

Основы корреляционной теории. Свойства корреляционной функции. (продолжение)

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2025-03-04

Введём в рассмотрение случайную функцию:

$$z_{\pm}(t_1, t_2) = \sqrt{K(t_2, t_2)} [X(t_1) - \bar{x}(t_1)] \pm \sqrt{K(t_1, t_1)} [X(t_2) - \bar{x}(t_2)]$$

Найдём математическое ожидание этой случайной функции

$$|z_{\pm}|^2 = z_{\pm} \cdot z_{\pm}^*.$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq M \left[|z_{\pm}|^2 \right] = M \left[z_{\pm} \cdot z_{\pm}^* \right] = \\
&= M \left[\left\{ \sqrt{K(t_2, t_2)} (X(t_1) - \bar{x}(t_1)) \pm \sqrt{K(t_1, t_1)} (X(t_2) - \bar{x}(t_2)) \right\} \cdot \right. \\
&\cdot \left. \left\{ \sqrt{K(t_2, t_2)} (X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)) \pm \sqrt{K(t_1, t_1)} (X^*(t_2) - \bar{x}^*(t_2)) \right\} \right] = \\
&= M \left[K(t_2, t_2) (X(t_1) - \bar{x}(t_1)) (X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)) + \right. \\
&+ K(t_1, t_1) (X(t_2) - \bar{x}(t_2)) (X^*(t_2) - \bar{x}^*(t_2)) \pm \\
&\pm \sqrt{K(t_2, t_2) K(t_1, t_1)} [(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)) (X(t_2) - \bar{x}(t_2)) + \\
&+ (X^*(t_2) - \bar{x}^*(t_2)) (X(t_1) - \bar{x}(t_1))] \left. \right] = \\
&= K(t_2, t_2) K(t_1, t_1) + K(t_1, t_1) K(t_2, t_2) \pm \\
&\pm \sqrt{K(t_2, t_2) K(t_1, t_1)} (K^*(t_1, t_2) + K(t_1, t_2)) = \\
&= 2K(t_1, t_1) K(t_2, t_2) \pm 2 \operatorname{Re}(K(t_1, t_2)) \sqrt{K(t_1, t_1) K(t_2, t_2)} \geq 0 \Rightarrow \\
&\sqrt{K(t_1, t_1) K(t_2, t_2)} \geq \mp \operatorname{Re}(K(t_1, t_2)) \text{ или} \\
&\sqrt{K(t_1, t_1) K(t_2, t_2)} \geq |\operatorname{Re}(K(t_1, t_2))| \quad (1)
\end{aligned}$$

Т.к. для любых вещественных a и b справедливо неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, тогда $K(t_1, t_1) + K(t_2, t_2) \geq 2\sqrt{K(t_1, t_1)K(t_2, t_2)}$, из (1) имеем свойство корреляционной функции:

$$2.a) K(t_1, t_1) + K(t_2, t_2) \geq 2|\operatorname{Re}(K(t_1, t_2))| \quad (2)$$

2.6) Если $X(t)$ – стационарный процесс, то

$$K(t_1, t_1) = K(t_2, t_2) = K(0), K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau), \text{ тогда } K(0) = |\operatorname{Re}(K(\tau))| \quad (3)$$

(3) означает, что $K(\tau)$ имеет максимум в начале координат.

3) Рассмотрим интеграл $\int_a^b [X(t) - \bar{x}(t)] \eta(t) dt$, где $\eta(t)$ – произвольная (неслучайная) функция; a, b – заданные числа, тогда можно установить следующее неравенство (из $M \left[\left| \int_a^b [X(t) - \bar{x}(t)] \eta(t) dt \right|^2 \right]$):

$$3.a) \int_a^b \int_a^b \eta^*(t_1) \eta(t_2) K(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \quad (4)$$

(4) накладывает определённые ограничения на вид корреляционной функции и может быть использовано для проверки пригодности замены $K(t_1, t_2)$ различными аппроксимирующими функциями.

3.б) если процесс — стационарный, тогда (4) переходит в

$$\int_a^b \int_a^b \eta^*(t_1) \eta(t_2) K(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \geq 0.$$

Мы вывели (получили) основные свойства, которыми должна обладать функция, претендующая на роль корреляционной функции. Определим, теперь, какой вид она может иметь.

Поскольку корреляционная функция определяет зависимость между двумя сечениями случайной функции (при t_1 и t_2), то когда эти моменты времени t_1 и t_2 разнесены по времени, т.е. когда интервал времени $\tau = t_2 - t_1$ — достаточно большой, т.е. $\tau = t_2 - t_1 \rightarrow \infty$, то зависимость становится меньше, т.е. сечения становятся практически независимыми, т.е. $K(\tau) = K(t_2 - t_1) \rightarrow 0$. Т.о. при $|\tau| \rightarrow \infty$, т.е. $K(\tau) \rightarrow 0$, т.е. а) или монотонно убывают, как, например, на рисунке.

В этом случае корреляционная функция может быть аппроксимирована выражением: $K(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ или

$$K(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha_1^2 \tau^2}$$

б) или стремится к нулю по более сложному закону, например $K(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau$ или $K(\tau) \approx \sigma^2 e^{-\alpha_1^2 \tau^2} \cos \beta_1 \tau$

В заключении отметим, что добавление к случайной функции неслучайной величины или неслучайной функции не изменяет корреляционной функции. Например: $X(t)$, прибавим к ней неслучайную функцию $\phi(t)$, обозначим $Y(t) = X(t) + \phi(t)$

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M[(Y^*(t_1) - \bar{y}^*(t_1))(Y(t_2) - \bar{y}(t_2))] = \\ &= M[(X_{t_1}^* + \phi^*(t_1) - \bar{x}_{t_1}^* - \phi^*(t_1)) \cdot \\ &\quad \cdot (X_{t_2}^* + \phi^*(t_2) - \bar{x}_{t_2}^* - \phi^*(t_2))] = K_x(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Т.о. $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$.