

Пример. Рассмотрим колебание массы m под действием случайной силы, например вызванной случайным ветром. V_0 .

Уравнение движения:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + p_0^2 y = \frac{1}{m} f(t), n > 0$$

где $f(t)$ — случайная сила, вызванная ветром. Сила $f(t)$ является случайной функцией, поведение которой в каждом опыте (в каждой реализации процессе) предсказать нельзя. Движение, соответствующее случайной силе, не может быть описано точными математическими соотношениями, поэтому для исследования данной системы полезно получить вероятностные характеристики m_y , $K_y(t_2, t_1)$, которые определяются через вероятностные характеристики силы $f(t)$ (ветра) $m_f(t)$ и $K_f(t_2, t_1)$. Стоит отметить, что вероятностные характеристики некоторых случайных процессов; неровности дороги, неровности аэродинамического покрытия, скорости ветра возле различных районов, в результате обработки большого числа экспериментальных данных получены.

Для решения нам необходимо иметь $m_f, K_f, m_{y_0}, m_{\dot{y}_0}, D_{y_0}, D_{\dot{y}_0}, K_{f\dot{y}_0}, K_{f\ddot{y}_0}, K_{y_0\dot{y}_0}$. Ограничимся случаем когда начальные данные и случайная сила являются независимыми, т.е. $K_{f\dot{y}_0} = K_{f\ddot{y}_0} = K_{y_0\dot{y}_0} = 0$.

Из уравнения движения и общей формулы имеем представление оператора

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2nd}{dt} + p_0^2$$

$$L(i\omega) = -\omega^2 + 2ni\omega + p_0^2; S_y(\omega) = \frac{S_f(\omega)}{[(\omega^2 - p_0^2)^2 + 4n^2\omega^2]}$$

$$|L(i\omega)|^2 = (\omega^2 - p_0^2)^2 + 4n^2\omega^2 = (-\omega^2 + p_0^2 + 2ni\omega)(-\omega^2 + p_0^2 - 2ni\omega)$$

$$K_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega)}{|L(i\omega)|^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{S_f(\omega)}{[(\omega^2 - p_0^2)^2 + 4n^2\omega^2]} d\omega$$

$$D_y = K_z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega)}{[(\omega^2 - p_0^2)^2 + 4n^2\omega^2]} d\omega$$

Например, пусть $S_f(\omega) = \text{const} = S_0 \Rightarrow$ интеграл в полученном выражении можно вычислить теорией вычетов $L(i\omega) = 0 \Rightarrow \omega^2 - 2ni\omega - p_0^2 = 0$
 $\omega_{1,2} = ni \pm \sqrt{p_0^2 - n^2}$

$$D_y = 2\pi i S_0 \sum_{\omega_{1,2}} \text{Re } s = 2\pi i S_0 \left[\frac{1}{4\omega(\omega^2 - p_0^2) + 8n^2\omega} \right] \Big|_{\omega_1, \omega_2} =$$

$$= 2\pi i S_0 \left[\frac{1}{4\omega_1(\omega_1^2 - p_0^2) + 8n^2\omega_1} + \frac{1}{4\omega_2(\omega_2^2 - p_0^2) + 8n^2\omega_2} \right] \Big| = \frac{\pi S}{2np_0^2}$$

$$D_y = \frac{\pi S}{2np_0^2}$$

Определение

Говорят, что стационарный случайный процесс условию эргодичности по математическому ожиданию, если

$$M[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

Введем новую функцию $J_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$;

$$M[J_T] = \frac{1}{T} \int_0^T M[X(t)] dt = M[X(t)]$$

$$\begin{aligned} D[J_T] &= K_y(0)_{t_1=t_2=T} = M[(J_T(t_1) - M[X(t_1)])(J_T(t_2) - M[X(t_2)])] = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Условие помогает получить определенные ограничения на корреляционную функцию $K_x(\tau)$.

Theorem

Для любой случайной функции $X(t)$ непрерывной в интервале (a, b) , справедливо разложение

$$X(t) = \bar{x}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} V_j \frac{\phi_j(t)}{\sqrt{\lambda_j}} \quad (1)$$

где $V_j : M(V_j) = 0$, $M(V_j^* V_l) = \delta_{jl}$, $D[V_j] = 1$, λ_j — собственные числа, ϕ_j — собственные функции интегрального уравнения

$$\phi(t) = \lambda \int_a^b K_x(t, \tau) \phi(\tau) d\tau.$$

т.е. это такие числа λ_j , при которых могут быть найдены функции $\phi(t)$, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$\phi(t) = \lambda \int_a^b K_x(t, \tau) \phi(\tau) d\tau$$

Преимущество канонического разложения в том, что вероятностные характеристики заданной случайной функции вычисляются сравнительно просто. Определим корреляционную функцию K_x , учитывая $M[\phi_j \phi_l] = \delta_{jl}$

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M[(X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1))(X(t_2) - \bar{x}(t_2))] = \\ &= M \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} V_j^* \phi_j^*(t_1) V_l \phi_l(t_2) \frac{1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_l}} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \phi_j^*(t_1) \phi_j(t_2) \end{aligned}$$

Обобщением канонического разложения (1) является представление случайной функции в виде интеграла

$$X(t) = \bar{x}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \omega) d(\omega) \quad (2)$$

где $x(t, \omega)$ — неслучайная функция; $d(\omega)$ удовлетворяет тем же условиям, что и соответствующее приращение в теории стационарных случайных процессов:

$$M[d(\omega)] = 0$$

$$M[d^*(\omega)d(\omega_1)] = S_x(\omega)\delta(\omega - \omega_1)d\omega d\omega_1$$

(Для стационарных случайных процессов $X(t, \omega) = e^{it\omega}$.)

Однако, такое разложение (2) применимо не для любых случайных процессов.

Покажем, что разложение типа (1) может быть получено сравнительно просто (причем не единственным способом):

- Выберем систему неслучайных функций $\phi_j(t)$ (произвольную систему);
- Заменим случайную функцию $X(t)$ линейной комбинацией вида

$$X(t) \approx \sum_{j=1}^n A_j \phi_j(t) + \bar{x}(t),$$

где коэффициенты A_j такие, что наилучшим образом приближают (аппроксимируют) $X(t)$. Например,

$$M \left[\left(X(t) - \left(\sum_{j=1}^n A_j \phi_j(t) + \bar{x}(t) \right) \right)^2 \right] \rightarrow \min_{A_j}$$

- Такое разложение еще не является каноническим, так как A_j не являются некоррелированными случайными величинами (A_j определяет $K_x(t_1, t_2)$), для этого найдем

$$A_j = \sum_{l=1}^n \alpha_{jl} V_l,$$

где V_j — случайная величина, α_{jl} — коэффициенты.

И можно распорядиться коэффициентами α_{jl} так, чтобы V_l были взаимно некоррелированными.