

# Свойства спектральной плотности

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2025-03-25

## Theorem (Теорема (Хинчина))

( $\Rightarrow$ ) Если  $X(t)$  — стационарный случайный процесс  $\Rightarrow$  корреляционная функция его представима в виде  $K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dS(\omega)$  (функция  $\delta(\omega)$  — спектральная, неубывающая, ограниченная, вещественная).

( $\Leftarrow$ ) любая функция, удовлетворяющая условию  $K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dS(\omega)$ , где  $\delta(\omega)$  — вещественная, неубывающая, ограниченная функция, является корреляционной функцией, соответствующей спектральному случайному процессу.

В наиболее важных для практических приложений случаях, когда корреляционная функция быстро убывает при  $\tau \rightarrow \infty$  Т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau)| d\tau < \infty$ ,

тогда  $S(\omega)$  может быть продифференцирована  $\Rightarrow K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega) d\omega$ ,

т.е.  $S(\omega) = \frac{dS(\omega)}{d\omega}$  — спектральная плотность.  $S(\omega)$ -спектральная плотность.

1.  $S(\omega)$  — неотрицательная функция,  $S(\omega) \geq 0$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega < \infty$
3.  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K(\tau) d\tau$  — обратное преобразование Фурье
4. Если  $X(t)$  — вещественная ( $\Rightarrow K(\tau) = K(-\tau)$ ), то  $S(\omega) = S(-\omega)$

Доказательство:  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K(\tau) d\tau;$

$$S(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K(\tau) d\tau = \{\tau = -\tau'; d\tau = -d\tau'\} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau'} K(-\tau') d\tau' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau'} K(\tau') d\tau'$$

Т.е.  $S(\omega) = S(-\omega).$

В следствии четности  $K(\tau)$  и  $S(\omega)$ , после представления

$$e^{i\omega\tau} = \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau,$$

$$e^{-i\omega\tau} = \cos \omega\tau i - \sin \omega\tau$$

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau) S(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \cos \omega\tau \cdot S(\omega) d\omega$$

$$S(\omega) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau \cdot K(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega\tau \cdot K(\tau) d\tau$$

$$5. K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega 0} S(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = D[X(t)] = \text{const}$$

Т.е. дисперсия стационарного случайного процесса есть площадь, заключенная под кривой спектральной плотности.

**Пример.** Рассмотрим корреляционную функцию вида:  $K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ ,  $\alpha > 0$  где  $\sigma^2 = D$  — дисперсия случайного процесса  $\sigma^2 = D = K(0)$

Найдем  $S(\omega)$ —?

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K(\tau) d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau - \alpha|\tau|} d\tau = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-i\omega\tau - \alpha\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-i\omega\tau + \alpha\tau} d\tau \right] \right\} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} \right] = \frac{\sigma^2 \alpha}{2\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \end{aligned}$$

**Пример:**  $X(t)$  — стационарная случайная функция.

$$K_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$$

Найти:  $K_x, D, R$  случайные процессы  $X, X', Y = \int_0^t X(s)ds$

$$\text{а) } \tau \geq 0 \Rightarrow K_x(\tau) = e^{-\tau}(1 + \tau); D_x(\tau) = K_x(0) = 1$$

$$K_{x'}(\tau) = \frac{-\partial^2}{\partial x^2} K_x = e^{-\tau}(1 - \tau); D_{x'} = 1$$

$$K_Y(\tau) = \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)e^{-\tau}(1 + \tau)d\tau -$$

$$- \int_0^{t_2-t_1} (t_2 - t_1 - \tau)e^{-\tau}(1 + \tau)d\tau + \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)e^{-\tau}(1 + \tau)d\tau$$

$$R_{xy} = e^{-t_2+t_1}(2 + t_2 + t_1) - e^{-t_2}(2 + t_2).$$

Спектральная плотность линейной комбинации стационарной случайной функции и ее производных. Стационарное решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пусть  $X(t)$  — стационарная случайная функция имеет производную, т.е.  $K_x(\tau)$  — непрерывна при  $\tau = 0$  и  $\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}$  — существуют  $\Rightarrow$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega;$$

Рассмотрим  $V(t) = \frac{dX(t)}{dt}$  — тоже стационарная.

$$\begin{aligned} K_V(t_1, t_2) &= M \left\{ \left[ V * (t_1) - \overline{V * (t_1)} \right] \left[ V(t_2) - \overline{V(t_2)} \right] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} M \left\{ \left[ X * (t_1) - \overline{V * (t_1)} \right] \left[ X(t_2) - \overline{X(t_2)} \right] \right\} = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \end{aligned}$$

Для стационарной:  $K_V(\tau) = -\frac{d^2 K_X}{d\tau^2}$

$$\text{Тогда (*) } K_V(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \omega^2 S_x(\omega) d\omega$$

$$\text{В тоже время (**)} K_V(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_V(\omega) d\omega$$

Из (\*) и (\*\*)  $\Rightarrow$

$$S_V(\omega) = \omega^2 S_X(\omega) \quad (1)$$



Чтобы  $\omega^2 S_X(\omega)$  была спектральной плотностью, необходимо чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) < \infty$$

Выполнение этого условия эквивалентно требованию дифференцируемости  $X(t)$ , таким образом если выполняется  $\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_X(\omega) < \infty$   
 $\Rightarrow X(t)$  — дифференцируема.

