1 Колебания ограниченных упругих тел

1.1 Радиальные колебания шара

Рассмотрим упругий шар в сферической системе координат r, φ, θ. Считаем, что из всех компонент вектора перемещений отлична от нуля только u_θ и она зависит только от радиальной координаты. Считаем, что шар находится в состоянии установившихся колебаний

$$\begin{cases} u_\varphi = u_\theta = 0, \\ u_r = u(r)e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Уравнения Ляме сводятся к равенству

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 u\right)\right] + \frac{\omega^2}{c_1^2}u = 0, \tag{1}$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$u|_{r=R} = Ce^{-i\omega t} \tag{2}$$

Сделаем замену переменной:

$$x = \frac{\omega r}{c_1},$$

следовательно

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} = \frac{\omega r}{c_1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2 u\right)\right] + u = 0, \tag{3}$$

Сделаем замену

$$u = \frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{x}\right] \tag{4}$$

Подставим (4) в уравнение (3):

$$u = \frac{F'}{x} - \frac{F}{x^2},$$

$$x^2 u = xF' - F,$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 u\right) = F' + xF'' - F' = xF''$$

Уравнение (4) сводится к виду:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F''}{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{F}{x}\right) = 0 \tag{5}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{F'' + F}{x}\right) = 0 \tag{6}$$

Интегрируем:

$$F'' + F = C_1 c, \tag{7}$$

где C_1 — неопределённая константа. Общее решение (7) имеет вид:

$$F = C_1 x + A\cos x + B\sin x$$

Найдём функцию перемещения:

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{C_1 x + A\cos x + B\sin x}{x}\right) = -\frac{A\sin x - B\cos x}{x} - \frac{A\cos x + B\sin x}{x^2} \tag{8}$$

Потребуем ограниченности решения при $x \to 0$. Перегруппируем слагаемые в (8) и соберём множители при A и B:

$$u = -A\frac{x\sin x + \cos x}{x^2} + B\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \tag{9}$$

Рассмотрим множители при A и B при $x \to 0$:

$$\frac{x \sin x + \cos x}{x^2} = \frac{x\left(x - \frac{x^3}{6} + ...\right) + 1 - \frac{x^2}{2} + ...}{x^2} \approx \frac{1}{x^2} \to +\infty,$$

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + ...\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x^2} \approx -\frac{x}{3} \to 0$$

Множитель при A стремится к бесконечности и следовательно, $A = 0$. Решение имеет вид:

$$u = B\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \tag{10}$$

Перейдём к переменной r:

$$u = B\left(\frac{c_1}{\omega r}\right)^2 \left[\frac{\omega r}{c_1}\cos\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega r}{c_1}\right)\right] \tag{11}$$

Подставим (11) в граничное условие (2):

$$B\left(\frac{c_1}{\omega R}\right)^2 \left[\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)\right] = C \tag{12}$$

Следовательно

$$B = C\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)^2 \left[\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)\right]^{-1}$$

и

$$u = C\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{\frac{\omega r}{c_1}\cos\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega r}{c_1}\right)}{\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right)} \tag{13}$$

Рассмотрим знаменатель выражения (13):

$$\frac{\omega R}{c_1}\cos\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) - \sin\left(\frac{\omega R}{c_1}\right) = 0 \tag{14}$$

Равенство (14) является частотным уравнением для радиальных колебаний шара, заключённого в жёсткую обойму. Введём новую переменную:

$$\gamma = \frac{\omega R}{c_1}$$

Уравнения (14) принимает вид:

$$\gamma \cos \gamma - \sin \gamma = 0 \tag{15}$$

или

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{1}{\gamma} \tag{16}$$

Корни уравнения (16) имеют асимптотику

$$\gamma_n \approx \frac{2n+1}{2}\pi,\ n \to \infty$$

Уточним асимптотику. Ищем корни в виде:

$$\gamma_n = \gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)},\ \gamma_n^{(1)} << \gamma_n^{(0)} \tag{17}$$

