1 Субгармонические колебания

При некоторых условиях решение уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t \tag{1}$$

может содержать гармоники с частотами $\omega/2$, $\omega/3$....

Слагаемые с низкими частотами называются субгармоническими колебаниями. Ограничимся случаем симметричной характеристики восстанавливающей силы вида

$$\mu f(x, \dot{x}) = \mu f(x) = \mu x^3 \tag{2}$$

Положим, что основную гармонику колебаний с частотой ω сопровождает субгармоника с частотой $\omega/3$:

$$x = A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3} \tag{3}$$

Функция $f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right)$ имеет период $6\pi/\omega$, втрое больше основного периода $T = 2\pi/\omega$. Разлагая её в ряд Фурье и ограничиваясь двумя первыми слагаемыми, найдём:

$$f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) = b_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3} + b_1 \sin \omega t, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} b_{1/3} = \frac{2}{3T} \int\limits_0^{3T} f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \frac{\omega t}{3} dt \\ b_1 = \frac{2}{3T} \int\limits_0^{3T} f\left(A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \omega t dt \\ T = \frac{2\pi}{\omega} \end{gathered} \tag{5}$$

Далее, подставляя (2)-(5) в (1) и сравнивая коэффициенты гармоники и субгармоники, приходим к двум нелинейным уравненям:

$$\begin{cases} \left(k^2-\omega^2\right)A_1+\dfrac{\mu}{4}\left(3A_1^3+6A_{1/3}^2A_1-A_{1/3}^3\right)=H \\ \left(k^2-\dfrac{\omega^2}{9}\right)A_{1/3}+\dfrac{3}{4}\mu\left(A_{1/3}^3-A_{1/3}^2A_1+2A_1^2A_{1/3}\right)=0 \end{cases} \tag{6}$$

Одно из решений системы (6) даёт $A_{1/3}=0$, что соответствует колебаниям без субгармоник. Однако нас интересует возможность наличия гармоник, то есть решений системы (6), дающих $A_{1/3}\neq 0$.

Считая $A_{1/3}\neq 0$, представим (6) в виде:

$$A_{1/3}^2-A_{1/3}A_1+2A_1^2+\frac{4(9k^2-\omega^2)}{27\mu}=0$$

Отсюда следует следующее выражения амплитуды субгармонических колебаний через амплитуду основных:

$$A_{1/3}=\frac{A_1}{2}\left[1\pm\sqrt{\frac{16(\omega^2-9k^2)}{27\mu A_1^2}-7}\right], \tag{7}$$

$$\frac{16(\omega^2-9k^2)}{27\mu A_1^2}-7>0$$

Приближённое значение для амплитуды A_1 найдём из первого уравнения (6), положив в нём $\mu=0$:

$$A_1=\frac{H}{k^2-\omega^2},\ \omega\neq k \tag{8}$$

Принимая значения $A_{1/3}$ и A_1, определённые в (8) и (7) за нулевые значения итераций, уточняем значения амплитуд колебаний по итерационной схеме:

$$\begin{gathered} A_1^{(i)}=\frac{H}{k^2-\omega^2}-\frac{1}{4}\frac{\mu}{k^2-\omega^2}\varphi\left(A_1^{(i-1)}\right), \\ \varphi(A_1)=3A_1^3+6A_1A_{1/3}^2-A_{1/3}^3, \end{gathered} \tag{9}$$

где $A_{1/3}$ определена по формуле (7). При $\omega\neq k$ и $\mu\to 0$ сходимость итерационного процесса (10) можно обеспечить за счёт малости параметра μ.

Таким образом, субгармонические колебания в системах с жёсткой при $\mu > 0$ характеристикой возможны лишь при достаточно больших значениях частоты вынуждающей силы. Амплитуды субгармонических колебаний могут значительно превосходить амплитуды основных колебаний частоты ω. При наличии диссипативных сил амплитуды субгармонических колебаний уменьшаются и при значительной интенсивности диссипативных сил субгармонические колебания могут быть полностью подавлены, то есть нелинейная система относительно амплитуд субгармонических колебаний не имеет действительных решений, отличных от нуля.

