

Дифференцирование и интегрирование случайных процессов

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2025-03-11

Определение

Говорят, что последовательность случайных функций $\{f_n(t)\}$ сходится к случайной функции $f(t)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} M \left[|f_n(t) - f(t)|^2 \right] = 0$.

Определение

Будем говорить, что случайный процесс $X(t)$ дифференцируем в точке t , если для любой сходящейся последовательности чисел $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ последовательность случайных величин $\frac{X(t+\varepsilon_i) - X(t)}{\varepsilon_i}$ сходится к одной и той же случайной величине, которую и будем называть производной процесса $X(t)$ в точке t и обозначается $X'(t)$ или $\frac{dX(t)}{dt}$.

Установим условия, при которых случайный процесс $X(t)$ имеет производную, очевидно, для этого, прежде всего, необходимо, чтобы $X(t)$ была непрерывна.

Определение

Говорят, что случайная функция $X(t)$ непрерывна, если

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} M \left[|X(t + \Delta) - X(t)|^2 \right] = 0.$$

Определим, какие ограничения необходимо наложить на корреляционную функцию $K(X(t))$, чтобы процесс $X(t)$ был непрерывен, т.е. дадим определение непрерывного процесса через корреляционную функцию.

Для этого рассмотрим функцию $G(t, x)$:

$$\begin{aligned} G(t, \Delta) &= M \left[|X(t + \Delta) - X(t)|^2 \right] = \\ &= M \left[(X(t + \Delta) - X(t)) (X(t + \Delta) - X(t)) \right] = \\ &= M \left[X(t + \Delta) X(t + \Delta) - X(t) X(t + \Delta) - \right. \\ &\quad \left. - X(t + \Delta) X(t) + X(t) X(t) \right] = \\ &= K(t + \Delta, t + \Delta) - K(t, t + \Delta) - K(t + \Delta, t) + K(t, t) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\lim_{\Delta \rightarrow 0} G(t, \Delta) = 0 \Leftrightarrow K(t_1, t_2)$ — непрерывная функция
(т.е. $\lim_{\Delta \rightarrow 0} K(t + \Delta, t) = K(t, t)$). Таким образом, если $K(t_1, t_2)$ — непрерывная функция двух переменных, тогда случайный процесс $X(t)$ можно считать непрерывным.

Определение

Случайный процесс $X(t)$ называется дифференцируемым, если существует производная $X'(t)$:
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left[\left(\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - X'(t) \right)^2 \right] = 0.$$

Однако, непрерывность функции ещё недостаточно для её дифференцируемости, т.к. необходимо ещё существование пределов $\lim_{\Delta_1 \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta_1) - X(t)}{\Delta_1}$

и $\lim_{\Delta_2 \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta_2) - X(t)}{\Delta_2}$ и они должны иметь один предел, т.е. должно выполняться условие

$$\lim_{\substack{\Delta_1 \rightarrow 0 \\ \Delta_2 \rightarrow 0}} M \left[\left| \frac{X(t + \Delta_1) - X(t)}{\Delta_1} - \frac{X(t + \Delta_2) - X(t)}{\Delta_2} \right|^2 \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow M \left[\left| \frac{X(t + \Delta_1) - X(t)}{\Delta_1} - \frac{X(t + \Delta_2) - X(t)}{\Delta_2} \right|^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta_1^2} [K(t + \Delta_1, t + \Delta_1) + K(t, t) - K(t + \Delta_1, t) - K(t, t + \Delta_1)] + \\
&+ \frac{1}{\Delta_2^2} [K(t + \Delta_2, t + \Delta_2) + K(t, t) - K(t + \Delta_2, t) - K(t, t + \Delta_2)] - \\
&- \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} \operatorname{Re} [K(t + \Delta_1, t + \Delta_2) + K(t, t) - K(t + \Delta_1, t) - K(t, t + \Delta_2)]
\end{aligned}$$

т.к. правая часть не содержит случайных величин, то можем использовать предельный переход для обычных непрерывных функций.

$$K'_{t_1} = \lim_{\Delta_1 \rightarrow 0} \frac{K(t_1 + \Delta_1, t_2) - K(t_1, t_2)}{\Delta_1},$$

$$\begin{aligned} K''_{t_1 t_2} &= \\ &= \lim_{\substack{\Delta_1 \rightarrow 0 \\ \Delta_2 \rightarrow 0}} \frac{K(t_1 + \Delta_1, t_2 + \Delta_2) - K(t_1 + \Delta_1, t_2) - K(t_1, t_2 + \Delta_2) + K(t_1, t_2)}{\Delta_1 \Delta_2} \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Rightarrow M \left[\left| \frac{X(t + \Delta_1) - X(t)}{\Delta_1} - \frac{X(t + \Delta_2) - X(t)}{\Delta_2} \right|^2 \right] &= \\ = \left[\frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} - 2 \operatorname{Re} \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{t_1=t_2=t} &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, в терминах корреляционных функций имеем следующее.

