1 Колебания ограниченных упругих тел

1.1 Радиальные колебания шара

Рассмотрим упругий шар в сферической системе координат r, φ, θ. Считаем, что из всех компонент вектора перемещений отлична от нуля только u_θ и она зависит только от радиальной координаты. Считаем, что шар находится в состоянии установившихся колебаний

$$\begin{cases} u_\varphi = u_\theta = 0, \\ u_r = u(r)e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Уравнения Ляме сводятся к равенству

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 u\right)\right] + \frac{\omega^2}{c_1^2}u = 0, \tag{1}$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$u\big|_{r=R} = Ce^{-i\omega t} \tag{2}$$

Сделаем замену переменной:

$$x = \frac{\omega r}{c_1},$$

следовательно

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{\omega r}{c_1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2 u\right)\right] + u = 0, \tag{3}$$

Сделаем замену

$$u = \frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{x}\right] \tag{4}$$

Подставим (4) в уравнение (3):

$$u = \frac{F'}{x} - \frac{F}{x^2},$$

$$x^2 u = xF' - F,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 u\right) = F' + xF'' - F' = xF''$$

Уравнение (4) сводится к виду:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F''}{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{F}{x}\right) = 0 \tag{5}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F'' + F}{x}\right) = 0 \tag{6}$$

Интегрируем:

$$F'' + F = C_1 c, \tag{7}$$

где C_1 — неопределённая константа. Общее решение (7) имеет вид:

$$F = C_1 x + A\cos x + B\sin x$$

Найдём функцию перемещения:

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1 x + A\cos x + B\sin x}{x}\right) = -\frac{A\sin x - B\cos x}{x} - \frac{A\cos x + B\sin x}{x^2} \tag{8}$$

Потребуем ограниченности решения при $x \to 0$. Перегруппируем слагаемые в (8) и соберём множители при A и B:

$$u = -A\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} + B\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \tag{9}$$

Рассмотрим множители при A и B при $x \to 0$:

$$\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} = \frac{x\left(x - \frac{x^3}{6} + ...\right) + 1 - \frac{x^2}{2} + ...}{x^2} \approx \frac{1}{x^2} \to +\infty,$$

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + ...\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x^2} \approx -\frac{x}{3} \to 0$$

Множитель при A стремится к бесконечности и следовательно, $A = 0$. Решение имеет вид:

$$u = B\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \tag{10}$$

Перейдём к переменной r:

$$u = B\left(\frac{c_1}{\omega r}\right)^2 \left[\frac{\omega r}{c_1}\cos\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega r}{c_1}\right)\right] \tag{11}$$

Подставим (11) в граничное условие (2):

$$B\left(\frac{c_1}{\omega R}\right)^2 \left[\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)\right] = C \tag{12}$$

Следовательно

$$B = C\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)^2 \left[\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)\right]^{-1}$$

и

$$u = C\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{\frac{\omega r}{c_1}\cos\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega r}{c_1}\right)}{\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)} \tag{13}$$

Рассмотрим знаменатель выражения (13):

$$\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) = 0 \tag{14}$$

Равенство (14) является частотным уравнением для радиальных колебаний

шара, заключённого в жёсткую обойму. Введём новую переменную:

$$\gamma = \frac{\omega R}{c_1}$$

Уравнения (14) принимает вид:

$$\gamma \cos \gamma - \sin \gamma = 0 \tag{15}$$

или

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{\gamma} \tag{16}$$

Корни уравнения (16) имеют асимптотику

$$\gamma_n \approx \frac{2n+1}{2}\pi,\ n \to \infty$$

Уточним асимптотику. Ищем корни в виде:

$$\gamma_n = \gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)},\ \gamma_n^{(1)} << \gamma_n^{(0)} \tag{17}$$

где

$$\gamma_n^{(0)} = \frac{2n+1}{2}\pi.‘$$

Подставим (17) в (16):

$$\operatorname{ctg}\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right) = \frac{1}{\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}} \tag{18}$$

