1 Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова. Метод Малкина

1.1 Предварительный анализ

Ранее при построении вычислительных алгоритмов существенным образом использовалость то обстоятельство, что порожающее уравнение линейно и, следовательно, нам известен весь возможный набор его решений.

Основная черта метода Пуанкаре, да и любых методов нелинейной механики состоит в том, что рассматриваются уравнения, которые в том или ином смысле близки к уравнениям с известными решениями. Поэтому, отказываясь от квазилинейной трактовки, мы должны рассматривать уравнения, близкие не линейным уравнениям, а к некоторым другим, для изучения которых мы имеем необходимую рецептуру. Известно очень немного типов уравнений, для которых существуют эффективные аналитические методы построения решений. К ним относятся в первую очередь системы Ляпунова. Естественно, что следующим после изучения квазилинейной теории должно быть изучение систем, близким к ляпуновским

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda y + X(x,y) + \mu F_1(x,y,t) \\ \dot{y} = \lambda x + Y(x,y) + \mu F_2(x,y,t), \end{cases} \tag{1}$$

где F_i — функции, аналитические по x и y и периодические по t периода T. Не ограничивая общности, можем принять $T = 2\pi$. При $\mu = 0$ система переходит в систему Ляпунова

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\lambda\eta + X(\xi,\eta) \\ \dot{\eta} = \lambda\xi + Y(\xi,\eta), \end{cases} \tag{2}$$

Поставим задачу отыскания периодическим решений системы (1), период которых равен периоду возмущающих сил F_1 и F_2 и которые при $\mu \to 0$ переходят в периодические решения порождающего уравнения (2). Порождающее уравнение, согласно теореме Ляпунова, имеет семейство периодических решений

$$
\begin{cases} \xi = \xi(C, t+h) \\ \eta = \eta(C, t+h), \end{cases}
$$

зависящее от двух параметров: «амплитуды» C и «сдвига фазы» $-h$. Согласно теореме Ляпунова период этого решения имеет вид:

$$
T = \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 + h_2 C^{2k} + h_3 C^{2k+1} + ...\right),
$$

где через h_2 мы обозначили первый из коэффициентов, который отличен от нуля. Из теоремы Ляпунова мы знаем, что младшая степень амплитуды C в разложении периода всегда будет чётная.

Мы будем изучать задачу отыскания периодического решения системы (1), которые при любом, достаточно малом μ имеет период, равный 2π. Следовательно, и предельное решение при $\mu = 0$ будет иметь такой же период, равный 2π или $2\pi/p$, где p — некоторое целое число. Таким образом, период порождающего решения, как и в квазилинейной теории мы знаем заранее:

$$
\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 + h_2 C^{2k} + h_3 C^{2k+1} + ...\right), \tag{3}
$$

Однако соотношение (3) позволяет определить также и параметр C — амплитуду порождающего решения. Это обстоятельство качественно отличает задачу от задач квазилинейных. В квазилинейных задачах объектом исследования как раз и является амплитуда порождающего решения, здесь же она известна заранее.

Уравнение (3) мы можем представить в следующем виде:

$$
h_2 C^{2k} + h_3 C^{2k+1} + ... = \frac{\lambda - p}{p\lambda},
$$

или, извлекая корень 2k-й степени, получим:

$$C + \frac{h_3}{2kh_2} C^2 ... = \sqrt[2k]{\frac{\lambda - p}{p\lambda}}, \tag{4}$$

Уравнение (4) для каждого значения p и для каждого значения корня имеет бесконечное количество комплексных решений. Среди этих решений может оказаться бесчисленное количество действительных решений. Каждому из этих действительных решений может, вообще говоря, отвечать некоторое искомое периодическое решение системы (1).

Порождающая система (2) всегда имеет тривиальное решение, которое мы можем считать периодическим любого периода T. Поэтому может оказаться, что система (1) допускает такие периодические решения, которые при $\mu \to 0$ переходят в тривиальные решения порождающей системы (2). Эти решения условимся обозначать $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

1.2 Решения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$. Нерезонансный случай

Рассмотрим сначала решение $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$. Так как эти решения при $\mu \to 0$ переходят в тривиальные, то будем их искать в форме рядов

$$\begin{cases} x^{(0)} = \mu x_1^{(0)} + \mu^2 x_2^{(0)} + ... \\ y^{(0)} = \mu y_1^{(0)} + \mu^2 y_2^{(0)} + ..., \end{cases} \tag{5}$$