2 Метод Бубнова-Галёркина

Применим принцип виртуальных перемещений для конкретного примера вынужденных колебаний системы, описываемой уравнением (10):

$$\ddot{x} + k^2 x + \mu x^3 = H \sin \omega t \tag{10}$$

Имея в виду нахождение периодического решения уравнения (10) того же периода, что и период возмущающей силы $2\pi/\omega$, ограничим класс привлекаемых для сравнения функций периодическими функциями того же периода, что и искомая, различающимися формой или амплитудой колебания. При этои промежуток времени, за который система, совершив полное колебание, возвратится в исходное положение на всех путях, выберем равным периоду $2\pi/\omega$. Тогда принцип виртуальных перемещений для рассматриваемой задачи запишется следующим образом:

$$\int_0^{2\pi/\omega} \left(\ddot{x} + k^2 x + \mu x^3 - H \sin \omega t\right) \delta x dx = 0 \tag{11}$$

Решение уравнения (10) будет нечётной функцией t, а потому в возможных решениях следует взять только синусные члены:

$$x = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + ...$$
$$\delta x = \delta A_1 \sin \omega t + \delta A_2 \sin 2\omega t + \delta A_3 \sin 3\omega t + ...$$

Ограничиваясь одночленным приближением, положим:

$$x = A_1 \sin \omega t,\ \delta x = \delta A_1 \sin \omega t$$

Подставив эти выражения в (11), выполнив интегрирование и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях (в одночленном приближении — при δA), придём к уравнению (12):

$$(\omega^2 - k^2)A - \frac{3}{4}\mu A^3 + H = 0 \tag{12}$$

Уравнение (12) на плоскости A, ω определяет амплитудно-частотную характеристику системы, описываемой уравнением (12).

3 Метод Пуанкаре

Рассмотрим квазилинейное уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = H \sin \omega t$$

Разложим решение в ряд по параметру ε:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ...$$

Подставляем выражение для x в исходное уравнение и собираем слагаемые при одинаковых степенях ε:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_0 + p^2 x_0 = H \sin \omega t, \\
&\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_1 + p^2 x_1 + f(x_0, \dot{x}_0) = 0, \\
&\varepsilon^2: \quad \ddot{x}_2 + p^2 x_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_0 = 0, \\
&\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{13}$$

Затем последовательно ищем решения уравнений (13), имеющие частоту вынуждающей силы. При это величина амплитуды основной гармоники изменяется на величину порядка ε.

4 Метод Ван-Дер-Поля

Рассматриваем уравнение вида:

$$\ddot{x} + p^2 x = -\mu f(x, \dot{x}) + H \sin \omega t \tag{14}$$

Введём коэффициент расстройки:

$$\varepsilon = \mu a = \frac{p^2}{\omega^2} - 1.$$

Следовательно

$$p^2 = \omega^2 + \mu a \omega^2.$$

Также полагаем:

$$H = \mu P$$

Уравнение (14) приобретает вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \left[-a\omega^2 x - f(x, \dot{x}) + P \sin \omega t \right] = \mu F(t) \tag{15}$$

Будем искать решение (15) в виде

$$x = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t \tag{16}$$

Функции A и B связаны дополнительным соотношением.

$$\dot{A}(t)\cos\omega t + \dot{B}(t)\sin\omega t = 0 \tag{17}$$

Подставляя (16) в (15), получаем систему уравнений, после решения которой получаем выражения для A и B:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\dfrac{\mu}{\omega}F(t)\sin\omega t, \\ \dot{B}(t) = \dfrac{\mu}{\omega}F(t)\cos\omega t \end{cases} \tag{18}$$

Переходим к полярным координатам:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = R(t)\cos\theta(t), \\ \dot{B}(t) = R(t)\sin\theta(t) \end{cases} \tag{19}$$

Произведём ещё одну замену переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= R(t)\cos\theta(t), \\ \dot{B}(t) &= R(t)\sin\theta(t) \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляем (20) в (18) и, разрешая полученные уравнения относительно новых неизвестных функций, получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega}F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{R\omega}F(t)\cos\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{21}$$