где

$$\gamma_n^{(0)} = \frac{2n+1}{2}\pi.`$$

Подставим (17) в (16):

$$\operatorname{ctg}\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right) = \frac{1}{\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}} \tag{18}$$

или

$$\frac{\cos\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right)}{\sin\left(\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\right)} = \frac{1}{\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}} \tag{19}$$

Следовательно

$$\frac{\cos\gamma_n^{(0)}\cos\gamma_n^{(1)}-\sin\gamma_n^{(0)}\sin\gamma_n^{(1)}}{\sin\gamma_n^{(0)}\cos\gamma_n^{(1)}+\cos\gamma_n^{(0)}\sin\gamma_n^{(1)}}=\frac{1}{\gamma_n^{(0)}}\frac{1}{1+\gamma_n^{(1)}/\gamma_n^{(0)}} \tag{20}$$

Преобразуем выражение (20):

$$\cos\gamma_n^{(0)}=0,$$

$$\sin\gamma_n^{(0)}=(-1)^n,$$

$$\sin\gamma_n^{(1)}\approx\gamma_n^{(1)},$$

$$\cos\gamma_n^{(1)}\approx 1.$$

$$\frac{1}{1+\gamma_n^{(1)}/\gamma_n^{(0)}}\approx 1$$

Следовательно

$$\gamma_n^{(1)}=-\frac{1}{\gamma_n^{(0)}}$$

и

$$\gamma_n=\frac{2n+1}{2}\pi-\frac{2}{(2n+1)\pi}+O(n^{-3})$$

Зная γ_n, можно найти собственные частоты

$$\omega_n=\frac{\gamma_n c_1}{R}$$

Если $\omega=\omega_n$, неоднородная задача неразрешима, однородная — имеет нетривиальное решение (собственная форма колебаний).

Для того, чтобы построить решение, когда частота колебаний совпадает с собственной, используется преобразование Лапласа.

1.2 Свойства собственных частот

Рассмотрим упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью S. Уравнения колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{21}$$

σ_{ij} — напряжения, ρ — плотность, ω — частота колебаний, $\underline{u}$ — вектор перемещений.

Граничные условия имеют вид:

$$S = S_u \cup S_\sigma,\ u_i|_{S_u} = 0,\ \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0$$

Собственная частота — это значение ω, на которой однородное уравнение колебаний (22) имеет нетривиальное решение при однородных граничных условиях. Набор собственных частот называется спектром. Спектр — дискретное счётное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности.

Теорема Собственные частоты ортогональны.

Пусть ω_n, ω_m — собственные частоты, $u_i^{(n)}$, $u_i^{(m)}$ — собственные формы. Рассмотрим уравнения колебаний:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j}^{(n)} + \rho\omega_n^2 u_i^{(n)} = 0,\\ \sigma_{ij,j}^{(m)} + \rho\omega_m^2 u_i^{(m)} = 0\end{gathered}$$

Умножим первое уравнение на $u_i^{(n)}$, второе — на $u_i^{(m)}$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по объёму V.

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)}\right] dV + \left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right) \int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0$$

Докажем, что

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)}\right] dV = 0$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = \int\limits_V \left[\left(\sigma_{ij}^{(n)} u_i^{(m)} \right)_{,j} - \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} \right] dV$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = \int\limits_S \sigma_{ij}^{(n)} n_j u_i^{(m)} dS - \int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} dV$$

В силу однородных краевых условий

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} dV = - \int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} dV$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(n)} u_i^{(m)} - \sigma_{ij,j}^{(m)} u_i^{(n)} \right] dV = \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} u_{i,j}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(m)} \right] dV = \\ = \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV \end{aligned}$$

Воспользуемся законом Гука:

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - \sigma_{ij}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV = \int\limits_V \left[C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)} \right] dV$$

Рассмотрим

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(n)} = C_{klij} \varepsilon_{ij}^{(m)} \varepsilon_{kl}^{(n)} = C_{klij} \varepsilon_{kl}^{(n)} \varepsilon_{ij}^{(m)}$$

Упругие константы имеют свойство

$$C_{ijkl} = C_{klij},$$

следовательно

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(m)}\varepsilon_{ij}^{(n)} - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(m)} = 0$$

и

$$\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)\int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0$$

Собственные частоты различны

$$\omega_n \neq \omega_m,$$

следовательно

$$\int\limits_V \rho u_i^{(n)} u_i^{(m)} dV = 0,$$

что и требовалось доказать.

