

1 Волны Лява

1.1 Антиплоский сдвиг

Рассмотрим уравнение Ляме

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} + \mu \Delta \underline{u} + \underline{F} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (1)$$

Предположим, что поле перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3; t) = 0, \\ u_2(x_1, x_2, x_3; t) = 0, \\ u_3(x_1, x_2, x_3; t) = u(x_1, x_2; t) \end{cases} \quad (2)$$

Найдём $\operatorname{div} \underline{u}$:

$$\operatorname{div} \underline{u} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 0$$

Подставим (2) в (1):

$$\begin{cases} F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \\ \mu(u_{,11} + u_{,22}) + F_3 = \rho \ddot{u} \end{cases} \quad (3)$$

Два первых уравнения дают условия физической реализации: $F_1 = F_2 = 0$, третье — обычное волновое уравнение.

Рассмотрим теперь закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений следующие:

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \mu u_{,1}, \\ \sigma_{23} = \mu u_{,2} \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь двуслойное полупространство, состоящее из слоя $0 \leq x_1 \leq H$, где H — толщина слоя и полупространства $x_2 < 0$. Параметры слоя — λ, μ . Параметры полупространства — λ^*, μ^* . Волновое поле в слое имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0, \\ u_3 = u(x_2)e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases} \quad (6)$$

Волновое поле в полупространстве следующее:

$$\begin{cases} u_1^* = u_2^* = 0, \\ u_3^* = u^*(x_2)e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{cases} \quad (7)$$

Уравнение для u в слое имеет вид:

$$\mu(-k^2 u + u'') = -\rho\omega^2 u \quad (8)$$

Уравнение для u^* в полупространстве следующее:

$$\mu^*[-k^2 u^* + (u^*)''] = -\rho^*\omega^2 u^* \quad (9)$$

Верхняя поверхность слоя свободна от напряжений:

$$\sigma_{23}|_{x_2=H} = 0 \quad (10)$$

Следовательно

$$\mu u'|_{x_2=H} = 0 \quad (11)$$

На границе слоя и полупространства выполняются условия сопряжения вида:

$$\begin{cases} u_3|_{x_2=0} = u_3^*|_{x_2=0}, \\ \sigma_{23}|_{x_2=0} = \sigma_{23}^*|_{x_2=0} \end{cases} \quad (12)$$

или

$$\begin{cases} u|_{x_2=0} = u^*|_{x_2=0}, \\ \mu u'|_{x_2=0} = \mu^* (u^*)'|_{x_2=0} \end{cases} \quad (13)$$

Рассмотрим уравнение (8). Перегруппируем слагаемые:

$$u'' + (k_2^2 - k^2) u = 0, \quad (14)$$

где

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

Общее решение уравнения:

$$u = A \cos \gamma x_2 + B \sin \gamma x_2, \quad (15)$$

где

$$\gamma = \sqrt{k_2^2 - k^2}.$$

Рассмотрим уравнение (8). Перегруппируем слагаемые:

$$(u^*)'' - [k^2 - (k_2^*)^2] u^* = 0, \quad (16)$$

где

$$(k_2^*)^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu^*}$$

Его общее решение, ограниченное в бесконечно удалённой точке:

$$u^* = C e^{\gamma^* x_2}, \quad (17)$$

где

$$\gamma^* = \sqrt{k^2 - (k_2^*)^2}.$$

Подставляем решения (15) и (17) в граничные условия (11) и (13):

$$\begin{cases} \mu\gamma(-A \sin \gamma H + B \cos \gamma H) = 0, \\ A = C, \\ \mu\gamma B = \mu^* \gamma^* C \end{cases} \quad (18)$$

Из последнего равенства получаем:

$$B = \frac{\mu^* \gamma^*}{\mu \gamma} C$$

Подставляем выражения для A и C в первое уравнение системы (18). Оно сводится к равенству:

$$\sin \gamma H = \frac{\mu^* \gamma^*}{\mu \gamma} \cos \gamma H, \quad (19)$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma H = \frac{\mu^* \gamma^*}{\mu \gamma}, \quad (20)$$

Уравнение (20) является дисперсионным уравнением волн Лява. Раскроем радикалы

$$\operatorname{tg} \left(\sqrt{k_2^2 - k^2} H \right) = \frac{\mu^* \sqrt{k^2 - (k_2^*)^2}}{\mu \sqrt{k_2^2 - k^2}}, \quad (21)$$

Потребуем положительности подкоренных выражений:

$$k_2 > k > k_2^*$$

Отсюда получаем условие существования волн Лява:

$$c_2^* > c_2$$

Преобразуем (21):

$$\operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} k H \right) = \frac{\mu^* \sqrt{1 - \frac{c^2}{(c_2^*)^2}}}{\mu \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1}}, \quad (22)$$

Уравнение (22) может быть решено аналитически относительно k :

$$k = \frac{1}{H \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{\mu^* \sqrt{1 - \frac{c^2}{(c_2^*)^2}}}{\mu \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1}} + n\pi \right], \quad n \in \mathbf{Z}$$

На рисунке 1 представлен график дисперсионных кривых для волн Лява в случае, когда материал слоя — медь и $c_2 = 2258.52$ м/с, материал полупространства — сталь и $c_2^* = 3188.52$ м/с, $H=1$ м. По горизонтальной оси откладывается параметр k , по вертикальной — c .