Так как разложения функций X и Y начинаются с членов второго порядка малости, то функции $x_i^{(0)}$ и $y_i^{(0)}$ будут удовлетворять следующим системам:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^{(0)} = -\lambda y_1^{(0)} + F_1(0, 0, t) \\ \dot{y}_1^{(0)} = \lambda x_1^{(0)} + F_2(0, 0, t), \end{cases} \tag{6}$$

$$
\begin{cases} \dot{x}_2^{(0)} = -\lambda y_2^{(0)} + X\left(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}\right) + x_1^{(0)}\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + y_1^{(0)}\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = -\lambda y_2^{(0)} + F_{12}(t), \\ \dot{y}_2^{(0)} = \lambda x_2^{(0)} + Y\left(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}\right) + x_1^{(0)}\dfrac{\partial F_2}{\partial x} + y_1^{(0)}\dfrac{\partial F_2}{\partial y} = \lambda x_2^{(0)} + F_{22}(t), \end{cases} \tag{7}
$$

и так далее.

Здесь F_{ij} — периодические функции периода 2π. Возможны два случая. Первый случай — это тот, когда λ не равна целому числу. В этом случае однородная система

$$
\begin{cases} \dot{x}_1^{(0)} = -\lambda y_1^{(0)}, \\ \dot{y}_1^{(0)} = \lambda x_1^{(0)} \end{cases}
$$

не имеет решений периода 2π и, следовательно, периодическое решение системы (6) мы можем построить обычными методами. Все последующие члены разложений (5) удовлетворяют системам дифференциальных уравнений, совершенно идентичным системам (6). Таким образом, в том случае, когда λ не равно целому числу, вычисление решения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ не представляет труда.

Рассмотрим случай $\lambda = p$, $(p \in \mathbf{Z})$. Продифференцируем первое уравнение (6) и зменим в нём $\dot{y}_1^{(0)}$ его выражением из второго

$$
\ddot{x}_1^{(0)} = -\lambda \dot{y}_1^{(0)} + \dot{F}_1(0,0,t) = -\lambda\left[\lambda x_1^{(0)} + F_2(0,0,t)\right] + \dot{F}_1(0,0,t)
$$

Перепишем уравнение в виде

$$
\ddot{x}_1^{(0)} + \lambda^2 x_1^{(0)} = \dot{F}_1(0,0,t) - \lambda F_2(0,0,t) \tag{8}
$$

Потребуем теперь ортогональности правой части (8) к $\cos pt$:

$$
\int\limits_0^{2\pi} \dot{F}_1(0,0,t)\cos pt dt - \lambda \int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\cos pt dt = 0 \tag{9}
$$

В первом интеграле (9) преобразуем по частям:

$$[F_1(0,0,t)\cos pt]|_0^{2\pi} + p\int\limits_0^{2\pi} F_1(0,0,t)\sin pt dt - p\int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\cos pt dt = 0$$

Внеинтегральное слагаемое в последнем равенстве обращается в нуль, так как $F_{1,2}(0,0,t)$ — периодические функции периода 2π, а p — целое число. В результате приходим к равенству

$$I_1(F_1,F_2) = \int\limits_0^{2\pi} \dot{F}_1(0,0,t)\sin pt dt - \int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\cos pt dt = 0 \tag{10}$$

Потребуем теперь ортогональности правой части (8) к $\sin pt$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \dot{F}_1(0,0,t)\sin pt dt - \lambda\int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\sin pt dt = 0 \tag{11}$$

В первом интеграле (9) преобразуем по частям:

$$[F_1(0,0,t)\sin pt dt]|_0^{2\pi} - p\int\limits_0^{2\pi} F_1(0,0,t)\cos pt dt - p\int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\sin pt dt = 0$$

Отсюда получаем:

$$I_2(F_1,F_2) = \int\limits_0^{2\pi} F_1(0,0,t)\cos pt dt + \int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\sin pt dt = 0$$

Объединяем условия ортогональности:

$$\begin{cases} I_1(F_1,F_2) = \int\limits_0^{2\pi} F_1(0,0,t)\sin ptdt - \int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\cos ptdt = 0, \\ I_2(F_1,F_2) = \int\limits_0^{2\pi} F_1(0,0,t)\cos ptdt + \int\limits_0^{2\pi} F_2(0,0,t)\sin ptdt = 0, \end{cases} \tag{12}$$

Если условия (12) выполнены, решение (6) — периодическое.

Тот случай, когда функции F_1 и F_2 удовлетворяют условиям (12) является исключительным. Следовательно, в общем случае при $\lambda = p$ система (6) не будет иметь периодических решений вида (5). Таким образом, если решения $x_1^{(0)}$ и $y_1^{(0)}$ системы (1) существуют, то их следует разыскивать в форме, отличной от (5).

Первый случай, когда $\lambda \neq p$ (или когда выполнены оба условия (12)) условимся называть нерезонансным. В этом случае учёт членов порядка μ^2 приводит только к количественным уточнениям.