Также можно доказать, что

$$\int\limits_V \sigma_{ij}^{(n)}\varepsilon_{ij}^{(m)} dV = 0,$$

2 Методы исследований колебаний ограниченных тел

1. Метод конечных элементов;

2. Метод Ритца

   Рассмотрим задачу

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0 \tag{22}$$

Граничные условия однородные

$$
\begin{aligned}
&S = S_u \cup S_\sigma, \\
&u_i|_{S_u} = 0, \\
&\sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Ищем решение задачи в виде:

$$
\underline{u} = \sum_{k=1}^{N} a_k \underline{\varphi}^k, \tag{24}
$$

где $\underline{\varphi}^k$ — набор достаточно гладких линейно независимых функций, удовлетворяющих главным граничным условиям.

Подставляем в уравнение:

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \sigma_{ij,j} \left(\underline{\varphi}^k\right) + \rho\omega^2 \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_i^k = 0 \tag{25}
$$

Умножаем (26) на φ_i^l и интегрируем по объёму V

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \int\limits_V \sigma_{ij,j} \left(\underline{\varphi}^k\right) \varphi_i^l dV + \omega^2 \sum_{k=1}^{N} a_k \int\limits_V \rho \varphi_i^k \varphi_i^l dV = 0 \tag{26}
$$

Можно доказать, что

$$
\int\limits_V \sigma_{ij,j} \left(\underline{\varphi}^k\right) \varphi_i^l dV = -\int\limits_V \sigma_{ij} \left(\underline{\varphi}^k\right) \varepsilon_{ij}(\underline{\varphi}_i^l) dV
$$

Теперь соотношение (26) представляется в виде:

$$
\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\Pi_{kl} - \omega^2 T_{kl}\right) = 0, \tag{27}
$$

где

$$\Pi_{kl} = \int\limits_V \sigma_{ij}\left(\underline{\varphi}^k\right)\varepsilon_{ij}(\underline{\varphi}_i^l)dV,$$

$$T_{kl} = \int\limits_V \rho\varphi_i^k\varphi_i^l dV$$

Система (27) является однородной и имеет нетривиальное решение только, если её определитель равен нулю. Это приводит к равенству

$$\left|\Pi_{kl} - \omega^2 T_{kl}\right| = 0, \tag{28}$$

(28) — уравнение для приближенного определения собственных частот, используя которое, можно получить оценку собственных частот сверху.

Если в сумме (24) оставить только одно слагаемое, получаем

$$\omega^2 < \frac{\Pi_{11}}{T_{11}}, \tag{29}$$

— частное Релея.

3. Метод граничных интегральных уравнений

3 Фундаментальное решение

Определение Фундаментальным решением $U_i^{(m)}(x,\xi)$ называется смещение неограниченной упругой среды от действия сосредоточенной силы в направлении m-й координаты, приложенной в точке ξ и удовлетворяющая условиям излучения. Сингулярное решение $\sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)$ — напряжения, найденные по закону Гука из $U_i^{(m)}(x,\xi)$.

Рассмотрим фундаментальное решение для однородной изотропной упругой плоскости. Фундаментальное решение удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} (1-2\nu)^{-1}\left(U_{1,11}^{(m)}+U_{2,21}^{(m)}\right)+U_{1,11}^{(m)}+U_{1,22}^{(m)}+k_2^2U_1^{(m)}+\dfrac{\delta_{1m}}{G}\delta(x,\xi)=0, \\ (1-2\nu)^{-1}\left(U_{1,12}^{(m)}+U_{2,22}^{(m)}\right)+U_{2,11}^{(m)}+U_{2,22}^{(m)}+k_2^2U_2^{(m)}+\dfrac{\delta_{2m}}{G}\delta(x,\xi)=0, \end{cases} \tag{30}$$

(30) — неоднородные уравнения Ляме, ν — коэффициент Пуассона,

$$k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{G},$$

ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, G — модуль сдвига, δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta(x,\xi)$ — дельта-функция Дирака.