**Пример.**  $K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$  — не дифференцируема (было ранее)

$$S_x = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \Rightarrow \omega^2 S_x(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2\omega^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$$

$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 S_x(\omega) = \text{const} = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega = \infty \Rightarrow$  процесс не дифференцируем.

Правило (1) можно обобщить и на случай производных более высокого порядка

$$J(t) = \frac{d^n}{dt^n} X(t) \Rightarrow S_y(\omega) = \omega^{2n} S_x(\omega) \quad (2)$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{a_0 d^n}{dt^n} + \frac{a_1 d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n,$$

где  $a_j = \text{const}, j = 0, \dots, n$

Найдем связь между спектральной плотностью

$$Z(t) = \frac{a_0 d^n}{dt^n} X(t) + \frac{a_1 d^{n-1}}{dt^{n-1}} X(t) + \dots + a_n = L\left(\frac{d}{dt}\right) X(t),$$

где  $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d(\omega)$

$$\Rightarrow Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n \right] e^{i\omega t} d(\omega)$$

$$\begin{aligned}
K_z(\tau) &= M[Z * (t_1)Z(t_2)] = \\
&= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n] e^{-i\omega t} d\Phi^*(\omega) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n] e^{i\omega(t+\tau)} d\Phi(\omega) \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_0^*(-\omega_1)^n + a_1^*(-\omega_1)^{n-1} + \dots + a_n^*) \cdot \\
&\quad \cdot (a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n) e^{i\omega(t+\tau) - i\omega_1 t} \cdot S_x(\omega) \delta(\omega - \omega_1) d\omega d\omega_1 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \left| a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n \right|^2 S_x(\omega) d\omega
\end{aligned}$$

Учитывая спектральное разложение для  $K_z(\tau)$

$$\begin{aligned}
K_z(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_z(\omega) d\omega \Rightarrow \\
S_z(\omega) &= \left| a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n \right|^2 S_x(\omega) \text{ или}
\end{aligned}$$

$$S_z(\omega) = |L(i\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (3)$$

Таким образом надо найти корреляционную функцию случайной функции  $Z(t)$ , если известна корреляционная функция случайной функции  $X(t)$  ( $K_x$  — можно определить зная случайную функцию).

1. Найти  $S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K_x(\tau) d\tau;$

2. Найти  $S_z(\omega)$  по (5);

3. Найти  $K_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_z(\omega) d\omega;$

Применим полученный результат к нахождению спектральной плотности стационарного решения неоднородной линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

$$\begin{aligned} \frac{a_0 d^n}{dt^n} J(t) + \frac{a_1 d^{n-1}}{dt^{n-1}} J(t) + \dots + a_n J(t) = \\ = \frac{b_0 d^m}{dt^m} X(t) + \frac{b_1 d^{m-1}}{dt^{m-1}} X(t) + \dots + b_m X(t) \end{aligned}$$

или

$$Q_n(p)J(t) = P_m(p)X(t),$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $Q_n(p)$ ,  $P_m(p)$  — полиномы  $m$  и  $n$  степени.

$X(t)$  — стационарная случайная функция Из формулы (3) следует, что левая часть дифференциального уравнения имеет спектральную плотность —  $|Q_n(i\omega)|^2 S_y(\omega)$ , правая часть дифференциального уравнения имеет спектральную плотность —  $|P_m(i\omega)|^2 S_x(\omega)$

$$\Rightarrow |Q_n(i\omega)|^2 S_y(\omega) = |P_m(i\omega)|^2 S_x(\omega) \Rightarrow$$

$$S_y(\omega) = \frac{|P_m(i\omega)|^2 S_x(\omega)}{|Q_n(i\omega)|^2} \quad (4)$$

**Пример.** Модель стационарного вязкоупругого тела.

$a_0\dot{\sigma} + a_1\sigma = b_0\dot{\varepsilon} + b_1\varepsilon$ , где  $a_0, a_1, b_0, b_1 = \text{const}$ ;

$$S_{\sigma}(\omega) = \frac{|b_0(i\omega) + b_1|^2 S_{\varepsilon}(\omega)}{|a_0(i\omega) + a_1|^2};$$

$$K_{\sigma}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{\sigma}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|b_0(i\omega) + b_1|^2 S_{\varepsilon}(\omega)}{|a_0(i\omega) + a_1|^2} e^{i\omega\tau} d\omega;$$

$D_{\sigma} = K_{\sigma}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|b_0(i\omega) + b_1|^2 S_{\varepsilon}(\omega)}{|a_0(i\omega) + a_1|^2} e^{i\omega\tau} d\omega$  — отклонение от среднего значения.