Новые качественные особенности возникают во втором случае, когда $\lambda = p$ и хотя бы один из функционалов I_1 или I_2 не равняется нулю,

$$I_1^2 + I_2^2 > 0.$$

Этот случай мы называем резонансным.

1.3 Пример расчёта нерезонансных решений

Приводим пример расчёта нерезонансных решений x для уравнений:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \sin t + \alpha x^3, \tag{13}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \sin t + \alpha x^2 \tag{14}$$

при условии $\omega \neq 1$. Согласно изложенной теории периодические решения периода 2π уравнений (13) и (14), обращающиеся в тривиальные решения порождающего уравнения при $\mu \to 0$, следует искать в виде рядов:

$$x = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + ...$$

Функция x_1 в обоих случаях удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \sin t, \tag{15}$$

Так как $\omega \neq 1$, то единственное периодическое решение уравнения (15), имеющее период 2π, будет:

$$x_1 = \frac{1}{\omega^2 - 1} \sin t \tag{16}$$

Уравнение для (13) не допускает периодического решения периода 2π, кроме тривиального. Итак, $x_2 = 0$. Уравнение для x_3

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x = \frac{\alpha}{4\left(\omega^2 - 1\right)^3} \left(3 \sin t - \sin 3t\right)$$

имеет решение

$$x_3 = \frac{\alpha}{4\left(\omega^2 - 1\right)^3} \left(\frac{3}{\omega^2 - 1} \sin t - \frac{1}{\omega^2 - 9} \sin 3t\right)$$

и так далее.

Итак, периодические решения уравнения (13) имеет вид:

$$x = \frac{\mu}{\omega^2 - 1} \sin t + \frac{\alpha \mu^3}{4\left(\omega^2 - 1\right)^3} \left(\frac{3}{\omega^2 - 1} \sin t - \frac{1}{\omega^2 - 9} \sin 3t\right) \tag{17}$$

Периодическое решение уравнения (14) имеет вид:

$$x = \frac{\mu}{\omega^2 - 1} \sin t + \frac{\alpha \mu^2}{2\left(\omega^2 - 1\right)^2} \left(1 - \frac{\cos 2t}{\omega^2 - 4}\right) \tag{18}$$

Если мы сделаем попытку построить нерезонансные периодические решения уравнений (13) и (14) методом Пуанкаре, рассматривая уравнения (13) и (14) как квазилинейные, то, как не трудно убедиться, мы придём к тем же результатам.

Для того, чтобы уравнения (13) и (14) можно было трактовать как квазилинейные, сделаем замену переменных

$$x = \sqrt{\mu} y, \; \mu = \varepsilon^2.$$

Тогда уравнения (13), (14) приводятся к следующим

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon \sin t + \alpha \varepsilon^2 x^3,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \sin t + \alpha \varepsilon x^2.$$

Решение этих уравнений ищем в виде:

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \ldots$$

Функция y_1 в обоих случаях удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = \sin t$$

Находим 2π-периодическое решение этого уравнения. Затем выписываем уравнений для y_2, $y_3, \ldots$, далее находим 2π-периодические решение y_2, $y_3, \ldots,$. Подставляем найденные решения в ряд и возвращаемся от y к x и от ε к μ. В результате приходим к представлениям (17) и (18). Таким образом, в рассматриваемом случае обе трактовки, «квазилинейная» и «ляпуновская» дают одно и то же.

1.4 Резонансные режимы в системах, близких к системе Ляпунова

Рассмотрим теперь случай резонансных колебаний в системе (1), то есть будем считать, что λ близка к целому числу p:

$$\lambda = p + \mu k.$$

Система (1) тогда может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = -py + X(x,y) + \mu\Phi_1(x,y,t) \\ \dot{y} = px + Y(x,y) + \mu\Phi_2(x,y,t), \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\Phi_1 = F_1 - ky,\ \Phi_2 = F_2 + kx.$$

Мы условились рассматривать резонансный случай. Это значит, что хотя бы одн из соотношений (12) не выполняется. Таком образом будем считать, что один из функционалов $I_1(\Phi_1, \Phi_2)$ или $I_2(\Phi_1, \Phi_2)$ отличен от нуля.