Для того, чтобы случайная функция имела производную, достаточно существования второй смешанной частной производной от корреляционной функции при равных значениях её аргументов, т.е. если существует $\left. \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t}$, то $X(t)$ — дифференцируема.

Для стационарных случайных функций $K(t_1, t_2) = K(\tau) = K(t_2, t_1)$, тогда $\left. \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t} = - \left. \frac{d^2 K(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}$.

Таким образом, для того, чтобы стационарная функция была дифференцируема, достаточно существования второй частной производной $\left. \frac{d^2 K(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}$.

Например: наши примеры корреляционных функций стационарных процессов.

$$1) K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}; K'(\tau) = \sigma^2 (-\alpha \operatorname{sgn}(\tau)) e^{-\alpha|\tau|};$$

$$K''(\tau) = -\alpha\sigma^2 \left[2\delta(\tau) e^{-\alpha|\tau|} - \alpha(\operatorname{sgn}(\tau))^2 e^{-\alpha|\tau|} \right] \text{ — не существует (не ограничена)}$$

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0, \tau \neq 0 \\ \infty, \tau = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{недифференцируема}$$

$$2) K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha_1^2 \tau^2};$$

$$K'(\tau) = -\sigma^2 \alpha_1^2 2\tau e^{-\alpha_1^2 \tau^2};$$

$$K''(\tau) = -2\sigma^2 \alpha_1^2 \left(e^{-\alpha_1^2 \tau^2} + \tau \alpha_1^2 2\tau e^{-\alpha_1^2 \tau^2} \right) - \text{существует} \Rightarrow \text{дифференцируема.}$$

$$3) K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau - \text{тоже недифференцируема.}$$

$$4) K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha_1^2 \tau^2} \cos \beta\tau - \text{дифференцируема.}$$

Определение

Интегралом от случайной функции $X(t)$ называется интеграл

$$\int_a^b \eta(t) X(t) dt, \quad (1)$$

где $\eta(t)$ — неслучайная функция, a, b — пределы интегрирования ($const$).

Интеграл понимается как предел, соответствующий интегральной сумме:

$$\int_a^b \eta(t) X(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t_j - t_{j-1} \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n \eta(t_j) X(t_j) (t_j - t_{j-1})$$

Рассмотрим производную от случайной функции $X(t)$:

$Y(t) = \frac{d}{dt}X(t)$ — случайная функция, определим M_Y и K_Y .

$$M[Y(t)] = m_y(t) = M\left[\frac{d}{dt}X(t)\right] = \frac{d}{dt}M[X(t)] = \frac{d}{dt}m_x(t)$$

$$\begin{aligned} K_Y(t, t') &= M[(Y(t) - m_y(t))(Y(t') - m_y(t'))] = \\ &= M\left[\frac{d}{dt}(X(t) - \bar{x}(t)) \frac{d}{dt'}(X(t') - \bar{x}(t'))\right] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_X(t, t') \end{aligned}$$

Если $Y(t) = \frac{d^2 X(t)}{dt^2}$, то $K_Y(t, t') = \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial t'^2} K_X(t, t')$.

Пример. Определить корреляционную функцию и дисперсию для производной случайной функции $X(t)$, если $X(t) = A \sin t$ и известны m_A и D_A .

$$K_X(t, t') = M[(A - m_A) \sin t (A - m_A) \sin t'] = \sin t \sin t' D_A$$

$$K_Y(t, t') = D_A \cos t \cos t'$$

$$D_Y(t) = K_Y(t, t'' = t) = D_A \cos^2 t$$

Причём, предел суммы существует, если дисперсия этой суммы имеет конечное значение.

$$D \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \eta(t_j) X(t_j) (t_j - t_{j-1}) \right] =$$

для простоты считаем $\bar{x} = 0$

$$= M \left\{ \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta^*(t_j) X^*(t_j) (t_j - t_{j-1}) \cdot \eta(t_i) X(t_i) (t_i - t_{i-1}) \right|^2 \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \eta^*(t_j) \eta(t_i) M[X^*(t_j) X(t_i)] (t_j - t_{j-1}) (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \eta^*(t_j) \eta(t_i) K(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (2)$$

Таким образом, для существования интеграла (1) от случайной функции должен существовать интеграл от корреляционной функции (2).