Теперь заменяем правые части уравнение (21) их осреднёнными значениями за период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{R} = -\dfrac{\mu}{\omega}\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^T F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right)dt, \\ \dot{\theta} = \dfrac{\mu}{\omega}\dfrac{\omega}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^T F(t)\cos\left(\omega t - \theta\right)\dfrac{dt}{R} \end{cases} \tag{22}$$

Подставим в (22) выражение для $F(t)$. В новых обозначениях:

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\omega t - \theta\right), \\ \dot{x} = -\omega R\sin\left(\omega t - \theta\right) \end{cases} \tag{23}$$

Теперь полагаем

$$R = const,\ \theta = const$$

Рассмотрим интеграл в первом уравнении (22):

$$\int\limits_0^T F(t)\sin\left(\omega t - \theta\right)dt = \int\limits_0^T \Big\{-a\omega^2 R\cos\left(\omega t - \theta\right) -$$
$$-f\left[R\cos\left(\omega t - \theta\right), -\omega R\sin\left(\omega t - \theta\right)\right] + P\sin\omega t\Big\}\sin\left(\omega t - \theta\right)dt$$

Первое слагаемое в фигурных скобках не даёт вклада в интеграл. Рассмотрим

$$\int\limits_0^T \sin\omega t\sin\left(\omega t - \theta\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left[\cos\left(2\omega t - \theta\right) - \cos\theta\right]dt = -\frac{T}{2}\cos\theta$$

Первое уравнение (22) принимает вид:

$$0 = -\int\limits_0^T f\left[R\cos\left(\omega t - \theta\right), -\omega R\sin\left(\omega t - \theta\right)\right]\sin(\omega t - \theta)dt - P\frac{T}{2}\cos\theta$$

Введём новую переменную

$$\psi = \omega t - \theta$$

Тогда получаем:

$$P\cos\theta = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi dt$$

Аналогично рассматриваем интеграл во втором уравнении (23):

$$\int\limits_0^T F(t)\sin\left(pt-\theta\right)\frac{dt}{R} = \int\limits_0^T \left\{-a\omega^2 R\cos\left(\omega t-\theta\right) - \right.$$
$$\left. -f\left[R\cos\left(\omega t-\theta\right), -\omega R\sin\left(\omega t-\theta\right)\right] + P\sin\omega t\right\}\cos\left(\omega t-\theta\right)\frac{dt}{R}$$

Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_0^T \cos^2\left(\omega t-\theta\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\left[1+\cos 2\left(\omega t-\theta\right)\right]dt = \frac{T}{2}$$

$$\int\limits_0^T \sin\omega t\cos\left(\omega t-\theta\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\left[\sin\left(2\omega t-\theta\right)+\sin\theta\right]dt = \frac{T}{2}\sin\theta$$

Второе уравнение (23) приобретает вид:

$$0 = -a\omega^2 R\frac{T}{2} - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi + P\frac{T}{2}\sin\theta$$

Перепишем полученные уравнения в виде

$$\begin{cases} P\cos\theta = -\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ P\sin\theta = a\omega^2 R + \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases} \tag{24}$$

Возводим оба уравнения (24) в квадрат и сложим их друг с другом:

$$P^2 = \left[\Phi_1(R)\right]^2 + \left[a\omega^2 R + \Phi_2(R)\right]^2 \tag{25}$$

где

$$\begin{cases} \Phi_1(R) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\sin\psi d\psi \\ \Phi_2(R) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(R\cos\psi, -\omega R\sin\psi\right)\cos\psi d\psi \end{cases}$$

5 Метод Капицы

Рассмотрим колебательную систему, находящуюся одновременно под действием постоянной во времени позиционной поступательной силы

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

и периодической силы

$$f(x,t) = f_1(x)\cos\omega t + f_2(x)\sin\omega t,$$

меняющейся со временем с большой частотой ω (f_1, f_2 — функции только от координат). Под «большой» понимается частота, удовлетворяющая условию

$$\omega >> \frac{1}{T},$$

где T — характерное время (период) движения, которое бы происходило под действием силы $F(x)$ при $f(x,t) = 0$. При своей величине сила $f(x,t)$ не предполагается слабой по сравнению с силой $F(x)$. Мы будем, однако, предполагать малым вызываемое этой силой колебательное смещение ξ точки. Уравнение движения точки под действием сил F и f имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f(x,t) \tag{26}$$