Сделаем несколько предварительных замечаний:

- При $\mu = 0$ порождающая система (2) допускает периодические решения, период которых T является чётной аналитической функцией «постоянной энергии» H:

  $$x^2 + y^2 + W(x,y) = H^2$$

  Напомним, что $W(x,y)$ — аналитическая функция своих переменных, разложение которой в ряд Тейлора в окрестности начала координат начинается со слагаемых третьего порядка. Итак:

  $$T = \frac{2\pi}{p}\left(1 + h_2 H^{2k} + ...\right), \tag{20}$$

причём постоянная h в разложении (20) та же, что и в разложении (3);

- Задача определения возможных периодических решений системы (19) состоит в определении постоянных a и b начальных значений переменных x и y:

$$x(0) = a,\ y(0) = b, \tag{21}$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$x(2\pi, a, b, \mu) = a,\ y(2\pi, a, b, \mu) = b, \tag{22}$$

поскольку условия (22) необходимы и достаточны для существования периодических решений исходной системы.

При $\mu = 0$ любая пара чисел a и b, достаточно малых по абсолютной величине, будет определять некоторое периодическое решение. Период этого решения будет T (смотрите (20)). Следовательно,

$$x(T, a, b, 0) = a,\ y(T, a, b, 0) = b,$$

Очевидно, что эти равенства сохраняют силу, если заменить T на qT, где T — любое целое число:

$$x(qT, a, b, 0) = a,\ y(qT, a, b, 0) = b, \tag{23}$$

Используем обозначения (21) и, принимая во внимание, что разложение функции $W(a, b)$ начинается со слагаемых третьего порядка малости, выражение для T следует переписать в виде:

$$T = \frac{2\pi}{p}\left[1 + h_2\left(a^2 + b^2\right)^k + ...\right], \tag{24}$$

где не выписанные слагаемые имеют порядок малости более высокий, чем

$O(a^{2k})$ и $O(^{2k})$.

- Функции x и y — аналитические функции a, b и μ, то есть они могут быть представлены в форме рядов следуюшего вида:

$$\begin{aligned} x(t,a,b,\mu) &= A_1 a + B_1 b + C_1 \mu + ... \\ y(t,a,b,\mu) &= A_2 a + B_2 b + C_2 \mu + ..., \end{aligned} \tag{25}$$

Ряды (25) можно записать ещё и так:

$$\begin{aligned} x(t,a,b,\mu) &= x(t,a,b,\mu) + \mu\left(C_1 + \psi_1\right), \\ y(t,a,b,\mu) &= y(t,a,b,\mu) + \mu\left(C_2 + \psi_2\right), \end{aligned} \tag{26}$$

где ψ_1 и ψ_2 — аналитические функции переменных a, b и μ, обращающиеся в ноль при $a = b = \mu = 0$, A_i, B_i, C_i — функции времени. Для их определения надо ряды (26) подставить в систему уравнений (19) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных a, b и μ. Например, для C_1 и C_2 мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = -pC_2 + \Phi_1(0,0,t), \\ \dfrac{dC_2}{dt} = pC_1 + \Phi_2(0,0,t), \end{cases} \tag{27}$$

Так как $x(0) = a$ и $y(0) = b$, то фукнции C_1 и C_2 удовлетворяют начальным условиям:

$$\begin{cases} C_1(0) = 0, \\ C_2(0) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

Определим C_1 и C_2 методом вариации произвольных постоянных, положив

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha\cos pt + \beta\sin pt, \\ C_2 &= \alpha\sin pt - \beta\cos pt. \end{aligned} \tag{29}$$

Считая α, β новыми неизвестными, определим их из уравнений (27). Подставим (29) в (28):

$$\begin{aligned} \dot\alpha\cos pt + \dot\beta\sin pt &= \Phi_1(0,0,t), \\ \dot\alpha\sin pt - \dot\beta\cos pt &= \Phi_2(0,0,t), \end{aligned} \tag{30}$$

Решаем систему:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= \Phi_1(0,0,t)\cos pt + \Phi_2(0,0,t)\sin pt, \\ \dot\beta &= \Phi_1(0,0,t)\sin pt - \Phi_2(0,0,t)\cos pt, \end{aligned} \tag{31}$$

Используя начальные условия (28), получим окончательно следующие выражения для искомых функций C_1 и C_2:

$$C_1 = \int\limits_0^t \Phi_1(0,0,t)\cos p(\tau - t)d\tau + \int\limits_0^t \Phi_2(0,0,t)\sin p(\tau - t)d\tau$$
$$C_2 = -\int\limits_0^t \Phi_1(0,0,t)\sin p(\tau - t)d\tau + \int\limits_0^t \Phi_2(0,0,t)\cos p(\tau - t)d\tau$$

Вычислим значение $C_1(2\pi)$ и $C_2(2\pi)$. Легко видеть, что

$$C_1 = \int\limits_0^{2\pi} \Phi_1(0,0,t)\cos p\tau d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \Phi_2(0,0,t)\sin p\tau d\tau = I_2(\Phi_1,\Phi_2)$$
$$C_2 = -\int\limits_0^{2\pi} \Phi_1(0,0,t)\sin p\tau d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \Phi_2(0,0,t)\cos p\tau d\tau = -I_1(\Phi_1,\Phi_2)$$

Мы условились, что хотя бы одно из чисел I_1 или I_2 не равно нулю.

