

Система случайных функций

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2025-03-18

Рассмотрим систему двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$.

Определение

$R_{xy}(t_1, t_2) = M[(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1))(Y(t_2) - \bar{y}(t_2))]$ — *взаимная корреляционная функция*.

Характеризует степень корреляции (связи, зависимости) ординаты функции $X(t)$, взятой в момент времени t_1 и ординаты функции $Y(t)$, взятой в момент времени t_2 .

Свойства взаимной корреляции

1. Взаимная корреляция функций $X(t)$ и $Y(t)$ не равна взаимной корреляции функций $Y(t)$ и $X(t)$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) \neq R_{yx}(t_1, t_2)$$

Действительно, $R_{yx}(t_1, t_2) = M[(X(t_2) - \bar{x}(t_2))(Y^*(t_1) - \bar{y}^*(t_1))]$. Однако, после перестановки аргументов t_1 и t_2 , получим: $R_{yx}(t_1, t_2) = R_{xy}^*(t_2, t_1) = R^*$, т.е. перестановка индексов с одновременной перестановкой аргументов ведёт к комплексно-сопряжённому исходному выражению.

2. Установим связь между $R_{xy}(t_1, t_2)^*$ и дисперсиями $K_x(t_1, t_1)$, $K_y(t_2, t_2)$. Для этого, аналогично предыдущим выкладкам рассмотрим выражение

$$A = \left| \sqrt{K_y(t_2, t_2)} (X(t_1) - \bar{x}(t_1)) \pm \sqrt{K_x(t_1, t_1)} (Y(t_2) - \bar{y}(t_2)) \right|^2$$

$M[A] \geq 0 \Rightarrow$ (раскрывая скобки под знаком математического ожидания)

$$K_x(t_1, t_1) + K_y(t_2, t_2) \geq 2 |\operatorname{Re} R_{xy}(t_1, t_2)|$$

3. Для стационарной системы функций $X(t)$ и $Y(t)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1) = R_{xy}(\tau),$$

тогда

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$$

Определение

Говорят, что система случайных функций стационарна в широком смысле, если $\bar{x} = const$, $\bar{y} = const$, $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1)$, $K_y(t_1, t_2) = K_y(t_2 - t_1)$, $R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1)$.

Рассмотрим систему $\{X(t), \frac{d}{dt}X(t)\}$, обозначим $\frac{d}{dt}X(t) = V(t)$. Определим корреляционную функцию для неё:

$$R_{xv}(t_1, t_2) = M[(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1))(V(t_2) - \bar{v}(t_2))] = \\ = M\left[(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)) \frac{d}{dt_2}[X(t_2) - \bar{x}(t_2)]\right] =$$

поменяем местами операции $\frac{d}{dt}$ и M , и учтём, что

$$\left[(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)) \frac{d}{dt_2}[X^*(t_2) - \bar{x}^*(t_2)]\right] - \text{функция двух переменных и}$$
$$\frac{d}{dt_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_2}, \text{ тогда}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_2} M[(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1))(X(t_2) - \bar{x}(t_2))] = \frac{\partial}{\partial t_2} K_x(t_1, t_2)$$

Таким образом,

$$R_{xv}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} K_x(t_1, t_2)$$

Если процесс стационарный:

$$\frac{\partial}{\partial t_2} K_x(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} K_x(t_2 - t_1) = \frac{d}{d\tau} K_x(\tau),$$

то

$$R_{xv}(\tau) = \frac{d}{d\tau} K_x(\tau)$$

Т.к. для вещественного стационарного процесса $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$ – чётна, тогда $\left. \frac{d}{d\tau} K_x(\tau) \right|_{\tau=0} = 0$ (или же: т.к. $K_x(\tau)$ имеет максимум при $\tau = 0$, то $K'_x = 0$ при $\tau = 0$), то

$$R_{xv}(0) = 0$$

Таким образом, для вещественного стационарного процесса ордината случайной функции и её производная, взятая в тот же момент времени, являются некоррелированными, т.е. независимыми случайными величинами.

Пример. Интеграл от случайного процесса $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

$$m_y(t) = M \int_0^t X(s) ds = \int_0^t m_x(s) ds$$

$$\begin{aligned} K_y(t_1, t_2) &= M \left[\int_0^{t_1} (X - m_x) ds \int_0^{t_2} (X - m_x) d\tau \right] = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M((X(s) - m_x(s))(X(\tau) - m_x(\tau))) ds d\tau = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(s, \tau) ds d\tau \end{aligned}$$

$$R_{xy} = M \left[(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)) \int_0^{t_2} (X(s) - m_x(s)) ds \right] = \int_0^{t_2} K_x(t_1, s) ds$$

$$R_{yx} = \int_0^{t_2} K_x(s, t_2) ds$$

Пример. Случайный процесс $X(t) = Ae^{-t}$ ($t \geq 0$), A – случайная величина. $m_A = m$, $D_A = \sigma^2$. Найти: характеристики случайных процессов