Из характера действующих на точку сил заранее ясно, что её движение будет представлять собой перемещение вдоль некоторой плавной траектории с одновременными малыми осцилляциями с частотой ω вокруг неё. Соответственно этому представим $x(t)$ в виде суммы:

$$x(t) = y(t) + \xi(t), \tag{27}$$

где $\xi(t)$ представляет собой указанные малые осцилляции. Среднее значение функции $\xi(t)$ за время её периода обращается в нуль, функция же $x(t)$ за это время меняется очень мало. Обозначая среднее за период чертой над буквой, имеем

$$\bar{x} = y(t),$$

то есть функция $y(t)$ описывает усредненное по быстрым осцилляциям «плавное» движение частицы. Выведем уравнение, определяющее эту функцию. Подставляя (27) в (26) и разлагая по степеням ξ с точностью до членов первого порядка, получим:

$$m\ddot{y} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dy} - \xi\frac{d^2U}{dy^2} + f(y,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial y} \tag{28}$$

В этом уравнении фигурируют слагаемые различного характера — осциллирующие и «плавные». Они должны взаимно сокращаться в каждой из этих групп по отдельности. Для осциллирующих членов достаточно написать:

$$m\ddot{\xi} = f(y,t) = f_1(x)\cos\omega t + f_2(t)\sin\omega t. \tag{29}$$

Остальные слагаемые содержат малый множитель ξ и поэтому малы по сравнению с написанными. Что касается производной $\ddot{\xi}$, то она пропорциональна величине ω^2 и поэтому не мала. Интегрируя уравнение (29) (при этом рассматривая y как постоянную), получим:

$$\xi = -\frac{f(y)}{m\omega^2} \tag{30}$$

Осредним теперь уравнение (28) по времени в указанном выше смысле. Поскольку средние значения первых степеней f и ξ обращаются в нуль, получим уравнение:

$$m\ddot{y} = -\frac{dU}{dy} + \xi\frac{df}{dy} = -\frac{dU}{dy} - \frac{1}{m\omega^2}f\frac{df}{dy},$$

содержащее уже только функцию $y(t)$. Перепишем его окончательно в виде:

$$m\ddot{y} = -\frac{dU_{eff}}{dy} \tag{31}$$

где «эффективная потенциальная энергия» определяется по формуле

$$U_{eff} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\bar{f}^2 = U + \frac{1}{4m\omega^2}\left(f_1^2 + f_2^2\right) \tag{32}$$

Таким образом, усреднённое по осцилляциям движение частицы происходит так, как если бы помимо силового постоянного во времени поля U действовало бы ещё и постоянное во времени поле, квадратично зависящее от амплитуды переменного поля.

5.1 Пример. Колебания опрокинутого маятника

Определим положение устойчивого равновесия маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с большой частотой.

Уравнение колебаний имеет вид:

$$ml\ddot{\varphi} = -(mg + F_{in})\sin\varphi,\ F_{in} = -mA\omega^2\cos\omega t \tag{33}$$

или

$$m\ddot{\varphi} = -\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{gm}{l}\cos\varphi\right) + f,\ f = -m\frac{A\omega^2}{l}\sin\varphi\cos\omega t \tag{34}$$

Тогда, согласно (32), имеем:

$$U_{eff} = -\frac{gm}{l}\cos\varphi + \frac{1}{4m\omega^2}\frac{m^2\omega^4}{l^2}A^2\sin^2\varphi \tag{35}$$

Как известно, положениям устойчивого равновесия соответствуют минимумы потенциальной энергии (в данном случае эффективной потенциальной энергии). Вычисляем первую и вторую производные U_{eff} по φ:

$$\frac{dU_{eff}}{d\varphi} = \frac{gm}{l}\sin\varphi + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2}\sin\varphi\cos\varphi \tag{36}$$

$$\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2} = \frac{gm}{l}\cos\varphi + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2}\cos 2\varphi \tag{37}$$