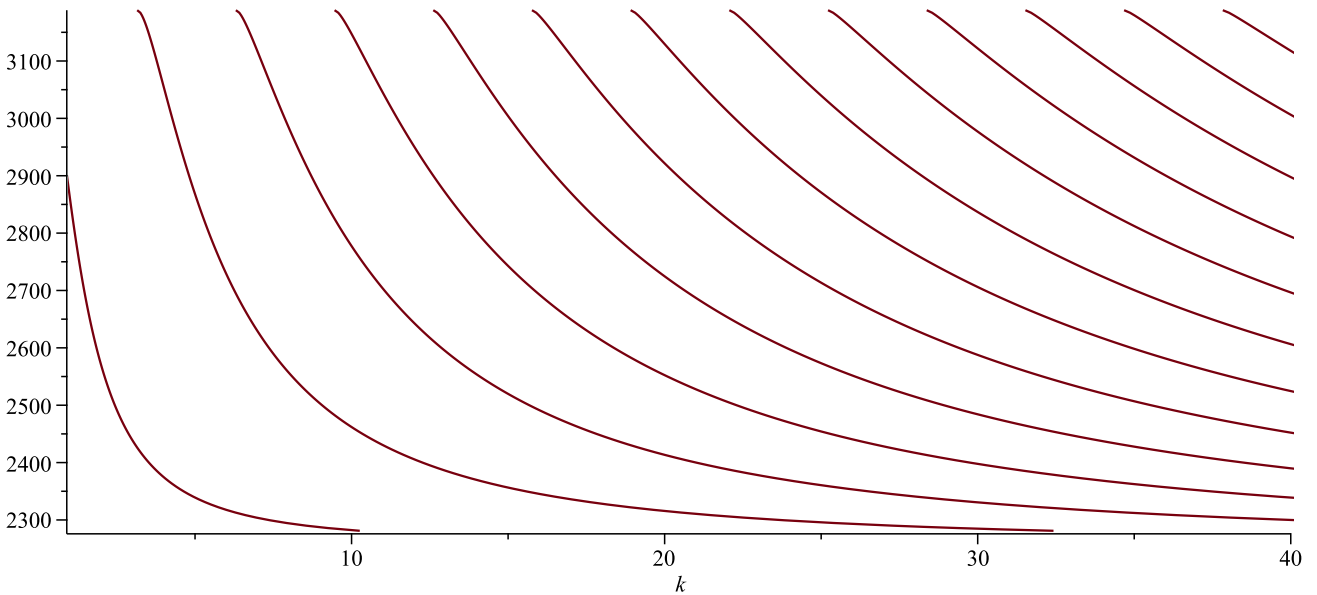


Рис. 1: Дисперсионные кривые

Все дисперсионные кривые на рисунке 1 находятся между двумя горизонтальными прямыми $c = c_2$ и $c = c_2^*$. Также дисперсионные кривые изображают в осях (ω, k) :

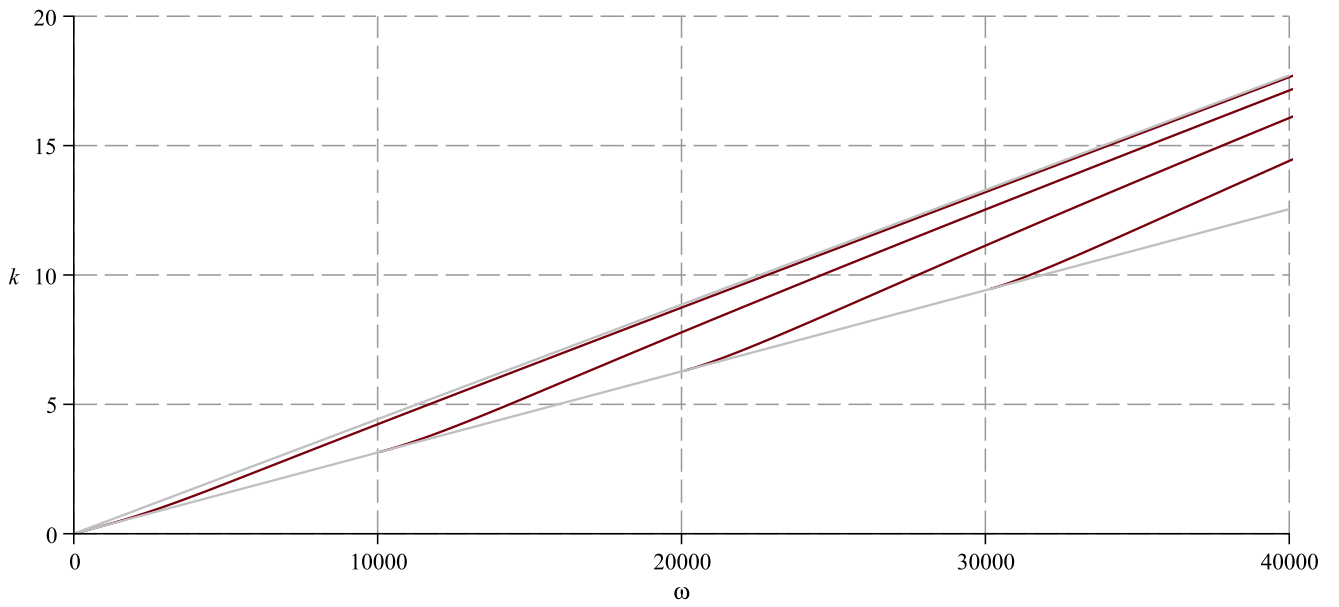


Рис. 2: Дисперсионные кривые

2 SH-колебания в слое

Рассмотрим упругий слой толщины $2H$, $-H \leq x_2 \leq H$. Границы слоя свободны от напряжений:

$$\sigma_{23}|_{x_2=\pm H} = 0 \quad (23)$$

Решение будем искать в виде бегущих волн:

$$u_3 = U(x_2)e^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (24)$$

Уравнение колебаний слоя имеет вид:

$$\mu(u_{3,11} + u_{3,22}) = \rho\ddot{u}_3, \quad (25)$$

где μ — модуль сдвига, ρ — плотность слоя. После подстановки (24) в (25) получаем:

$$\mu(-k^2U + U'')e^{i(kx_1 - \omega t)} = -\rho\omega^2Ue^{i(kx_1 - \omega t)}, \quad (26)$$