$$X, X', Y = \int_0^t X(s) ds.$$

$$m_x = me^{-t}, D_x = \sigma^2 e^{-2t}, K_x(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-(t_1+t_2)},$$

$$m_{x'} = -me^{-t}, D_{x'} = \sigma^2 e^{-2t}, K_{x'}(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-(t_1+t_2)},$$

$$R_{xx'} = -\sigma^2 e^{-(t_1+t_2)}, R_{x'x} = -\sigma^2 e^{-(t_1+t_2)};$$

$$m_y = m(1 - e^{-t}), K_y(t_1, t_2) = \sigma^2(1 - e^{-t_1})(1 - e^{-t_2}), D_y = K_y(t, t) = \sigma^2(1 - e^{-t})^2,$$

$$R_{xy} = -\sigma^2 e^{-t_1}(1 - e^{-t_2}), R_{yx} = -\sigma^2 e^{-t_2}(1 - e^{-t_1}).$$

Спектральная теория стационарных случайных процессов

Поскольку у стационарных случайных процессов вероятностные характеристики неизменные по времени, то они имеют квазипериодический характер. Это позволяет рассмотреть вместо стационарной случайной функции от времени – случайную функцию некоторой вспомогательной переменной, которая во многих приложениях имеет размерность частоты (т. е. $X(t) \rightarrow \bar{X}(\omega)$). Это помогает во многих задачах упростить выкладки (аналогично установившиеся колебания $e^{i\omega t}$, выносятся множитель и сокращается, т.е. решение $u = \tilde{u}e^{i\omega t}$, ищется только $\tilde{u} = \tilde{u}(\omega)$).

Рассмотрим стационарную функцию $X(t)$, предполагаем, что $M(X(t)) = 0$ (не нарушая общности рассуждений). Пусть $X(t)$ может быть представлена в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами ω_l , т.е.

$$X(t) = \sum_{l=1}^n (A_l \cos \omega_l t + B_l \sin \omega_l t) \quad (1)$$

где A_l, B_l — случайные величины.

Можно перейти от тригонометрических функций к показательным:

$$X(t) = \sum_{l=1}^n (P_l e^{i\omega_l t} + Q_l e^{-i\omega_l t}) \quad (2)$$

Введем новую нумерацию обозначив $-\omega_l = \omega_{-l} \Rightarrow$

$$X(t) = \sum_{l=-n}^n (\Phi_l e^{i\omega_l t}) \quad (3)$$

где Φ_l — случайная величина. Поскольку $M(X(t)) = 0 \Rightarrow M(\Phi_l) = 0$

Определим, какие условия должны удовлетворять случайным величинам Φ_l , чтобы $X(t)$ удовлетворяло стационарности. ($M(\dot{X}(t)) = 0$, уже удовлетворяет $D = const$, $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1)$)

Определим $K_x(t_1, t_2)$:

$$K_x(t_1, t_2) = M((X^*(t_1) - \overline{X^*}(t_1))(X(t_2) - \overline{X}(t_2))) = M(X^*(t_1)X(t_2)) = \\ = M\left[\sum_{l=-n}^n (\Phi_l^* e^{i\omega_l t_1}) \sum_{j=-n}^n (\Phi_j e^{i\omega_j t_2})\right] = \left(\sum_{j=-n}^n \sum_{l=-n}^n (e^{i(\omega_l t_1 - \omega_j t_2)}) M[\Phi_l^* \Phi_j]\right)$$

Для стационарности необходимо, чтобы $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1)$, т.е. сохранились те слагаемые, для которых $\omega_j = \omega_l$, т.е. $j = l \Rightarrow \Phi_l$ должны удовлетворять условию:

$$M(\Phi_l^* \Phi_j) = \delta_{jl} S_l, M(\Phi_l) = 0 \quad (4)$$

где S_l - неслучайный положительный коэффициент,

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 0, j \neq l \\ 1, j = l \end{cases}$$

Тогда, с учетом свойства (4), имеем

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{l=-n}^n S_l e^{i\omega_l(t_2-t_1)} = K_x(t_2-t_1) = K_x(\tau)$$

Тогда дисперсия случайного процесса

$$D[X(t)] = K_x(t_1, t_2) = K_x(0) = \sum_{l=-n}^n S_l = \text{const}$$

Т.е. выполняются все условия стационарного процесса. Таким образом выражение (3) вполне удовлетворяется при выполнении условий (4) определению стационарного процесса. Обобщим теперь выражение (3) отказавшись от дискретного набора частот и от конечности их числа, тогда мы получим интеграл Стильтьеса.

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d(\omega) \quad (5)$$

При этом условие (4) переписывается в виде

$$M[(\omega)] = 0, M[d * (\omega)d(\omega_1)] = S(\omega)\delta(\omega - \omega_1)d\omega d\omega_1 = f(y_0) \quad (6)$$

где $S(\omega)$ — положительная функция, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y - y_0)dy = f(y_0),$$

Основным положением, позволяющим перейти к спектральному разложению (5) случайной функции является теорема Хинчина.