Приравнивая нулю первую производную, находим значения, при которых U_{eff} принимает экстремальные значения:

$$\frac{gm}{l}\sin\varphi + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2}\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

или:

$$\sin\varphi\left(\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2}\cos\varphi\right) = 0$$

Уравнение распадается на сомножители:

$$\sin\varphi = 0 \tag{38}$$

и

$$\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2}\cos\varphi = 0 \tag{39}$$

Рассматривая (38), получаем два положения равновесия:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_1 = \pi$$

Определяя знак второй производной, находим:

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0} = \frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2} > 0 \tag{40}$$

Таким образом, нижнее положение маятника $\varphi = 0$ является устойчивым.

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2} \tag{41}$$

Рассмотрим неравенство

$$\left.\frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi} = -\frac{gm}{l} + \frac{m\omega^2A^2}{2l^2} > 0 \tag{42}$$

Рассматриваем неравенство (42) и находим

$$A^2\omega^2 > 2gl \tag{43}$$

При выполнении условия (43) верхнее положение маятника $\varphi = \pi$ является устойчивым.

6 Резонансные колебания нелинейных систем

Рассмотрим колебания системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} + k^2x = A\cos\omega t + \varepsilon\varphi(x, \dot{x}) \tag{44}$$

В случае нерезонансных колебаний отыскивались периодические решения уравнений (44), которые при $\varepsilon \to 0$ переходили в периодические решения порождающего уравнения:

$$\ddot{x} + k^2x = A\cos\omega t \tag{45}$$

При $\omega = k$ уравнение (45) не имеет периодического решения. Поэтому, чтобы и в этом случае строить периодические решения уравнения (44), переходящие в периодические решения порождающего уравнения, рассматриваем лишь те задачи, в которых интенсивность внешнего возбуждения мала:

$$A = \varepsilon a.$$

Итак, будем рассматривать уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = \varepsilon a \cos \omega t + \varepsilon \varphi(x, \dot{x}) \tag{46}$$

и предположим

$$k^2 = \omega^2 - \varepsilon \delta.$$

Рассмотрим порождающее уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{47}$$

Уравнение (47) допускает двух параметрическое семейство периодических решений периода возмущающей силы

$$T = \frac{2\pi}{\omega} :$$

$$x = M \cos \omega t + N \sin \omega t \tag{48}$$

Попробуем отыскать периодические решение уравнение (46), которое при $\varepsilon \to 0$ переходит в одно из решений семейства (48). Решение будем искать в виде ряда:

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + ..., \tag{49}$$

где $x^{(0)}$ — одна из функций семейства (48). Функция $x^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} \ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = a \cos \omega t + \varphi(M \cos \omega t + N \sin \omega t, \\ -M\omega \sin \omega t + N\omega \cos \omega t) + \delta \left(M \cos \omega t + N \sin \omega t\right) \end{gathered} \tag{50}$$

Для того, чтобы уравнение (50) допускало периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы разложение правой части в ряд Фурье не содержало членов $A\cos\omega t$, $B\sin\omega t$. Эти условия дают нам два уравнения для определения неизвестных чисел M и N:

$$\left\{\begin{aligned} &P(M,N) = M\delta + a + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \varphi(M\cos\omega t + N\sin\omega t,\\ &\qquad\qquad -M\omega\sin\omega t + N\omega\cos\omega t)\cos\omega t dt = 0\\ &Q(M,N) = N\delta + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \varphi(M\cos\omega t + N\sin\omega t,\\ &\qquad\qquad -M\omega\sin\omega t + N\omega\cos\omega t)\sin\omega t dt = 0 \end{aligned}\right. \tag{51}$$

В этом случае функция

$$x = \tilde{M}\cos\omega t + \tilde{N}\sin\omega t$$

может быть пределом периодических решений уравнения (46) при $\varepsilon \to 0$. Если

$$M = \tilde{M},\ N = \tilde{N},$$

то периодические решения уравнения (50) имеют вид:

$$x^{(1)} = M_1\cos\omega t + N_1\sin\omega t + \Phi^{(1)}, \tag{52}$$

где M_1 и N_1 — произвольные постоянные, а Φ_1 — частное решение, которое после разложения правой части (50) в ряд Фурье строится в виде ряда Фурье, не содержащего первых гармоник, поскольку M и N выбраны так, чтобы разложение в ряд Фурье правой части (50) не содержало первых гармоник.