Отбросим ненулевой экспоненциальный множитель и перегруппируем слагаемые:

$$U'' - (k^2 - k_2^2)U = 0. \quad (27)$$

Здесь

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

Граничные условия (23) принимают вид:

$$\mu U'|_{x_2=\pm H} = 0 \quad (28)$$

Общее решение (27) имеет вид:

$$U = A\operatorname{ch}\gamma x_2 + B\operatorname{sh}\gamma x_2, \quad (29)$$

где

$$\gamma = \sqrt{k^2 - k_2^2}.$$

Подставляем общее решение (29) в (28) и получаем:

$$\begin{cases} \mu\gamma (A\operatorname{sh}\gamma H + B\operatorname{ch}\gamma H) = 0, \\ \mu\gamma (-A\operatorname{sh}\gamma H + B\operatorname{ch}\gamma H) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Разбиваем задачу на две:

1. Симметричная задача ($A \neq 0, B = 0$).

В этом случае граничные условия сводятся к одному равенству

$$\operatorname{sh}\gamma H = 0 \quad (31)$$

Решим уравнение (31):

$$\operatorname{sh}\gamma H = i \sin i\gamma H = 0, \quad (32)$$

следовательно

$$i\gamma H = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (33)$$

Делим (33) на H , умножаем на i и возводим обе части в квадрат:

$$k^2 - k_2^2 = -\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (34)$$

При $k = 0$ получаем набор корней уравнения:

$$k_2^{(n)} = \frac{\pi n}{H}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

или

$$\omega_n^{(1)} = \frac{\pi n c_2}{H}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

$\omega_n^{(1)}$ называются критическими частотами или частотами толщинного резонанса

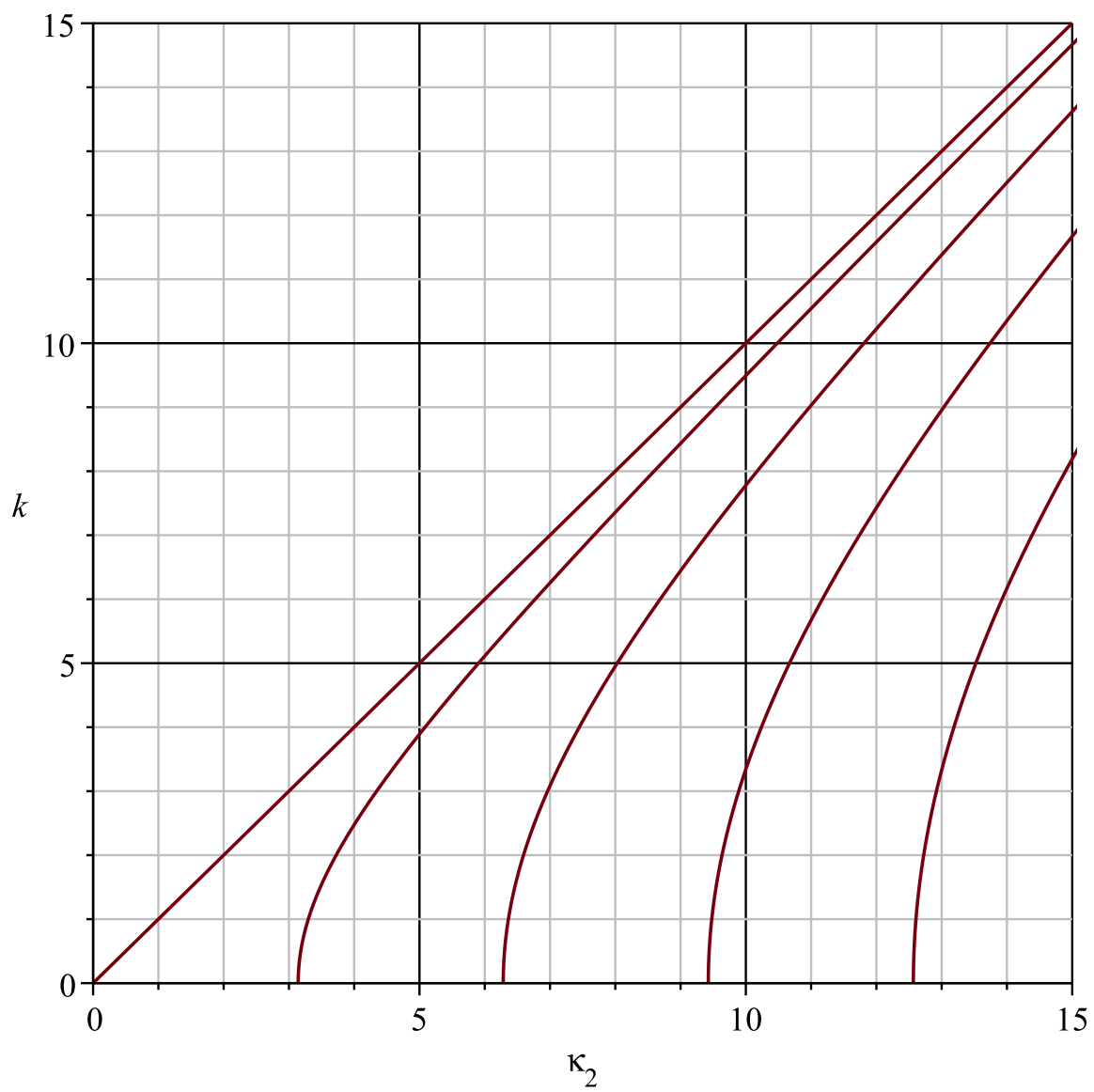


Рис. 3: График дисперсионных кривых для симметричной задачи

нанса.