Для решения задачи используем преобразование Фурье:

$$\tilde{\tilde{U}}_i^{(m)}(\alpha,\xi)=\int\limits_{R^2}U_i^{(m)}(x,\xi)e^{i(\alpha,x)}dx_1dx_2,$$

где

$$(\alpha,x)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$$

После применения преобразования Фурье производная по x_j переходит в умножение на $-i\alpha_j$. Получаем:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[k_2^2 - \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} - \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} + \dfrac{\delta_{1m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} = 0, \\ -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \left[k_2^2 - \alpha_1^2 - \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} + \dfrac{\delta_{2m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} = 0 \end{array}\right. \tag{31}$$

или

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\delta_{1m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)}, \\ \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \left[\alpha_1^2 + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\delta_{2m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} \end{array}\right. \tag{32}$$

В дальнейшем считаем $m = 1$. Решим систему (32):

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} = \left[\alpha_1^2 + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right]\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{G\Delta}, \\ \tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{G\Delta}, \end{array}\right. \tag{33}$$

где

$$\Delta = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2}$$

Раскроем скобки в последнем выражении:

$$\begin{aligned} \Delta = k_2^4 - k_2^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} + 1\right]\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \\ + \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^4 + \alpha_2^4\right) + \\ + \left\{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^2 + 1 - \frac{1}{(1-2\nu)^2}\right\}\alpha_1^2\alpha_2^2 \end{aligned}$$

Рассмотрим множитель при $\alpha_1^2\alpha_2^2$:

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^2 + 1 - \frac{1}{(1-2\nu)^2} = \frac{4-8\nu+4\nu^2+1-4\nu+4\nu^2-1}{(1-2\nu)^2}$$

Преобразуем числитель:

$$\frac{4-8\nu+4\nu^2-4\nu+4\nu^2}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-3\nu+2\nu^2)}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu}$$

Таким образом

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} =$$
$$= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^4 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4\right) = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2$$

и

$$\Delta = k_2^4 - k_2^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}+1\right]\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2$$

Разлагаем определитель на множители:

$$\Delta = \left[k_2^2 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\right]\left[k_2^2 - \left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\right]$$

или

$$\Delta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k_2^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]$$

Рассмотрим выражение для продольной скорости:

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\rho\omega^2}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}k_2^2$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{G}{G(1-2\nu)^{-1}+G} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Следовательно

$$k_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k_2^2$$

и

$$\Delta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{1}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{A}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}+\frac{B}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right)$$

Найдём A и B:

$$A\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right)+B\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right)=1$$

Собираем множители при $\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^0$ и $\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^1$:

$$-Ak_2^2-Bk_1^2=1,$$
$$A+B=0$$

Следовательно

$$A=-B=\frac{1}{k_1^2-k_2^2}=\frac{1}{k_2^2}\left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}-1\right]^{-1}=-\frac{2(1-\nu)}{k_2^2}$$

и

$$\frac{1}{\Delta}=-\frac{1-2\nu}{k_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right) \tag{34}$$

Подставим (37) в (36) и найдём трансформанты перемещений:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} = -\dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2}\left[\alpha_1^2+\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2-k_2^2\right]\times \\ \qquad\times\left(\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right), \\ \tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\rho\omega^2}\left(\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right), \end{cases} \tag{35}$$

Обращаем преобразование Фурье, используя соответствие

$$\alpha_k = i\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Получаем:

$$\begin{cases} U_1^{(m)} = \dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_2^2\right] \times \\ \times \left[\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2} \dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2} d\alpha_1 d\alpha_2 - \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2} \dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2} d\alpha_1 d\alpha_2\right], \\ U_2^{(m)} = -\dfrac{1}{\rho\omega^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \times \\ \times \left[\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2} \dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2} d\alpha_1 d\alpha_2 - \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2} \dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2} d\alpha_1 d\alpha_2\right], \end{cases} \tag{36}$$