После этих предварительных рассмотений перейдём к доказательству существования резонансных решений $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ и нахождению их структуры. Для этого снова рассмотрим систему уравнений (22). Перепишем эти уравнения, сипользуя представление (26)

$$
\begin{aligned}
&x(2\pi, a, b, 0) + \mu\left[C_1(2\pi) + \psi_1\right] = a, \\
&y(2\pi, a, b, 0) + \mu\left[C_2(2\pi) + \psi_2\right] = b.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Равенство (24) может быть переписано в следующей форме:

$$
2\pi = pT - 2\pi h_2\left(a^2 + b^2\right)^k + ...
$$

Таким образом, величину $x(2\pi, a, b, 0)$ можно представить в виде следующего ряда:

$$
\begin{aligned}
x(2\pi, a, b, 0) = x\left[pT - 2\pi h_2\left(a^2 + b^2\right)^k + ..., a, b, 0\right] = \\
= x(pT, a, b, 0) - 2\pi h_2\left(a^2 + b^2\right)^k \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\mu=0} + \Phi_1^*,
\end{aligned} \tag{33}
$$

где Φ_1^* — сумма членов более высокого порядка. Воспользуемся иеперь равенствами (23) и тем обстоятельством, что

$$
\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\mu=0} = -py + X(x, y)
$$

и следовательно

$$
\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\mu=0,\, t=pT} = -pb + X(a, b)
$$

Это позволяет разложение (33) представить в форме

$$
x(2\pi, a, b, 0) = a + 2\pi h_2 pb\left(a^2 + b^2\right)^k + \Phi_1^{**},
$$

где Φ_1^{**} — сумма слагаемых более высокого порядка по a и b. Подобное разложение можно записать и для функции $y(2\pi, a, b, 0)$:

$$
y(2\pi, a, b, 0) = b - 2\pi h_2 pa\left(a^2 + b^2\right)^k + \Phi_2^{**},
$$

Эти равенства позволяют переписать (32) в форме:

$$\begin{aligned} &2\pi h_2 pb\left(a^2+b^2\right)^k+\Phi_1^{**}+\mu\left[C_1\left(2\pi\right)+\psi_1\right]=0, \\ &-2\pi h_2 pa\left(a^2+b^2\right)^k+\Phi_2^{**}+\mu\left[C_2\left(2\pi\right)+\psi_2\right]=0. \end{aligned} \tag{34}$$

Итак, систему укравнений, которая позволяет определить начальные значения переменных x и y, порождающие периодические решения системы (1), мы привели к виду (34), где выделены нишние степени относительно искомых чисел a и b. Соотношения (34) показывают, что для периодических решений эти числа должны зависеть от μ и по условию обращаться в ноль при $\mu=0$, поскольку мы ищем решение, которое при $\mu\to 0$ превращается в тривиальное.

Так как наименьшая степень чисел a и b равна $2k+1$, то ряды, которые определяют a и b через μ должны быть расположены по степеням параметра

$$\nu=\mu^{\frac{1}{2k+1}}.$$

Поэтому сделаем ещё одну замену переменных

$$a=\alpha\nu,\ b=\beta\nu. \tag{35}$$

Теперь система (34) примет вид:

$$\begin{aligned} &2\pi h_2 p\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)^k+\frac{1}{\mu}\Phi_1^{**}+C_1\left(2\pi\right)+\psi_1=0, \\ &-2\pi h_2 p\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)^k+\frac{1}{\mu}\Phi_2^{**}+C_2\left(2\pi\right)+\psi_2=0. \end{aligned} \tag{36}$$

Напомним, что через Φ_i^{**}, ψ_i обозначены совокупности членов. порядок которых более высокий относительно a, b и μ. Следовательно, мы можем утверждать, что они обращаются в нуль при $\nu=0$. Из аналитичности этих функций следует, что разложения этих функций начинаются со слагаемых первого порядка малости по

ν:

$$\frac{1}{\mu}\Phi_i^{**} + \psi_i = \nu x_i + \ldots$$

Левые части уравнений (36) — аналитические функции своих переменных. Поэтому решение этой системы будут аналитическими функциями параметра ν:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \nu\alpha_1 + \nu^2\alpha_2 + \ldots \\ \beta &= \beta_0 + \nu\beta_1 + \nu^2\beta_2 + \ldots \end{aligned} \tag{37}$$