Уравнение (34) описывает семейство гипербол (рисунок 4).

2. Антисимметричная задача ($A = 0, B \neq 0$). В этом случае граничные условия сводятся к одному равенству

$$\operatorname{ch} \gamma H = 0 \quad (35)$$

Решим уравнение (35):

$$\operatorname{ch} \gamma H = \cos i \gamma H = 0, \quad (36)$$

следовательно

$$i \gamma H = \pi (2n + 1), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (37)$$

Делим (37) на H , умножаем на i и возводим обе части в квадрат:

$$k^2 - k_2^2 = - \left[\frac{\pi (2n + 1)}{2H} \right]^2, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (38)$$

При $k = 0$ получаем набор корней уравнения:

$$k_2^{(n)} = \frac{\pi (2n + 1)}{2H}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

или

$$\omega_n^{(2)} = \frac{\pi (2n + 1) c_2}{2H}, \quad n \in \mathbf{Z}$$

— ещё одно семейство критических частот.

Уравнение (38) описывает семейство гипербол.

Определение Частные решения уравнений колебаний с однородными граничными условиями будем называть модами колебаний. Моды делятся на распространяющиеся и нераспространяющиеся.

Если $\omega = \text{const}$, то дисперсионные уравнения (34) и (38) определяют счётное множество значений k , из которых конечное число вещественных и бесконечное число чисто мнимых.

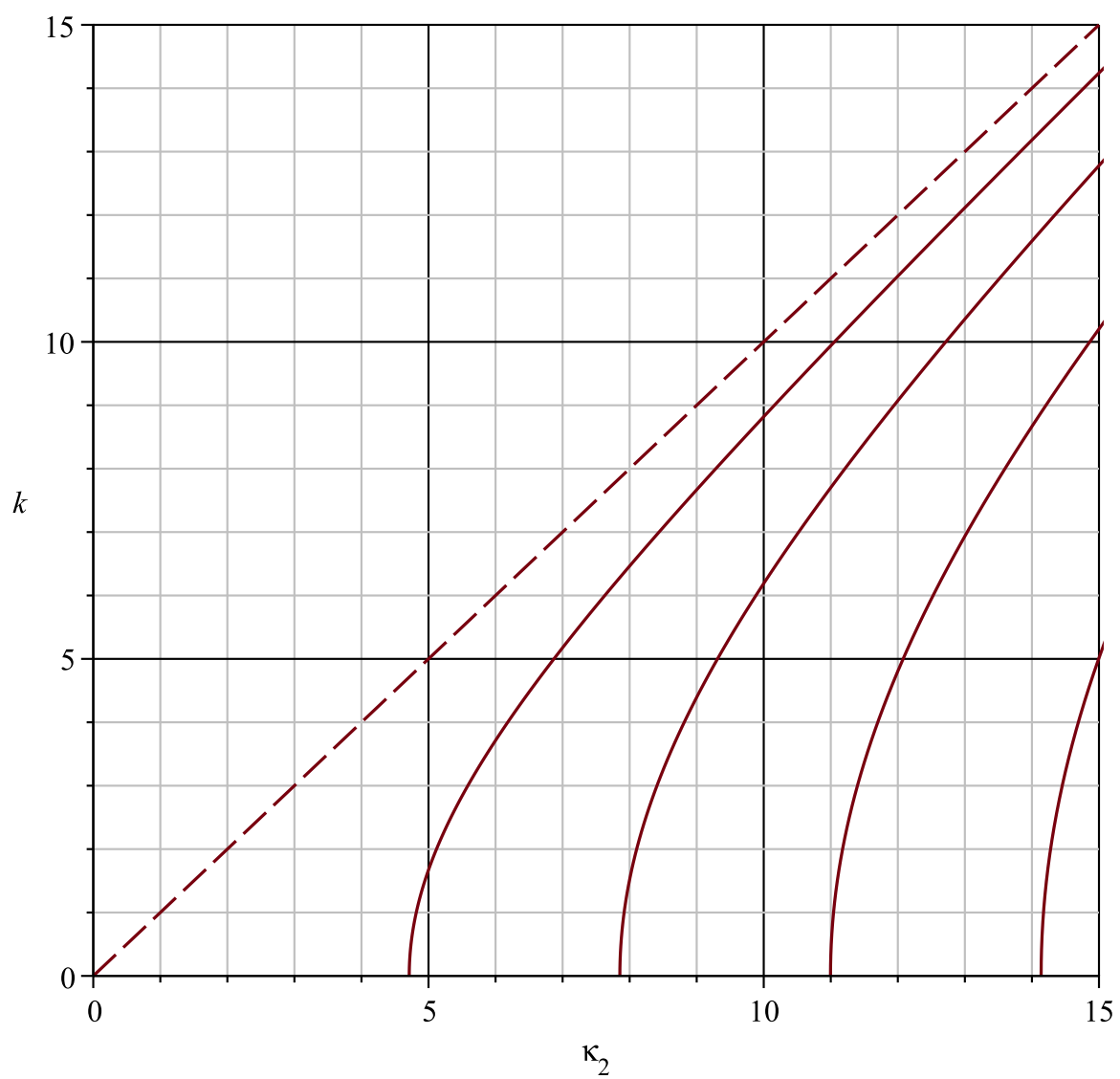


Рис. 4: График дисперсионных кривых для антисимметричной задачи

Если $k \in \mathbf{R}$, решение получаем в виде распространяющихся волн, если $k = i\delta$ ($\delta \in \mathbf{R}$), амплитуда экспоненциально растёт (или убывает). Те значения ω , при которых $k = 0$, называются критическими частотами (или частотами запираения, или частотами толщинных резонансов). Решение при $k = 0$ представляет собой стоячую волну. Антисимметричных бегущих волн при $\omega < \omega_1^{(2)}$ не существует.

