Марковские процессы

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

2025-04-8

Определение

Случайный процесс называется марковским, если плотности распределения вероятностей в момент времени t_k могут быть выражены через плотности распределения в момент времени t_{k-1}.

Пример: Броуновское движение.

Впервые такие процессы для дискретных значений моментов времени были рассмотрены Марковым (1856-1922). Они называются цепями Маркова. Возвращаемся к марковским процессам. Определение можно расписать также:

$t_1, t_2, ..., t_k : t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_{k-1} < t_k$

$f\left(x_k | x_1, ..., x_{k-1}\right) = f\left(x_k | x_{k-1}\right)$ — плотность распределения ординаты x_k зависит только от значения этой ординаты в момент времени x_{k-1}. Здесь $x_1, x_2, ..., x_k$ — значения ординат случайного процесса в момент $t_1, t_2, ..., t_k$.

То есть закон распределения марковского процесса в «будущий момент времени» t_k зависит только от значения ординат этого процесса в «настоящий момент времени» и не зависит от поведения его в прошлом. Покажем, что для марковских процессов любые многомерные законы распределения могут быть выражены через двумерные законы распределения. Вспоминаем из курса теории вероятностей:

$$f\left(x|y\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f\left(y\right)} \tag{1}$$

— условная плотность вероятности (плотность вероятности x от y, если y задан)

$$f\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dx \tag{2}$$

$P\left(A|B\right)$ — условная вероятность (вероятность события A при условии, что имеет место событие B).

1) Рассмотрим для примера трехмерную плотность вероятности $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$ (плотность вероятности трёх ординат случайного процесса $u(t)$). Из (1) имеем

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = f\left(x_3 | x_1, x_2\right) f\left(x_1, x_2\right)$$

Согласно основному свойству марковских процессов

$$f\left(x_3 | x_1, x_2\right) = f\left(x_3 | x_2\right)$$

а в свою очередь

$$f\left(x_1, x_2\right) = f\left(x_2 | x_1\right) f\left(x_1\right) \Rightarrow f\left(x_1, x_2, x_3\right) = f\left(x_3 | x_2\right) f\left(x_2 | x_1\right) f\left(x_1\right)$$

2) Аналогично для n-мерной плотности вероятности

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = f\left(x_n | x_{n-1}\right) f\left(x_{n-1} | x_{n-2}\right) ...f\left(x_2 | x_1\right) f\left(x_1\right)$$

(для полной характеристики марковских процессов), т.е. плотность вероятности ординат марковского процесса $u\left(t\right)$ любого порядка может быть выражена через условные двумерные плотности вероятности типа $f\left(x_k | x_{k-1}\right)$ и плотность вероятности $f\left(x_1\right)$ первой ординаты.

Однако и

$$f\left(x_k|x_{k-1}\right)=\frac{f\left(x_{k-1}|x_k\right)}{f\left(x_k\right)},$$

$$f\left(x_1\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x_1,x_2\right)dx_2,\quad f\left(x_{k-1}\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x_k,x_{k-1}\right)dx_k$$

т.е. выражаются через двумерные плотности распределения.
Т.е. задавая произвольные t и τ $(t\leq\tau)$, мы однозначно определяем все законы распределения.
$f\left(x,y\right)$ — двумерный закон распределения, здесь $x=u\left(t\right)$, $y=u\left(\tau\right)$.
Введем для дальнейших выкладок функцию 4-х переменных
$f\left(t,x;\tau,y\right)$ — условная плотность распределения вероятности $(t\leq\tau)$.

Свойства:

1) $f(t,x;\tau,y) \geq 0$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t,x;\tau,y)\,dy = 1$

3) При $t = \tau$ $x = u(t) {=} y = u(\tau = t)$ исчезает разница между x и y $(x = y) \Rightarrow$ условная плотность вероятности $f(t,x;\tau,y) = 0$ при $x \neq y$, но т.к. должно выполнять свойство (2), это возможно только, когда $x = y$ и $f(t,x;\tau,y)\,|_{t=\tau} = \delta(x-y)$, т.е.

$$f(t,x;\tau,y)\,|_{t=\tau} = \begin{cases} 0, x \neq y \\ \delta(x-y), x = y \end{cases}$$

4) $f(x,y) = f(t,x;\tau,y)\,f(x)$, где $f(t,x;\tau,y) = f(x|y)$

$$f(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t,x;\tau,y)\,f(x)}_{f(x,y)}\,dx$$

Эти свойства справедливы для любых случайных процессов. Выведем свойства справедливые только для марковских процессов.

Уравнения Маркова

Рассмотри промежуток времени (t, τ) $(t < \tau)$ и $t' \in (t, \tau)$. Этому моменту соответствует ордината случайного процесса $z = u\,(t')$ $(x = u\,(t))$.
Определим вероятность того, что если случайная функция в момент времени t имела ординату x, то в момент времени τ она будет принадлежать интервалу $(y, y + dy)$, если в момент времени t' ордината находилась в интервале $(z, z + dz)$.
Рассматриваемое событие является произведением (совместной реализацией) двух событий:
1) Получение случайной величины (указанного значения) $Z \in (z, z + dz)$ в момент времени t' при условии, что в момент времени t ордината процесса равнялась x. Вероятность этого события $f\,(t, x; t', z)\,dz$ $(t \to t')$.
2) Получение случайной величины $Y \in (y, y + dy)$ при условии, что в момент времени t' ордината процесса находилась в интервале $(z, z + dz)$.
Вероятность этого события $f\,(t', z; \tau, y)\,dy$ $(t' \to \tau)$.