или

$$\frac{\cos\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right)}{\sin\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right)} = \frac{1}{\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}} \tag{19}$$

Следовательно

$$\frac{\cos\gamma_n^{(0)}\cos\gamma_n^{(1)} - \sin\gamma_n^{(0)}\sin\gamma_n^{(1)}}{\sin\gamma_n^{(0)}\cos\gamma_n^{(1)} + \cos\gamma_n^{(0)}\sin\gamma_n^{(1)}} = \frac{1}{\gamma_n^{(0)}}\frac{1}{1+\gamma_n^{(1)}/\gamma_n^{(0)}} \tag{20}$$

Преобразуем выражение (20):

$$\cos\gamma_n^{(0)} = 0,$$

$$\sin\gamma_n^{(0)} = (-1)^n,$$

$$\sin\gamma_n^{(1)} \approx \gamma_n^{(1)},$$

$$\cos\gamma_n^{(1)} \approx 1.$$

$$\frac{1}{1+\gamma_n^{(1)}/\gamma_n^{(0)}} \approx 1$$

Следовательно

$$\gamma_n^{(1)} = -\frac{1}{\gamma_n^{(0)}}$$

и

$$\gamma_n = \frac{2n+1}{2}\pi - \frac{2}{(2n+1)\pi} + O(n^{-3})$$

Зная γ_n, можно найти собственные частоты

$$\omega_n = \frac{\gamma_n c_1}{R}$$

Если $\omega = \omega_n$, неоднородная задача неразрешима, однородная — имеет нетривиальное решение (собственная форма колебаний).

Для того, чтобы построить решение, когда частота колебаний совпадает с собственной, используется преобразование Лапласа.

1.2 Свойства собственных частот

Рассмотрим упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью S. Уравнения колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{21}$$

σ_{ij} — напряжения, ρ — плотность, ω — частота колебаний, $\underline{u}$ — вектор перемещений.

Граничные условия имеют вид:

$$S = S_u \cup S_\sigma,\ u_i|_{S_u} = 0,\ \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0$$

Собственная частота — это значение ω, на которой однородное уравнение колебаний (22) имеет нетривиальное решение при однородных граничных условиях. Набор собственных частот называется спектром. Спектр — дискретное счётное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности.

Теорема Собственные частоты ортогональны.

Пусть ω_n, ω_m — собственные частоты, $u_i^{(n)}$, $u_i^{(m)}$ — собственные формы. Рассмотрим уравнения колебаний:

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + \rho\omega_n^2 u_i^{(n)} = 0,$$
$$\sigma_{ij,j}^{(m)} + \rho\omega_m^2 u_i^{(m)} = 0$$

Умножим первое уравнение на $u_i^{(n)}$, второе — на $u_i^{(m)}$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по объёму V.

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)}\right] dV + \left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right) \int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0$$

Докажем, что

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)}\right] dV = 0$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = \int\limits_V \left[\left(\sigma_{ij}^{(n)} u_i^{(m)} \right)_{,j} - \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} \right] dV$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = \int\limits_S \sigma_{ij}^{(n)} n_j u_i^{(m)} dS - \int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} dV$$

В силу однородных краевых условий

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = - \int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} dV$$

Следовательно

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)} \right] dV = \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} u_{i,j}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} \right] dV =$$
$$= \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV$$

Воспользуемся законом Гука:

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV = \int\limits_V \left[C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV$$

Рассмотрим

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} = C_{klij} \varepsilon_{ij}^{(m)} \varepsilon_{kl}^{(n)} = C_{klij} \varepsilon_{kl}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)}$$

Упругие константы имеют свойство

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

следовательно

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(m)}\varepsilon_{ij}^{(n)} - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(m)} = 0$$

и

$$\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right) \int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0$$

Собственные частоты различны

$$\omega_n \neq \omega_m,$$

следовательно

$$\int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0,$$

что и требовалось доказать.