3 Вынужденные колебания

3.1 Условия излучения

Для конечных областей краевых условий достаточно для построения единственного решения в нерезонансном случае. Существует счётный набор ω_n — резонансных частот (частот, на которых существует нетривиальное решение однородной краевой задачи)

3.1.1 Бесконечные области

Пример

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -\delta(r)$$

в пространстве.

Решениями уравнения являются функции

$$u_1 = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad u_2 = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}.$$

Условие ограниченности решения в бесконечно удалённой точке не определяет единственное.

1. Условия излучения Зоммерфельда

Если мы рассматриваем установившиеся колебания упругой области, содержащей бесконечно удалённую точку, необходимо выбрать то решение, которое соответствует волнам, уходящим на бесконечность

В случае трёхмерной задачи условие имеет вид:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) r = 0$$

В случае двумерной задачи:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \sqrt{r} = 0$$

Пример Рассмотрим функцию

$$u_1 = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}.$$

Рассмотрим уравнение фронта распространяющейся волны

$$kr - \omega t = 0$$

Дифференцируем по времени:

$$k\dot{r} - \omega = 0,$$

следовательно

$$\dot{r} = \frac{\omega}{k} > 0,$$

скорость волны положительна и волна идёт на бесконечность.

Для решения

$$u_2 = \frac{e^{i(-kr-\omega t)}}{4\pi r}.$$

получаем

$$\dot{r} = -\frac{\omega}{k} > 0,$$

и волна идёт из бесконечности. Согласно принципу Зоммерфельда выбираем u_1 .

2. Принцип предельного поглощения

Для построения единственного решения задачи об установившихся колебаниях упругой области, содержащей бесконечно удалённую точку, необходимо

нагрузить уравнения движения слагаемыми, содержащими вязкое внутреннее трение

- Добавляем в уравнение

$$Lu = \rho \ddot{u},$$

слагаемые, характеризующие вязкое трение (L — дифференциальный оператор). Уравнение принимает вид

$$Lu = \rho \ddot{u} + \varepsilon \dot{u}, \quad \varepsilon > 0.$$

В случае установившихся колебаний ω заменяется на $\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon$

- Выбираем решение, ограниченное в бесконечно удалённой точке;
- Осуществляем равномерный предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$$

Пример Рассматриваем решения уравнения Гельмгольца

$$u_{1\varepsilon} = \frac{e^{ik_\varepsilon r}}{4\pi r} = \frac{e^{ikr - \varepsilon r}}{4\pi r}$$

$$u_{2\varepsilon} = \frac{e^{-ik_\varepsilon r}}{4\pi r} = \frac{e^{-ikr + \varepsilon r}}{4\pi r}$$

Очевидно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_{1\varepsilon} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u_{2\varepsilon} = \infty.$$

Выбираем u_1 .

3. Принцип предельной амплитуды (Тихонова-Самарского)

Для того, чтобы построить решение уравнений теории упругости в случае установившихся колебаний в области, содержащей бесконечно удалённую точку, нужно построить решение задачи Коши с произвольными начальными

условиями, устремить время к бесконечности и выделить в решении часть, соответствующую установившимся колебаниям.

4. Энергетический принцип (Мандельштама) Необходимо выбирать те решения, которые перемосят энергию на бесконечность

3.2 Плоская задача Лэмба

Рассмотрим полуплоскость $x_2 < 0$. Полуплоскость находится в состоянии плоской деформации

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_2 = u_2(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \\ u_3 = 0, \end{cases} \quad (39)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}|_{x_2=0} = p(x_1)e^{-i\omega x_1} \quad (40)$$

Для отыскания решения используем представление Ляме:

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}, \\ u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}, \end{cases} \quad (41)$$

где волновые потенциалы φ и ψ удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\begin{cases} \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + k_1^2\varphi = 0, \\ \psi_{,11} + \psi_{,22} + k_2^2\psi = 0, \end{cases} \quad (42)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Для решения задачи используем преобразование Фурье:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \\ \tilde{\psi}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \end{cases} \quad (43)$$

Уравнения (42) после применения преобразования Фурье принимают вид:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}'' - (\alpha^2 - k_1^2) \varphi = 0, \\ \tilde{\psi}'' - (\alpha^2 - k_2^2) \psi = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Общее решение (44), ограниченное в бесконечно удалённой точке, имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = Ae^{\gamma_1 x_2}, \\ \tilde{\psi} = Be^{\gamma_2 x_2}. \end{cases} \quad (45)$$

где $\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 - k_i^2}$.

Найдём трансформанты перемещений:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = -i\alpha\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}' = -i\alpha Ae^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 Be^{\gamma_2 x_2}, \\ \tilde{u}_2 = \tilde{\varphi}' + i\alpha\tilde{\psi} = \gamma_1 Ae^{\gamma_1 x_2} + i\alpha Be^{\gamma_2 x_2}, \end{cases} \quad (46)$$

Найдём трансформанты напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu (\tilde{u}'_1 - i\alpha u_2) = \mu (-i\alpha\gamma_1 Ae^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2^2 Be^{\gamma_2 x_2} - i\alpha\gamma_1 Ae^{\gamma_1 x_2} + \alpha^2 Be^{\gamma_2 x_2}) \quad (47)$$

или

$$\tilde{\sigma}_{12} = \mu [-2i\alpha\gamma_1 Ae^{\gamma_1 x_2} + (2\alpha^2 - k_2^2) Be^{\gamma_2 x_2}] \quad (48)$$

$$\tilde{\sigma}_{22} = \lambda (-i\alpha\tilde{u}_1 + \tilde{u}'_2) + 2\mu\tilde{u}'_2 = -i\alpha\lambda\tilde{u}_1 + (\lambda + 2\mu)\tilde{u}'_2 \quad (49)$$

