t_1}] - i \cdot (V_{t_1} - M[V_{t_1}]))(U_{t_2} - M[U_{t_2}] + i \cdot (V_{t_2} - M[V_{t_2}]))] =$
$= M[(U_{t_1} - u_{t_1})(U_{t_2} - u_{t_2}) + (V_{t_1} - v_{t_1})(V_{t_2} - v_{t_2}) +$
$+ i \cdot ((V_{t_2} - v_{t_2})(U_{t_1} - u_{t_1}) - (V_{t_1} - v_{t_1})(U_{t_2} - u_{t_2}))]$

Пример. Балка находится под действием случайной распределенной нагрузки $q[z]$. Известны вероятностные характеристики нагрузки, т.е. $m_q(z)$ и $K_q(z, z')$ (мат. ожидание и корреляционная функция). Найти вероятностные характеристики реакций R_1 и R_2.
Рассмотрим равновесие балки.

$$\sum z = 0 : R_1 + R_2 - \int\limits_0^{l_1} q(z)dz = 0$$

$$\sum M_A = 0 : \begin{cases} R_1 + R_2 = \int\limits_0^{l_1} q(z)dz \\ R_2 l = \int\limits_0^{l_1} q(z) \cdot z dz \end{cases} \quad (1)$$

Из системы (1) находим $R_2 = \frac{\int\limits_0^{l_1} z \cdot q(z)dz}{l}$, $R_1 = \int\limits_0^{l_1} q(z)(1 - \frac{z}{l})dz$.

Моменты (мат. ожидания m_{R_1} и m_{R_2}):

$$m_{R_1} = \int\limits_0^{l_1} m_q(z)(1 - \tfrac{z}{l})dz, \; m_{R_2} = \frac{\int\limits_0^{l_1} z \cdot m_q(z)dz}{l}$$

Дисперсия реакций

$$D_{R_1} = M[(R_1 - m_{R_1})^2] = M\left[\left(\int\limits_0^{l_1} q(z)(1 - \tfrac{z}{l})dz - \int\limits_0^{l_1} m_q(z)(1 - \tfrac{z}{l})dz\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\left(\int\limits_0^{l_1} (q(z) - m_q(z))(1 - \tfrac{z}{l})dz\right)^2\right] =$$

$$= M[\int\limits_0^{l_1} (q(z) - m_q(z))(1 - \tfrac{z}{l})dz \cdot \int\limits_0^{l_1} (q(z_1) - m_q(z_1))(1 - \tfrac{z_1}{l})dz_1] =$$

$$= M[\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_1} \underbrace{(q(z) - m_q(z)) \cdot (q(z_1) - m_q(z_1))}_{K_q(z,z_1)-\text{дано}} \cdot (1 - \tfrac{z}{l}) \cdot (1 - \tfrac{z_1}{l})dzdz_1] =$$

$$= \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_1} K_q(z, z_1) \cdot (1 - \tfrac{z}{l}) \cdot (1 - \tfrac{z_1}{l})dzdz_1$$

Аналогично $D_{R_2} = \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_1} K_q(z, z_1) \cdot \frac{z}{l} \cdot \frac{z_1}{l}dzdz_1$

Пример. Определить является ли случайная функция

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} (A_j \cos\omega_j t + B_j \sin\omega_j t)$$

стационарной случайной функцией, если A_j и B_j — случайные, взаимно независимые величины с нулевыми мат. ожиданиями и дисперсиями: $D_{A_j} = D_{B_j} = 0$, $M_{A_j} = M_{B_j} = 0$.

$$M[X(t)] = \sum_{j=1}^{n} (M_{A_j} \cos\omega_j t + M_{B_j} \sin\omega_j t) = 0$$

$$K_X(t,t') = M[(\sum_{j=1}^{n} (A_j \cos\omega_j t + B_j \sin\omega_j t) - \underbrace{M[X(t)]}_{=0})\cdot$$

$$\cdot(\sum_{j=1}^{n} (A_j \cos\omega_j t' + B_j \sin\omega_j t') - \underbrace{M[X(t')]}_{=0})] =$$

$$= M[\sum_{j=1}^{n} (A_j \cos\omega_j t + B_j \sin\omega_j t) \sum_{j=1}^{n} (A_j \cos\omega_j t' + B_j \sin\omega_j t')] =$$

после преобразования $= \sum_{j=1}^{n} D_j \cos\omega_j (t - t')$

Т.к. $D[X(t)] = K_X(t, t' = t) = \sum_{j=1}^{n} D_j \cos(\omega_j \cdot 0) = \sum_{j=1}^{n} D_j$

Отсюда получаем: **свойства корреляционной функции**

1. А) Если процесс вещественный $(V(t)=0, v(t)=0)$, то следовательно корреляционная функция совпадает с той, которую мы давали раньше

$$K(t_1,t_2)=M[(U(t_1)-M[U(t_1)])(U(t_2)-M[U(t_2)])$$

1. Б) Если поменяем t_1и t_2, то получим сопряжение, т.е.

$$K(t_1,t_2)=K^*(t_2,t_1)$$

1. В) Если процесс стационарный ($K(t_1,t_2)$ зависит от «t_2-t_1») $K(t_1,t_2)=K(t_2-t_1)=K(\tau)$, $\tau=t_2-t_1$, то в этом случае

$$K(\tau)=K(-\tau),$$

т.е. она четная.

Пример. Пусть $X(t) = Ae^{i\lambda t}$, где λ — не случайный вещественный параметр, а A — комплексная случайная величина, мат. ожидание которой равно 0 ($m_A = 0$). Показать, что в этом случае корреляционная функция $K(t_1, t_2)$ будет комплексной.
$\bar{x}(t) = M[X(t)] = M[Ae^{i\lambda t}] = 0$; $\bar{x}^*(t) = M[X^*(t)] = M[A^* e^{-i\lambda t}] = 0$;
$K(t_1, t_2) = M[(A^* e^{-i\lambda t_2} - 0)(Ae^{i\lambda t_1} - 0)] = 0$;
$M[A^* A e^{-i\lambda t_2} e^{i\lambda t_1}] = (\cos\lambda t_1 - i\sin\lambda t_1)(\cos\lambda t_2 + i\sin\lambda t_2) \cdot M[A^* A] =$
$= \left| \underbrace{(a+ib)}_{z} \underbrace{(a-ib)}_{z^*} = a^2 + b^2 = |z|^2 \right| =$
$(\cos\lambda t_1 \cos\lambda t_2 + i\sin\lambda t_2 \cos\lambda t_1 - i\sin\lambda t_1 \cos\lambda t_2 + \sin\lambda t_1 \cos\lambda t_2) M[A^* A] =$
$= (\cos\lambda(t_2 - t_1) + i\sin\lambda(t_2 - t_1)) M[|A|^2]$
Итак, имеем

$$K(t_1, t_2) = (\cos\lambda(t_2 - t_1) + i\sin\lambda(t_2 - t_1)) M[|A|^2]$$