Также можно доказать, что

$$\int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} dV = 0,$$

2 Методы исследований колебаний ограниченных тел

1. Метод конечных элементов;

2. Метод Ритца

   Рассмотрим задачу

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \tag{22}$$

Граничные условия однородные

$$
\begin{aligned}
&S = S_u \cup S_\sigma, \\
&u_i|_{S_u} = 0, \\
&\sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Ищем решение задачи в виде:

$$
\underline{u} = \sum_{k=1}^{N} a_k \underline{\varphi}^k, \tag{24}
$$

где $\underline{\varphi}^k$ — набор достаточно гладких линейно независимых функций, удовлетворяющих главным граничным условиям.

Подставляем в уравнение:

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \sigma_{ij,j} \left(\underline{\varphi}^k\right) + \rho\omega^2 \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_i^k = 0 \tag{25}
$$

Умножаем (26) на φ_i^l и интегрируем по объёму V

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \int\limits_V \sigma_{ij,j} \left(\underline{\varphi}^k\right) \varphi_i^l dV + \omega^2 \sum_{k=1}^{N} a_k \int\limits_V \rho \varphi_i^k \varphi_i^l dV = 0 \tag{26}
$$

Можно доказать, что

$$
\int\limits_V \sigma_{ij,j} \left(\underline{\varphi}^k\right) \varphi_i^l dV = -\int\limits_V \sigma_{ij} \left(\underline{\varphi}^k\right) \varepsilon_{ij}(\underline{\varphi}_i^l) dV
$$

Теперь соотношение (26) представляется в виде:

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\Pi_{kl} - \omega^2 T_{kl}\right) = 0, \tag{27}
$$

где

$$\Pi_{kl} = \int\limits_V \sigma_{ij}\left(\underline{\varphi}^k\right)\varepsilon_{ij}(\underline{\varphi}_i^l)dV,$$

$$T_{kl} = \int\limits_V \rho\varphi_i^k\varphi_i^l dV$$

Система (27) является однородной и имеет нетривиальное решение только, если её определитель равен нулю. Это приводит к равенству

$$\left|\Pi_{kl} - \omega^2 T_{kl}\right| = 0, \tag{28}$$

(28) — уравнение для приближенного определения собственных частот, используя которое, можно получить оценку собственных частот сверху.

Если в сумме (24) оставить только одно слагаемое, получаем

$$\omega^2 < \frac{\Pi_{11}}{T_{11}}, \tag{29}$$

— частное Релея.

3. Метод граничных интегральных уравнений

3 Фундаментальное решение

Определение Фундаментальным решением $U_i^{(m)}(x,\xi)$ называется смещение неограниченной упругой среды от действия сосредоточенной силы в направлении m-й координаты, приложенной в точке ξ и удовлетворяющая условиям излучения. Сингулярное решение $\sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)$ — напряжения, найденные по закону Гука из $U_i^{(m)}(x,\xi)$.

Рассмотрим фундаментальное решение для однородной изотропной упругой плоскости. Фундаментальное решение удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} (1-2\nu)^{-1}\left(U_{1,11}^{(m)}+U_{2,21}^{(m)}\right)+U_{1,11}^{(m)}+U_{1,22}^{(m)}+k_2^2U_1^{(m)}+\dfrac{\delta_{1m}}{G}\delta(x,\xi)=0, \\ (1-2\nu)^{-1}\left(U_{1,12}^{(m)}+U_{2,22}^{(m)}\right)+U_{2,11}^{(m)}+U_{2,22}^{(m)}+k_2^2U_2^{(m)}+\dfrac{\delta_{2m}}{G}\delta(x,\xi)=0, \end{cases} \tag{30}$$

(30) — неоднородные уравнения Ляме, ν — коэффициент Пуассона,

$$k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{G},$$

ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, G — модуль сдвига, δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta(x,\xi)$ — дельта-функция Дирака.