Подставляем (45) в (49):

$$\tilde{\sigma}_{22} = -i\alpha\lambda(-i\alpha Ae^{\gamma_1 x_2} + \gamma_2 Be^{\gamma_2 x_2}) + (\lambda + 2\mu)(\gamma_1^2 Ae^{\gamma_1 x_2} + i\alpha\gamma_2 Be^{\gamma_2 x_2}) \quad (50)$$

Рассмотрим

$$-\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\gamma_1^2 = -\alpha^2\lambda + (\lambda + 2\mu)\left(\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}\right) = \mu(2\alpha^2 - k_2^2)$$

Формула (50) принимает вид:

$$\tilde{\sigma}_{22} = \mu[(2\alpha^2 - k_2^2) Ae^{\gamma_1 x_2} + 2i\alpha Be^{\gamma_2 x_2}] \quad (51)$$

Подставляем (48) и (51) в граничные условия (40):

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{12}|_{x_2=0} = \mu[-2i\alpha\gamma_1 A + (2\alpha^2 - k_2^2) B] = 0, \\ \tilde{\sigma}_{22}|_{x_2=0} = \mu[(2\alpha^2 - k_2^2) A + 2i\alpha B] = \tilde{p}(\alpha), \end{cases} \quad (52)$$

где

$$\tilde{p}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1.$$

Решаем систему (52):

$$\begin{cases} A = -\frac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu} \frac{2\alpha^2 - k_2^2}{\Delta(\alpha)}, \\ B = -\frac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu} \frac{2i\alpha\gamma_1}{\Delta(\alpha)} \end{cases} \quad (53)$$

$$\Delta(\alpha) = 4\alpha^2\gamma_1\gamma_2 - (2\alpha^2 - k_2^2)^2$$

Трансформанты перемещений теперь имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = -\frac{i\alpha\tilde{p}(\alpha)}{\mu\Delta(\alpha)} [(2\alpha^2 - k_2^2) e^{\gamma_1 x_2} + 2\gamma_1\gamma_2 e^{\gamma_2 x_2}], \\ \tilde{u}_2 = -\frac{\gamma_1\tilde{p}(\alpha)}{\mu\Delta(\alpha)} [(2\alpha^2 - k_2^2) e^{\gamma_1 x_2} + 2\alpha^2 e^{\gamma_2 x_2}], \end{cases} \quad (54)$$

Для того, чтобы решить задачу, достаточно найти обратную трансформанту Фурье:

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{i}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\tilde{p}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} [(2\alpha^2 - k_2^2) e^{\gamma_1 x_2} + 2\gamma_1\gamma_2 e^{\gamma_2 x_2}] e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \\ \tilde{u}_2 = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1\tilde{p}(\alpha)}{\mu\Delta(\alpha)} [(2\alpha^2 - k_2^2) e^{\gamma_1 x_2} + 2\alpha^2 e^{\gamma_2 x_2}] e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \end{cases} \quad (55)$$

Рассмотрим знаменатель подынтегральных выражений в (55). Он совпадает с левой частью уравнения Релея и следовательно, имеет вещественный корень со значением

$$\alpha = k_R = \frac{\omega}{c_R},$$

где c_R — скорость волн Релея. $\alpha = k_R$ является однократным полюсом подынтегрального выражения. Другими особенностями подынтегрального выражения являются точки ветвления $\alpha = k_1$ и $\alpha = k_2$.

Из-за наличия в подынтегральном выражении полюса первого порядка интеграл в классическом смысле расходится и показано, что главное значение интеграла даёт нефизичный результат.

При добавлении в уравнение слагаемых, характеризующих вязкое трение, особенности смещаются (рисунок 5).

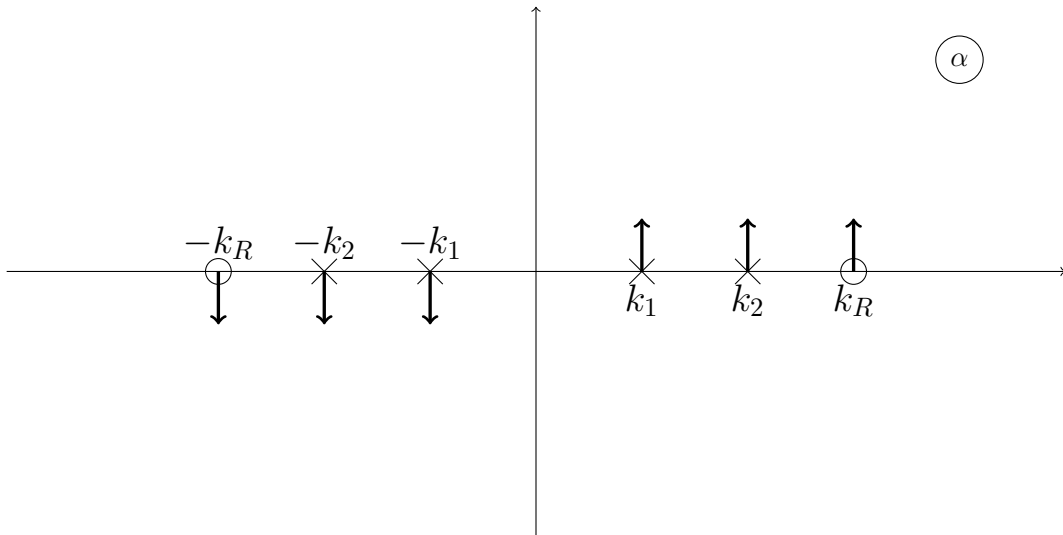


Рис. 5: Особенности подынтегральной функции

Следовательно, чтобы обеспечить равномерный предельный переход, следует интегрирование по вещественной оси заменить интегрированием по контуру σ , который совпадает с вещественной осью всюду, за исключением окрестностей особых точек, которые он огибает, отклоняясь в комплексную плоскость. при этом положительные вещественные особенности обходятся снизу, отрицательные — сверху.