Вычислим интеграл:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2} \frac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_j^2} d\alpha_1 d\alpha_2$$

Произведём замену переменных:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha\cos\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha\sin\varphi, \end{cases}, \begin{cases} \xi_1 - x_1 = R\cos\psi, \\ \xi_2 - x_2 = R\sin\psi \end{cases},$$

Интеграл приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha e^{i\alpha R\cos(\varphi-\psi)}}{\alpha^2-k_j^2} d\alpha d\varphi$$

Воспользуемся формулой:

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta},$$

$J_n(z)$ — функция Бесселя n-го порядка.

Получаем:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k_j^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha R) e^{in(\varphi - \psi)} \right] d\alpha d\varphi$$

Воспользуемся ортогональностью тригонометрических функций:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{in\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$$

Теперь

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha d\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha$$

Подынтегральное выражение содержит вещественный полюс $\alpha = k_j$ и интеграл I_j расходится. Воспользуемся принципом предельного поглощения. При добавлении в исходные уравнения колебаний слагаемых, характеризующих вязкое трение, особенность смещается в верхнюю комплексную полуплоскость. Следовательно, для того, чтобы обеспечить равномерный предельный переход, следует интеграл по положительной вещественной полуоси заменить интегралом по контуру σ_+, обходящему снизу вещественный полюс.

Теперь сделаем еще одну замену в интеграле. Воспользуемся следующим представлением функции Бесселя

$$J_0(z) = \frac{1}{2} \left[H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z) \right],$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $H_0^{(2)}(z)$ — функция

Ганкеля второго рода нулевого порядка. Выражения для них имеют вид:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z),$$
$$H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iN_0(z),$$

где $N_0(z)$ — функция Неймана. Для функций Ганкеля имеет место асимптотика

$$H_0^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)},\ z \to \infty$$
$$H_0^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)},\ z \to \infty$$

при $z \to \infty$. Интеграл I_j приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(1)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha + \int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(2)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha\right]$$

Воспользуемся формулой

$$H_m^{(2)}\left(e^{-i\pi} z\right) = -e^{-im\pi} H_m^{(1)}(z),$$

следовательно

$$H_0^{(2)}\left(e^{-i\pi} z\right) = -H_0^{(1)}(z),$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(2)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha = \|\alpha = e^{-i\pi}\alpha'\| = \int\limits_{\sigma_-} \frac{\alpha' H_0^{(1)}(\alpha' R)}{\alpha'^2 - k_j^2} d\alpha',$$

где σ_- — контур в левой полуплоскости, совпадающий с вещественной осью всюду, за исключением особой точки $\alpha = -k_j$, которую он обходит в верхней полуплоскости.

Интеграл приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(1)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha,$$

$$\sigma = \sigma_- \cup \sigma_+$$

Так как функция Ганкеля экспоненциально убывает в верхней полуплоскости, контур можно замкнуть в верхней полуплоскости и тогда интеграл равен вычету подынтегральной функции в точке $\alpha = k_j$.

$$I_j = \frac{1}{4\pi} 2\pi i \frac{k_j H_0^{(1)}(k_j R)}{2k_j} = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j R).$$

Выражения для фундаментального решения принимают вид:

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = \dfrac{i}{4} \dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_2^2 \right] \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right], \\ U_2^{(1)} = -\dfrac{i}{4} \dfrac{1}{\rho\omega^2} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right], \end{cases} \tag{37}$$

Выражения (37) можно привести к виду

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = \dfrac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,11} + \left[H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,22} \right\}, \\ U_2^{(1)} = -\dfrac{i}{4\rho\omega^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,12}, \end{cases} \tag{38}$$

Сингулярные напряжения имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(1)} = -\dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,122} + \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,1} \right\}, \\ \sigma_{12}^{(1)} = \dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,112} + \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,2} \right\}, \\ \sigma_{22}^{(1)} = \dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,122} - \dfrac{\nu}{1-\nu} \left[H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,1} \right\} \end{cases} \tag{39}$$

Аналогично можно построить решение в случае $m = 2$.