Т.к. для марковских процессов события (1) и (2) независимые (τ не зависит от t) $\Rightarrow$ для любых независимых x и y $f(x,y) = f(x) f(y) \Rightarrow$ вероятность перехода из (1) состояния в (2)

$$f(t, x; \tau, y)\, dy = f\left(t', z; \tau, y\right) f\left(t, x; t', z\right) dz dy$$

Интегрируем по z, сокращаем на dy и получаем обобщенное уравнение Маркова:

$$f(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t, x; t', z\right) f\left(t', z; \tau, y\right) dz$$

Уравнение Колмогорова

Основное упрощение при исследовании Марковских процессов состоит в том, что условная плотность вероятности $f\left(t, x; \tau, y\right)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (уравнения Колмогорова I и II), что облегчает определение этой функции.
Предположим, что $t' = t + \Delta \ (\Delta \geq 0)$.

$$f\left(t, x; \tau, y\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t, x; t + \Delta, z\right) f\left(t + \Delta, z; \tau, y\right) dz \tag{3}$$

Разложим подинтегральную функцию $f\left(t+\Delta, z; \tau, y\right)$ в ряд Тейлора по переменной z около точки $z = x$ (т.е. при $z \to x$).

$$
\begin{aligned}
f\left(t+\Delta, z; \tau, y\right) = f\left(t+\Delta, x; \tau, y\right) + \frac{\partial f\left(t+\Delta, x; \tau, y\right)}{\partial x}\left(z-x\right) + \\
+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f\left(t+\Delta, x; \tau, y\right)}{\partial x^2}\left(z-x\right)^2 + \\
+ \underbrace{\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f\left(t+\Delta, x+\theta\left(z-x\right); \tau, y\right)}{\partial x^3}\left(z-x\right)^3}_{O(t-x)^3}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$\left(|\theta| \le 1\right)$ остаточный член в явном виде

Подставляем (4) в (3)

$$f\left(t,x;\tau,y\right)=f\left(t+\Delta,x;\tau,y\right)\overbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz}^{1}+$$

$$+\frac{\partial f\left(t+\Delta,x;\tau,y\right)}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z-x\right)f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f\left(t+\Delta,x;\tau,y\right)}{\partial x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z-x\right)^2 f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz+$$

$$+\frac{1}{3!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3 f\left(t+\Delta,x+\theta\left(z-x\right);\tau,y\right)}{\partial x^3}\left(z-x\right)^3 f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz$$

Учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz=1$, деля на Δ, получим:

$$\frac{f\left(t,x;\tau,y\right)-f\left(t+\Delta,x;\tau,y\right)}{\Delta}=$$

$$=\left[\frac{1}{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z-x\right)f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz\right]\frac{\partial f\left(t+\Delta,x;\tau,y\right)}{\partial x}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z-x\right)^2 f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz\right]\frac{\partial^2 f\left(t+\Delta,x;\tau,y\right)}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{1}{3!}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^3 f\left(t+\Delta,x+\theta\left(z-x\right);\tau,y\right)}{\partial x^3}\left(z-x\right)^3 f\left(t,x;t+\Delta,z\right)dz$$

Переходя к пределу $\Delta \to 0$, обозначая

$$a(t,x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (z-x) f(t,x;t+\Delta,z) dz$$

$$b(t,x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (z-x)^2 f(t,x;t+\Delta,z) dz$$

И предполагая, что

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 f(t+\Delta, x+\theta(z-x); \tau, y)}{\partial x^3} (z-x)^3 f(t,x;t+\Delta,z) dz = 0$$

получим

I уравнение Колмогорова

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = a\left(t, x\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b\left(t, x\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

т.е. $f\left(t, x; \tau, y\right)$ — функция от t и x.
II уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\left[a\left(\tau, y\right)f\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b\left(\tau, y\right)f\right] = 0$$

т.е. $f\left(t, x; \tau, y\right)$ — функция от τ и y.
Первое уравнение Колмогорова дает возможность определить условную плотность вероятности $f\left(t, x; \tau, y\right)$, как функцию будущего состояния; так как независимыми являются переменные t и x — прошлое состояние и прошлое время.

Итак, получены I и II уравнения Колмогорова. Они представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных и принадлежат к типу параболических уравнений.
Для определения единственного решения необходимо наложить начальные и граничные условия.
Рассмотрим, например, II уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\left[a\left(\tau, y\right) f\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b\left(\tau, y\right) f\right] = 0$$

f — функция от τ и y $\Rightarrow$
Начальные условия. За начальное значение τ можно принять значение t. Т.е. при $\tau = t$. При этом
а) если начальное значение ординаты xсчитается заданным $\Rightarrow$ начальное условие

$$f\left(t, x; \tau, y\right)\left.\right|_{\tau=t} = \delta\left(x - y\right)$$

(Оно же является начальным условием и для I-ого уравнения.)

б) в некоторых задачах начальная ордината не задана, и рассматривается как случайная величина, у которой задана плотность вероятности $f_0\left(x\right) \Rightarrow$
начальное условие

$$f\left(t,x;\tau,y\right)|_{\tau=t} = \underset{\text{задана}}{f_0\left(x\right)}$$

Граничные условия Условная плотность вероятности f должна удовлетворять условиям обращения в ноль на границах области изменения случайного процесса. Например, если $y \in (-\infty;\infty)$

$$\Rightarrow f\left(t,x;\tau,y\right) \to 0 \text{ при } |y| \to \infty$$

Кроме начальных и граничных условий плотность вероятности должна удовлетворять требованиям справедливым для любой плотности вероятности, т.е.

$$f \geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t,x;\tau,y\right)dy = 1$$