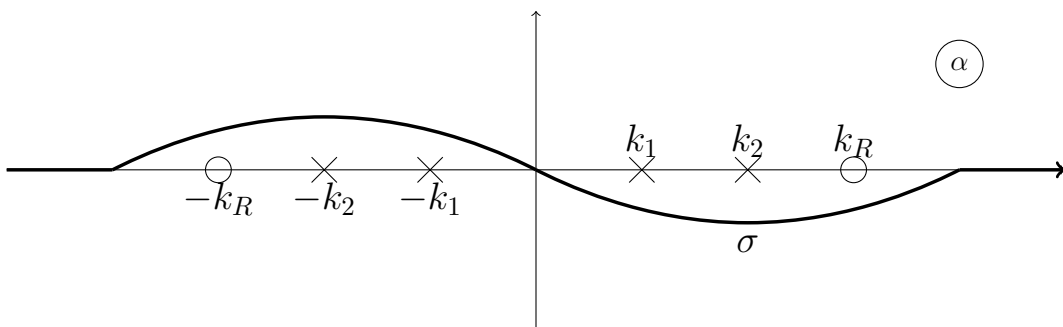


Рис. 6: Контур интегрирования

При расчёте волновых полей выделяют два случая.

3.2.1 Ближняя зона

В этом случае можно рассчитывать волновое поле непосредственно по формулам (55).

Разделим контур интегрирования на две части

$$\sigma = \sigma_+ \cup \sigma_-,$$

где

$$\sigma_+ = \sigma \cap \{\Re \alpha \geq 0\},$$

$$\sigma_- = \sigma \cap \{\Re \alpha \leq 0\},$$

Преобразуем интеграл:

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} F_i(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\sigma_-} + \int_{\sigma_+} \right] F_i(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

Заменяем переменные в интеграле по σ_- :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_-} F_i(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = \|\alpha = -\alpha'\| = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_+} F_i(-\alpha', x_2) e^{i\alpha' x_1} d\alpha'$$

Выражение для перемещения принимает вид:

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_+} [F_i(\alpha, x_2) e^{-i\alpha x_1} - F_i(-\alpha, x_2) e^{i\alpha x_1}] d\alpha$$

Контур интегрирования строим в следующем виде:

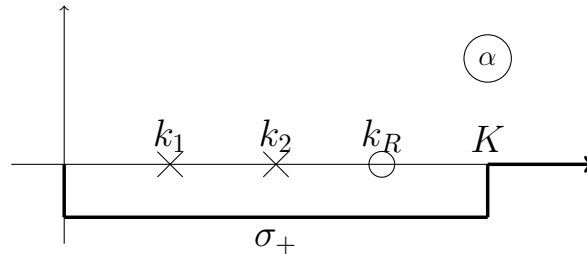


Рис. 7: Контур интегрирования, $K > k_R$

Контур σ_+ заменяется контуром $\sigma_K \cup [K, R]$, где σ_K — ломаная, состоящая из

трёх отрезков, R — выбирается из погрешности, для интегрирования используются квадратурные формулы Гаусса.

3.2.2 Дальняя зона

На большом расстоянии от источника возмущений подынтегральное выражение начинает быстро осциллировать и квадратурные формулы интегрирования делаются неэффективными. Пусть $x_1 < 0$.

Проводим разрезы в комплексной плоскости и замыкаем контур интегрирования по окружности радиуса R , обходя разрезы.