Уравнения (37) будут иметь только одно действительное решение, причём α_0 и β_0 в этом случае удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &2\pi h_2 p\beta_0\left(\alpha_0^2 + \beta_0^2\right)^k = -C_1\left(2\pi\right), \\ &2\pi h_2 p\alpha_0\left(\alpha_0^2 + \beta_0^2\right)^k = C_2\left(2\pi\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Разделив первое уравнение (38) на второе, найдём:

$$\alpha_0 = -\frac{C_2(2\pi)}{C_1(2\pi)}\beta_0$$

Подставив затем это выражение во второе уравнение (38), находим:

$$2\pi h_2 p\frac{C_2(2\pi)}{C_1(2\pi)}\beta_0\left\{\left[-\frac{C_2(2\pi)}{C_1(2\pi)}\beta_0\right]^2 + \beta_0^2\right\}^k = C_2\left(2\pi\right).$$

или

$$2\pi h_2 p\beta_0^{2k+1}\left[C_1^2(2\pi) + C_2^2(2\pi)\right]^k = C_1^{2k+1}(2\pi),$$

следовательно

$$\beta_0^{2k+1} = \frac{C_1^{2k+1}(2\pi)}{2\pi h_2 p\left[C_1^2(2\pi) + C_2^2(2\pi)\right]^k}.$$

Окончательно

$$\beta_0 = \frac{C_1(2\pi)}{\sqrt[2k+1]{2\pi h_2 p\left[C_1^2(2\pi) + C_2^2(2\pi)\right]^k}}. \tag{39}$$

и

$$\alpha_0 = -\frac{C_2(2\pi)}{\sqrt[2k+1]{2\pi h_2 p\left[C_1^2(2\pi) + C_2^2(2\pi)\right]^k}}. \tag{40}$$

В равенствах (39) и (40) берётся арифметическое значение корня. Среди чисел α_0 и β_0 по крайней мере одно отлично от нуля, так как му уже установили, что одна из констант $C_1(2\pi)$ или $C_2(2\pi)$ необходимо отлична от нуля. Уравнения для определения последующих членов разложений (37) будут линейными и всегда разрешимыми. Итак, мы пришли к следующему фундаментальному результату.

Теорема (И. Г. Малкин.) Пусть $2k$ — младшая степень величины C в разложении периода

$$T = \frac{2\pi}{p}\left(1 + h_2 C^{2k} + ...\right)$$

порождающего решения. Тогда при главном резонансе существует одно и только одно периодическое решение системы (1), которе обращается в нуль при $\mu = 0$. Это решение является аналитической функцией параметра

$$\nu = \mu^{\frac{1}{2k+1}}$$

2 Примеры расчёта резонансных решений

2.1 Уравнение Дюффинга (метод Пуанкаре)

Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon P \sin t + \varepsilon x^3 \tag{41}$$

Ищем решение в виде:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ... \tag{42}$$

Подставляем (42) в (41) и выписываем множители при различных степенях ε:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \\ &\ddot{x}_1 + x_1 = P \sin t + x_0^3, \\ &.................. \end{aligned} \tag{43}$$

Решаем эти уравнения. Находим x_0:

$$x_0 = M \cos t + N \sin t$$

Подставляем x_0 в уравнение для x_1:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = P \sin t + (M \cos t + N \sin t)^3 \tag{44}$$

Потребуем отсутствия в правой части (44):

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{2\pi} \left[P \sin t + (M \cos t + N \sin t)^3\right] \cos t dt = 0, \\ &\int\limits_0^{2\pi} \left[P \sin t + (M \cos t + N \sin t)^3\right] \sin t dt = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

или, после отбрасывания ненулевых множителей:

$$\begin{aligned} & M\left(M^2+N^2\right)=0, \\ & \frac{3N}{4}\left(M^2+N^2\right)=-P \end{aligned} \tag{46}$$

Решение (46) следующее:

$$M=0,\ N=\sqrt[3]{-\frac{4P}{3}}$$

Решение принимает вид:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{4P}{3}}\sin t+\ldots \tag{47}$$

Выражение (47) не содержит малый параметр ε, таким образом построено резонансное решение.

2.2 Уравнение Дюффинга (метод Малкина)

Рассмотрим сначала уравнение

$$\ddot{x}+x=\mu\sin t+\alpha x^3 \tag{48}$$

Это уравнение допускает решение вида

$$x=M\cos t+N\sin t+\mu x_1+\mu^2 x_2+\ldots \tag{49}$$

Решение (49) может быть построено методом, изложенным ранее. Однако согласно теореме Малкина, кроме решения (49) уравнение (48) может допускать также и решение вида

$$x=x_1\mu^r+x_2\mu^{2r}+\ldots \tag{50}$$

Решение (50) может быть построено, следуя изложенному методу. Для этого прежде всего надо определить показатель r в разложении (50).