Рассмотрим теперь уравнение для $x^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{(2)} + \omega^2 x^{(2)} &= \delta \left(\Phi_1 + M_1 \cos\omega t + N_1 \sin\omega t\right) + \\ &+ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \left(\Phi_1 + M_1 \cos\omega t + N_1 \sin\omega t\right) + \\ &+ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \left(\dot{\Phi}_1 - \omega M_1 \sin\omega t + \omega N_1 \cos\omega t\right) \end{aligned} \tag{53}$$

Производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}}$$

вычислены для значений $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$. Таким образом, правая часть уравнения (53) является периодической функцией с периодом $T = 2\pi/\omega$. Следовательно, для существования периодических решений уравнения (53) необходимо и достаточно, чтобы постоянные M_1 и N_1 были выбраны так, чтобы разложения правой части уравнения (53) в ряд Фурье не содержало первых гармоник. Таким образом, постоянные M_1 и N_1 удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &M_1 \left[\delta + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \cos^2\omega t - \omega \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \cos\omega t \sin\omega t\right) dt\right] + \\ &+ \frac{2N_1}{T}\int\limits_0^T \left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \cos\omega t \sin\omega t + \omega \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \cos^2\omega t\right) dt + \psi_1 = 0 \\ &\frac{2M_1}{T}\int\limits_0^T \left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \cos\omega t \sin\omega t - \omega \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \sin^2\omega t\right) dt + \\ &+ N_1 \left[\delta + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \sin^2\omega t + \omega \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \cos\omega t \sin\omega t\right) dt\right] + \\ &+ \psi_2 = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

В системе (54) введены обозначения:

$$\psi_1 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \Phi^{(1)} + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0} \dot{\Phi}^{(1)}\right) \cos\omega t dt$$

$$\psi_2 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\bigg|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} \Phi^{(1)} + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}}\bigg|_{x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{\Phi}^{(1)} \right) \sin \omega t dt$$

При этом учтено, что разложение функции $\Phi^{(1)}$ не содержит первых гармоник. Системе (54) можно придать следующий вид:

$$\begin{cases} M_1 \dfrac{\partial P}{\partial M} + N_1 \dfrac{\partial P}{\partial N} = -\psi_1, \\ M_1 \dfrac{\partial Q}{\partial M} + N_1 \dfrac{\partial Q}{\partial N} = -\psi_2. \end{cases} \tag{55}$$

Для разрешимости системы (55) необходимо и достаточно, чтобы её определитель был отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial M} & \dfrac{\partial P}{\partial N} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial M} & \dfrac{\partial Q}{\partial N} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{56}$$

Элементы этого определителя вычислены при $M = \tilde{M}$ и $N = \tilde{N}$. Следовательно, условие (56) означает, что величины $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ являются простыми корнями уравнений (51). При выполнении условия (56) уравнения (55) разрешимы и определяют постоянные M_1 и N_1. Функция x_2 в этом случае будет определяться формулой:

$$x^{(2)} = \Phi^{(2)} + M_2 \cos \omega t + N_2 \sin \omega t, \tag{57}$$

где M_2 и N_2 — произвольные постоянные, которые могут быть определены из условий разрешимости третьего приближения. Приведенные рассуждения нетрудно продолжить по индукции и показать, что задача построения периодического решения уравнения номера k сводится к решению алгебраической системы вида:

$$\begin{cases} M_k \dfrac{\partial P}{\partial M} + N_k \dfrac{\partial P}{\partial N} = -\psi_1^{(k)}, \\ M_k \dfrac{\partial Q}{\partial M} + N_k \dfrac{\partial Q}{\partial N} = -\psi_2^{(k)}. \end{cases} \tag{58}$$

Система (58) всегда разрешима, если только $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ — простые корни системы (51). Итак, если система уравнений (51) имеет простые корни, то каждой системе простых корней $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ соответсвует ряд (49), каждый член которого вычисляется по изложенной выше процедуре. Доказано, что при условии аналитичности $\varphi(x, \dot{x})$ относительно своих аргументов ряды сходятся для достаточно малых значений ε. В этом случае уравнение (46) допускает периодическое решение. Число периодических решений соответствует числу простых корней (51). Если корни (51) — кратные, периодические решения строятся по дробным степеням параметра ε.