Для решения задачи используем преобразование Фурье:

$$\tilde{\tilde{U}}_i^{(m)}(\alpha,\xi)=\int\limits_{R^2}U_i^{(m)}(x,\xi)e^{i(\alpha,x)}dx_1dx_2,$$

где

$$(\alpha,x)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$$

После применения преобразования Фурье производная по x_j переходит в умно-

жение на $-i\alpha_j$. Получаем:

$$\begin{cases} \left[k_2^2 - \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} - \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} + \dfrac{\delta_{1m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} = 0, \\ -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \left[k_2^2 - \alpha_1^2 - \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} + \dfrac{\delta_{2m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} = 0 \end{cases} \tag{31}$$

или

$$\begin{cases} \left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\delta_{1m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)}, \\ \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \left[\alpha_1^2 + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\delta_{2m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} \end{cases} \tag{32}$$

В дальнейшем считаем $m = 1$. Решим систему (32):

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} = \left[\alpha_1^2 + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right]\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{G\Delta}, \\ \tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{G\Delta}, \end{cases} \tag{33}$$

где

$$\Delta = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2}$$

Раскроем скобки в последнем выражении:

$$\begin{aligned} \Delta = k_2^4 - k_2^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} + 1\right]\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \\ + \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^4 + \alpha_2^4\right) + \\ + \left\{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^2 + 1 - \frac{1}{(1-2\nu)^2}\right\}\alpha_1^2\alpha_2^2 \end{aligned}$$

Рассмотрим множитель при $\alpha_1^2\alpha_2^2$:

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^2 + 1 - \frac{1}{(1-2\nu)^2} = \frac{4-8\nu+4\nu^2+1-4\nu+4\nu^2-1}{(1-2\nu)^2}$$

Преобразуем числитель:

$$\frac{4-8\nu+4\nu^2-4\nu+4\nu^2}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-3\nu+2\nu^2)}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu}$$

Таким образом

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} =$$
$$= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^4 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4\right) = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2$$

и

$$\Delta = k_2^4 - k_2^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} + 1\right]\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2$$

Разлагаем определитель на множители:

$$\Delta = \left[k_2^2 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\right]\left[k_2^2 - \left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\right]$$

или

$$\Delta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k_2^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]$$

Рассмотрим выражение для продольной скорости:

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\rho\omega^2}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}k_2^2$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{G}{G(1-2\nu)^{-1}+G} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Следовательно

$$k_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k_2^2$$

и

$$\Delta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{1}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{A}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}+\frac{B}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right)$$

Найдём A и B:

$$A\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right)+B\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right)=1$$

Собираем множители при $\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^0$ и $\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^1$:

$$-Ak_2^2-Bk_1^2=1,$$
$$A+B=0$$

Следовательно

$$A=-B=\frac{1}{k_1^2-k_2^2}=\frac{1}{k_2^2}\left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}-1\right]^{-1}=-\frac{2(1-\nu)}{k_2^2}$$

и

$$\frac{1}{\Delta}=-\frac{1-2\nu}{k_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right) \tag{34}$$

Подставим (37) в (36) и найдём трансформанты перемещений:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} = -\dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2}\left[\alpha_1^2+\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2-k_2^2\right]\times \\ \qquad\qquad \times\left(\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right), \\ \tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\rho\omega^2}\left(\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right), \end{cases} \tag{35}$$

Обращаем преобразование Фурье, используя соответствие

$$\alpha_k = i\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Получаем:

$$\begin{cases} U_1^{(m)} = \dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_2^2\right]\times \\ \times\left[\dfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}d\alpha_1 d\alpha_2 - \dfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}d\alpha_1 d\alpha_2\right], \\ U_2^{(m)} = -\dfrac{1}{\rho\omega^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\times \\ \times\left[\dfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}d\alpha_1 d\alpha_2 - \dfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}d\alpha_1 d\alpha_2\right], \end{cases} \tag{36}$$

Вычислим интеграл:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_j^2}d\alpha_1 d\alpha_2$$

Произведём замену переменных:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha\cos\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha\sin\varphi, \end{cases}, \begin{cases} \xi_1 - x_1 = R\cos\psi, \\ \xi_2 - x_2 = R\sin\psi \end{cases},$$

Интеграл приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\alpha e^{i\alpha R\cos(\varphi-\psi)}}{\alpha^2-k_j^2}d\alpha d\varphi$$

Воспользуемся формулой:

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z)e^{in\theta},$$

$J_n(z)$ — функция Бесселя n-го порядка.