Рассмотрим порождающее уравнение:

$$\ddot{x} + x = \alpha x^3 \tag{51}$$

Решение уравнения (51) будем искать, следуя методу Ляпунова. Сделаем сначала замену независимого переменного:

$$t = \tau \left(1 + h_2 C^2 + h_3 C^3 + ...\right)$$

Тогда уравнение (51) примет вид:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x \left(1 + h_2 C^2 + h_3 C^3 + ...\right)^2 = \alpha x^3 \left(1 + h_2 C^2 + h_3 C^3 + ...\right)^2 \tag{52}$$

Согласно методу Ляпунова решение этого уравнения следует искать в виде:

$$x = C \cos t + C^2 x_2 + C^3 x_3 + ...$$

Функция x_2 будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = 0$$

Так как функция x_2 должна удовлетворять условиям:

$$x_2(0) = 0, \left.\frac{dx_2}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0,$$

то очевидно, что $x_2 = 0$. Для x_3 получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + x_3 = \alpha \cos^3 \tau - 2h_2 \cos \tau = \frac{\alpha}{4} \left(3 \cos \tau - 3 \cos 3\tau\right) - 2h_2 \cos \tau \tag{53}$$

Для того, чтобы уравнение (53) допускало периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы правая часть этого уравнения не содержала $\cos t$:

$$h_2 = \frac{3\alpha}{8}$$

Итак, $h_2 \neq 0$. Согласно теореме Малкина:

$$r = \frac{1}{2k+1},$$

где $2k$ — младшая степень велины C в разложении периода. В нашем случае это показатель степени C в слагаемом, содержащем h_2, то есть

$$r = \frac{1}{3}.$$

Теперь решение уравнения (48) будем искать в виде ряда

$$x = x_1\mu^{1/3} + x_2\mu^{2/3} + .. \tag{54}$$

Для функций x_i имеем следующие уравнений:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + x_1 = 0,\\
&\ddot{x}_2 + x_2 = 0,\\
&\ddot{x}_3 + x_3 = \sin t + \alpha x_1^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{55}$$

Из первых уравнений (55) находим:

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t,$$

$$x_2 = M_2 \cos t + N_2 \sin t,$$

где M_i и N_i — неизвестные. Для функции x_3 мы будем иметь следующее уравнение:

$$\ddot{x}_3 + x_3 = \sin t + \alpha \left(M_1 \cos + N_1 \sin t \right)^3 , \tag{56}$$

Условие отсутствия в правой части уравнения (56) резонансных слагаемых приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{2\pi} \left[\sin t + \alpha \left(M_1 \cos + N_1 \sin t \right)^3 \right] \cos t dt = 0 \\ &\int\limits_0^{2\pi} \left[\sin t + \alpha \left(M_1 \cos + N_1 \sin t \right)^3 \right] \sin t dt = 0 \end{aligned} \tag{57}$$

или, после отыскания интегралов, отбрасывая ненулевые множители, получаем:

$$\begin{aligned} &M_1 \left(M_1^2 + N_1^2 \right) = 0 \\ &N_1 \left(M_1^2 + N_1^2 \right) = -\frac{4}{3\alpha} \end{aligned} \tag{58}$$

Система уравнений (58) имеет очевидное решение:

$$M_1 = 0,\ N_1 = \sqrt[3]{-\frac{4}{3\alpha}}$$

2.3 Ещё один пример

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu \sin t + \alpha x^2, \tag{59}$$

Рассматривая это уравнение как квазилинейное, заменой

$$x = \sqrt{\mu} y,\ \mu = \varepsilon^2 \tag{60}$$

приведём его к виду:

$$\ddot{y} + y = \varepsilon \left(\sin t + \alpha y^2 \right), \tag{61}$$

Применим к последнему уравнению метод Пуанкаре отыскания периодических решений. Для этого положим:

$$y = M\cos t + N\sin t + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + ...$$

Функция y_1 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\ddot{y}_1 + y_1 = \sin t + \alpha\left(M\cos t + N\sin t\right)^2, \tag{62}$$

Для того, чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо так подобрать параметры M и N, чтобы правая часть уравнения была ортогональна $\sin t$ и $\cos t$. Однако это невозможно, так как

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[\sin t + \alpha\left(M\cos t + N\sin t\right)^2\right]\cos t dt = 0,$$
$$\int\limits_0^{2\pi}\left[\sin t + \alpha\left(M\cos t + N\sin t\right)^2\right]\sin t dt = \pi$$

и следовательно, правая часть уравнения не может ни при каких M и N ортогональной $\sin t$. Поэтому y_1 (а, значит, и x) не может быть периодической функцией t. Таким образом, периодическое решение не может быть построено методом Пуанкаре.