Если $\omega \neq k$, то при $\varepsilon = 0$ мы имеем нерезонансный случай и амплитуды вынужденных колебаний имеют порядок возмущающей силы, то есть порядок $O(\varepsilon)$.

Если $\omega = k$, то при $\varepsilon = 0$ амплитуда вынужденных колебаний имеет порядок $O(1)$ при бесконечно малой интенсивности возмущающей силы.

Поэтому явлением резонанса в нелинейной системе естественно назвать возникновение интенсивных колебаний при исчезающе малой интенсивности возмущающей силы и при условии, что частота возмущающей силы близка к собственной частоте линейных колебаний.

6.1 Пример. Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\beta\cos t + \varepsilon\left(\alpha - \gamma^2 x^2\right)\dot{x};\ \omega^2 = 1 - \varepsilon\delta$$

Разлагаем решение в ряд:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ..., \tag{59}$$

Выписываем уравнения при различных степенях ε:

$$\varepsilon^0 :\ \ddot{x}_0 + x_0 = 0$$

$$\varepsilon^1 :\ \ddot{x}_1 + x_1 = \delta x_1 + \beta\cos t + \left(\alpha - \gamma^2 x_0^2\right)\dot{x}_0,$$

и так далее.

Порождающее уравнение имеет решение

$$x_0 = M\cos t + N\sin t,$$

Подставляем x_0 в уравнение для x_1. Потребуем ортогональности правой части функциям $\cos t$, $\sin t$:

$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \beta\cos t + \Big[\alpha - \gamma^2 \left(M\cos t + N\sin t \right)^2 \Big] \left(-M\sin t + N\cos t \right) + \\ \qquad\qquad + \delta \left(M\cos t + N\sin t \right) \Big\} \cos t dt = 0 \\ \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \beta\cos t + \Big[\alpha - \gamma^2 \left(M\cos t + N\sin t \right)^2 \Big] \left(-M\sin t + N\cos t \right) + \\ \qquad\qquad + \delta \left(M\cos t + N\sin t \right) \Big\} \sin t dt = 0 \end{cases}$$

Раскрываем интегралы:

$$\begin{cases} \beta\pi + M\delta\pi + N\pi \left[\alpha - \dfrac{\gamma^2}{4} \left(M^2 + N^2 \right) \right] = 0 \\ N\delta\pi - M\pi \left[\alpha - \dfrac{\gamma^2}{4} \left(M^2 + N^2 \right) \right] = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} M\delta + N \left[\alpha - \dfrac{\gamma^2}{4} \left(M^2 + N^2 \right) \right] = -\beta \\ N\delta - M \left[\alpha - \dfrac{\gamma^2}{4} \left(M^2 + N^2 \right) \right] = 0 \end{cases}$$

Положим

$$M = A\cos\varphi,\ N = A\sin\varphi$$

Система приобретает вид:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A\left[\delta\cos\varphi+\sin\varphi\left(\alpha-\dfrac{\gamma^2}{4}A^2\right)\right]=-\beta\\
A\left[\delta\sin\varphi-\cos\varphi\left(\alpha-\dfrac{\gamma^2}{4}A^2\right)\right]=0
\end{array}
\right.
$$

Возводя в квадрат и складывая эти уравнения, исключаем φ:

$$
A^2\left[\delta^2+\left(\alpha-\frac{\gamma^2}{4}A^2\right)^2\right]=\beta^2
$$

Таким обазом, величина A^2 удовлетворяет кубическому уравнению. Может оказаться, что это уравнение имеет три положительных корня. В этом случае возможно существование трёх резонансных режимов.