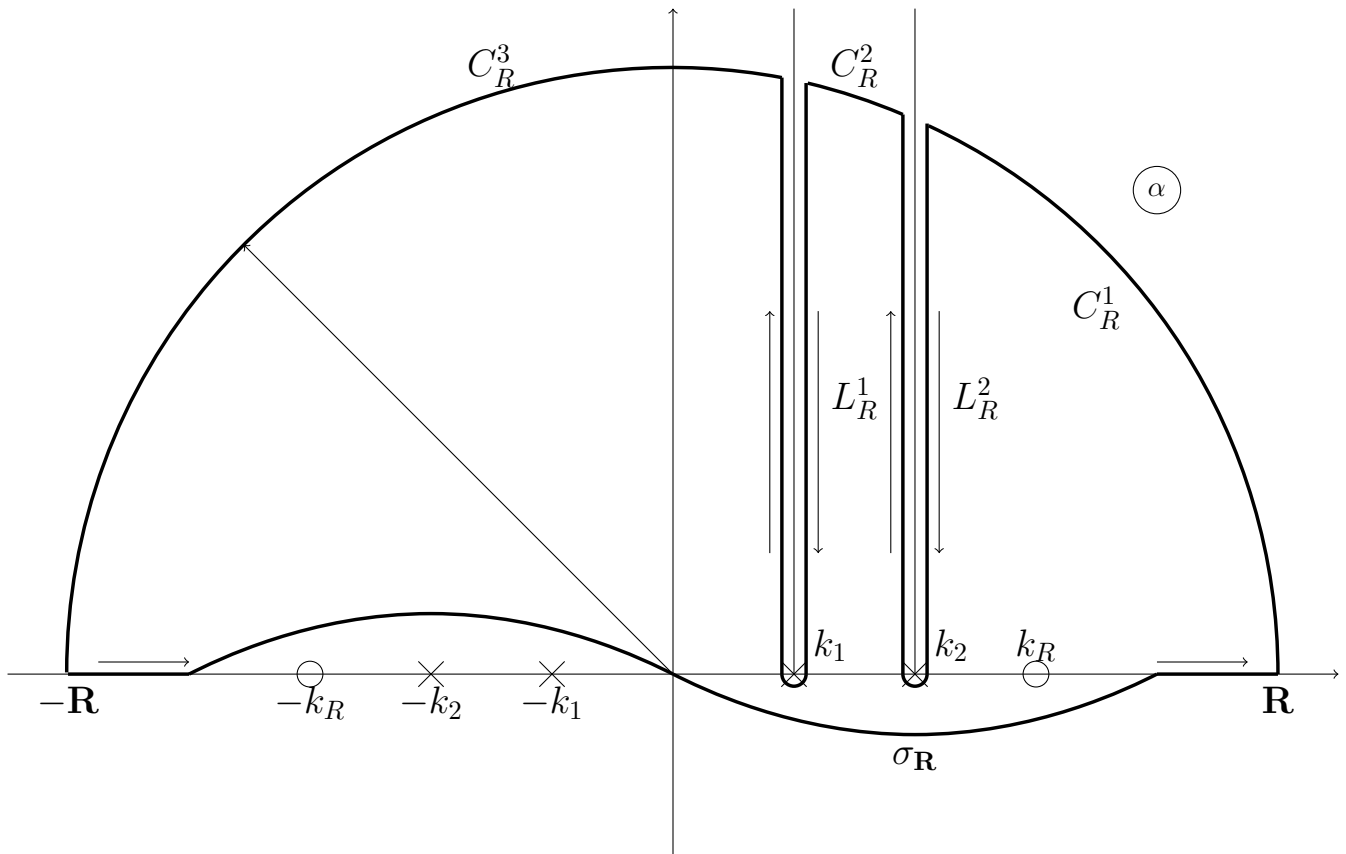


Рис. 8: Контур интегрирования

Используя теорию вычетов, получаем:

$$\left[\int_{\sigma_R} + \int_{C_R^1} + \int_{L_R^1} + \int_{C_R^2} + \int_{L_R^2} + \int_{C_R^3} \right] F(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = 2\pi i \operatorname{res}_{\alpha=k_R} F(\alpha) e^{-i\alpha x_1}$$

Устремляем радиус окружности к бесконечности, интегралы по дугам окружности стремятся к нулю и получаем:

$$\int_{\sigma} F(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = 2\pi i \operatorname{res}_{\alpha=k_R} F(\alpha) e^{-ik_R x_1} - \int_{L^1} F(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha - \int_{L^2} F(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha$$

Первое слагаемое в правой части равенства — бегущая волна со скоростью волн Релея. Интегралы по L^1 и L^2 — берутся численно, подынтегральные выражения экспоненциально убывают, удобно деформировать контуры интегрирования так, чтобы они проходили вдоль координатных осей.

3.2.3 Асимптотика интегралов

Рассмотрим интеграл вида

$$I(R) = \int_L \Phi(\zeta) e^{Rq(\zeta)} d\zeta \quad (56)$$

Существуют две асимптотики:

1. Контур L охватывает точку ветвления ζ^* функции $\Phi(\zeta)$, которая является точкой ветвления и для $q(\zeta)$

$$I(R) = \pm \sqrt{\frac{2\pi}{R|q''(\zeta_0)|}} \Phi(\zeta_0) \exp \left\{ Rq(\zeta_0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} [\Im q''(\zeta_0)] \right\},$$

где ζ_0 — стационарная точка функции $q(\zeta)$, то есть $q'(\zeta_0) = 0$. Знак \pm соответствует направлению обхода контура, в нашем случае выбираем знак «минус».

2. Контур L охватывает точку ветвления ζ^* функции $\Phi(\zeta)$, функция для $q(\zeta)$ — аналитическая в точке ζ^*

$$I(R) = \pm \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{R^3 |q'(\zeta^*)|^3}} \left[(\zeta - \zeta^*)^{1/2} \Phi(\zeta) \right] \Big|_{\zeta=\zeta^*} \exp \left\{ Rq(\zeta^*) - \frac{i\zeta}{2} \arg [-q'(\zeta^*)] \right\}$$

Каждое из выражений для u_1 содержит два слагаемых, для одного из них имеет место асимптотика по первому случаю, для другого — по второму. Найдём стационарную точку. Рассмотрим выражение

$$\exp(-i\alpha x_1 + \gamma_i x_2) = \exp[Rq(\alpha)],$$

где

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad q(\alpha) = -i\alpha \cos \theta + \gamma_i \sin \theta$$

$$\begin{cases} x_1 = R \cos \theta, \\ x_2 = R \sin \theta, \end{cases}$$

Приравняем нулю производную q :

$$q'(\alpha) = -i \cos \theta + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k_i^2}} \sin \theta,$$

следовательно

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_i^2} \sin^2 \theta = -\cos^2 \theta,$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - k_i^2} \sin^2 \theta = -\cos^2 \theta,$$

и

$$\alpha_0 = \pm k_i \cos \theta = \pm \frac{k_i x_1}{R}$$

Если перейти к полярным координатам, мы приходим к выражениям:

$$\begin{cases} u_R = u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{R}} f_R(\theta) e^{ik_1 R} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \\ u_\theta = u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{R}} f_\theta(\theta) e^{ik_2 R} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \end{cases}$$

В дальней зоне происходит разделение движений, радиальные смещения распространяются со скоростью c_1 , окружные — со скоростью c_2 . f_R, f_θ — диаграммы направленности. Таким образом, волновое поле состоит из одной бегущей релеев-

ской волны и двух сферических волн, амплитуда которых убывает обратно пропорционально корню расстояния от источника возмущений, одна из них имеет скорость продольной волны, другая имеет скорость поперечной волны.