Построим его теперь методом Малкина Рассмотрим порождающее уравнение:

$$\ddot{x} + x = \alpha x^2 \tag{63}$$

Решение уравнения (63) будем искать, следуя методу Ляпунова. Сделаем сначала замену независимого переменного:

$$t = \tau\left(1 + h_2C^2 + h_3C^3 + ...\right)$$

Тогда уравнение (51) примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x\left(1 + h_2C^2 + h_3C^3 + ...\right)^2 = \alpha x^2\left(1 + h_2C^2 + h_3C^3 + ...\right)^2 \qquad (64)$$

Согласно методу Ляпунова решение этого уравнения следует искать в виде:

$$x = Cx_1 + C^2x_2 + C^3x_3 + ...$$

Собирая слагаемые при различных степенях параметра C, получаем набор уравнений

$$\begin{array}{ll} C^1: & \dfrac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = 0 \\ C^2: & \dfrac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = \alpha x_1^2 \\ C^3: & \dfrac{d^2x_3}{d\tau^3} + x_3 + h_2x_1 = 2\alpha x_1x_2 \\ .... & .... \end{array}$$

Решаем эти уравнения:

$$x_1 = \cos\tau$$

Уравнение для x_2 приобретает вид:

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = \alpha\cos^2\tau$$

или

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = \frac{\alpha}{2}\left(1 + \cos 2\tau\right)$$

Его решение:

$$x_2 = A\cos\tau + B\sin\tau + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{6}\cos 2\tau$$

Начальные условия следующие:

$$x_2(0) = 0 = A + \frac{\alpha}{3}$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 = B$$

Следовательно

$$A = -\frac{\alpha}{3}$$

и

$$x_2 = -\frac{\alpha}{3}\cos\tau + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{6}\cos 2\tau$$

Подставляем x_1 и x_2 в уравнение для x_3:

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^3} + x_3 = -h_2x_1 + \alpha x_1x_2$$

Требуем отсутствия в правой части уравнения резонансных слагаемых:

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{2\pi} (-h_2x_1 + \alpha x_1x_2)\cos\tau dt = \pi C\left(-h_2 + \frac{5}{12}\alpha^2\right) = 0 \\ &\int\limits_0^{2\pi} (-h_2x_1 + \alpha x_1x_2)\sin\tau dt = 0 \end{aligned} \tag{65}$$

Следовательно

$$h_2 = \frac{5}{12}\alpha^2 \neq 0$$

и

$$r = \frac{1}{3}$$

Теперь решение уравнения (59) будем искать в виде ряда

$$x = x_1\mu^{1/3} + x_2\mu^{2/3} + .. \tag{66}$$

Для функций x_i имеем следующие уравнений:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \\
&\ddot{x}_2 + x_2 = \alpha x_1^2, \\
&\ddot{x}_3 + x_3 = \sin t + 2\alpha x_1 x_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{67}$$

Решение уравнения для x_1 имеет вид:

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t,$$

Подставляем в уравнение для x_2 и получаем:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \alpha \left(M_1 \cos t + N_1 \sin t\right)^2$$

или

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \alpha \left[\frac{1}{2}\left(M_1^2 + N_1^2\right) + M_1 N_1 \sin 2t + \frac{1}{2}\left(M_1^2 - N_1^2\right)\cos 2t\right]$$

Решение этого уравнения:

$$x_2 = M_2 \cos t + N_2 \sin t + \alpha \left[\frac{1}{2}\left(M_1^2 + N_1^2\right) - \frac{M_1 N_1}{3}\sin 2t - \frac{M_1^2 - N_1^2}{6}\cos 2t\right]$$

Подставляем найденные выражения для x_1 и x_2 в уравнение для x_3 и требуем отсутствия в правой части резонансных слагаемых, что приводит нас к равенствам:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin t + 2\alpha x_1 x_2\right)\cos t dt = \frac{\alpha^2 \pi M_1}{6}\left(5M_1^2 - 2M_1 N_1 + 7N_1^2\right) = 0 \\
&\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin t + 2\alpha x_1 x_2\right)\sin t dt = \pi \left[1 + \frac{\alpha^2 N_1}{6}\left(5N_1^2 + 2M_1 N_1 + 7M_1^2\right)\right] = 0
\end{aligned} \tag{68}$$

Уравнения (68) имеют очевидное решение

$$M_1 = 0,\ N_1 = \sqrt[3]{-\frac{6}{5\alpha^2}}$$

Решение приобретает вид:

$$x = \mu^{1/3}\sqrt[3]{-\frac{6}{5\alpha^2}}\sin t + ...$$