Получаем:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k_j^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha R) e^{in(\varphi - \psi)} \right] d\alpha d\varphi$$

Воспользуемся ортогональностью тригонометрических функций:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{in\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$$

Теперь

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha d\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha$$

Подынтегральное выражение содержит вещественный полюс $\alpha = k_j$ и интеграл I_j расходится. Воспользуемся принципом предельного поглощения. При добавлении в исходные уравнения колебаний слагаемых, характеризующих вязкое трение, особенность смещается в верхнюю комплексную полуплоскость. Следовательно, для того, чтобы обеспечить равномерный предельный переход, следует интеграл по положительной вещественной полуоси заменить интегралом по контуру σ_+, обходящему снизу вещественный полюс.

Теперь сделаем еще одну замену в интеграле. Воспользуемся следующим представлением функции Бесселя

$$J_0(z) = \frac{1}{2} \left[H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z) \right],$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $H_0^{(2)}(z)$ — функция

Ганкеля второго рода нулевого порядка. Выражения для них имеют вид:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z),$$
$$H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iN_0(z),$$

где $N_0(z)$ — функция Неймана. Для функций Ганкеля имеет место асимптотика

$$H_0^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)},\ z \to \infty$$
$$H_0^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)},\ z \to \infty$$

при $z \to \infty$. Интеграл I_j приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(1)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha + \int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(2)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha\right]$$

Воспользуемся формулой

$$H_m^{(2)}\left(e^{-i\pi} z\right) = -e^{-im\pi} H_m^{(1)}(z),$$

следовательно

$$H_0^{(2)}\left(e^{-i\pi} z\right) = -H_0^{(1)}(z),$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(2)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha = \|\alpha = e^{-i\pi}\alpha'\| = \int\limits_{\sigma_-} \frac{\alpha' H_0^{(1)}(\alpha' R)}{\alpha'^2 - k_j^2} d\alpha',$$

где σ_- — контур в левой полуплоскости, совпадающий с вещественной осью всюду, за исключением особой точки $\alpha = -k_j$, которую он обходит в верхней полуплоскости.

Интеграл приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(1)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha,$$

$$\sigma = \sigma_- \cup \sigma_+$$

Так как функция Ганкеля экспоненциально убывает в верхней полуплоскости, контур можно замкнуть в верхней полуплоскости и тогда интеграл равен вычету подынтегральной функции в точке $\alpha = k_j$.

$$I_j = \frac{1}{4\pi} 2\pi i \frac{k_j H_0^{(1)}(k_j R)}{2k_j} = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j R).$$

Выражения для фундаментального решения принимают вид:

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = \dfrac{i}{4} \dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_2^2 \right] \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right], \\ U_2^{(1)} = -\dfrac{i}{4} \dfrac{1}{\rho\omega^2} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right], \end{cases} \tag{37}$$

Выражения (37) можно привести к виду

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = \dfrac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,11} + \left[H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,22} \right\}, \\ U_2^{(1)} = -\dfrac{i}{4\rho\omega^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,12}, \end{cases} \tag{38}$$

Сингулярные напряжения имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(1)} = -\dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,122} + \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,1} \right\}, \\ \sigma_{12}^{(1)} = \dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,112} + \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,2} \right\}, \\ \sigma_{22}^{(1)} = \dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,122} - \dfrac{\nu}{1-\nu} \left[H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,1} \right\} \end{cases} \tag{39}$$

Аналогично можно построить решение в случае $m = 2$.