4 Прямой метод сведения

Теорема взаимности Пусть у нас имеется некоторое упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью S. Рассмотрим два его состояния:

1. поверхностные силы $p_i^{(1)}$, массовые силы $F_i^{(1)}$, этой нагрузке соответствует решение $u_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$;

2. поверхностные силы $p_i^{(2)}$, массовые силы $F_i^{(2)}$, этой нагрузке соответствует решение $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$;

Работа первой системы сил на перемещениях, вызванных второй системой сил, равняется работе второй системы сил на перемещениях, вызванных первой системой сил.

Рассмотрим уравнения, которым удовлетворяют два решения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(1)} + F_i^{(1)} &= -\rho\omega^2 u_i^{(1)}, \\ \sigma_{ij,j}^{(2)} + F_i^{(2)} &= -\rho\omega^2 u_i^{(2)} \end{aligned} \tag{40}$$

Умножим первое уравнение (40) на $u_i^{(2)}$, второе — на $u_i^{(1)}$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по объёму V. Получаем:

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} - \sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV + \int\limits_V \left[F_i^{(1)} u_i^{(2)} - F_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = 0 \tag{41}$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части (41):

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} - \sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = \\ &= \int\limits_V \left\{ \left[\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}\right]_{,j} - \left[\sigma_{ij}^{(2)} u_i^{(1)}\right]_{,j} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right\} dV \end{aligned} \tag{42}$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_V \left\{ \left[\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)} \right]_{,j} - \left[\sigma_{ij}^{(2)} u_i^{(1)} \right]_{,j} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right\} dV =$$
$$= \int\limits_S \left[\sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^{(1)} \right] dS - \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right] dV \tag{43}$$

Граничные условия для двух систем сил имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} n_j \Big|_S &= p_i^{(1)}, \\ \sigma_{ij}^{(2)} n_j \Big|_S &= p_i^{(2)} \end{aligned} \tag{44}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right] dV = \int\limits_V \left[C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right] dV =$$
$$= \int\limits_V \left[C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} - C_{klij} \varepsilon_{ij}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(1)} \right] dV = 0 \tag{45}$$

Соотношение (41) приобретает вид:

$$\int\limits_S \left[p_i^{(1)} u_i^{(2)} - p_i^{(2)} u_i^{(1)} \right] dS + \int\limits_V \left[F_i^{(1)} u_i^{(2)} - F_i^{(2)} u_i^{(1)} \right] dV = 0 \tag{46}$$

или

$$\int\limits_V F_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int\limits_S p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS = \int\limits_V F_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \int\limits_S p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS \tag{47}$$

Последнее равенство представляет из себя математическую формулировку теоремы взаимности. Теорема доказана.

Рассмотрим два состояния:

1. истинное: F_i, u_i, σ_{ij}, ε_{ij};

2. $F_i^{(2)} = \delta_{im} \delta(x - \xi)$, $u_i^{(2)} = U_i^{(m)}(x, \xi)$ — фундаментальное решение, $\sigma_{ij}^{(2)} n_j = \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi) n_j$ — сингулярное решение;

Подставим эти два состояния в уравнение (47):

$$\begin{aligned}&\int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,\xi)dV_x+\int\limits_S \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi)dS_x=\\&=\int\limits_V \delta(x-\xi)u_i(x)dV_x+\int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)dS_x\end{aligned} \tag{48}$$

Воспользуемся свойствами функции Дирака, свойствами символа Кронекера, и перегруппируем слагаемые в (48):

$$\begin{aligned}&u_m(\xi)=\int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,\xi)dV_x+\\&+\int\limits_S\left[\sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi)-\sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)\right]dS_x,\ \xi\in V\end{aligned} \tag{49}$$

Соотношение (46) называется формулой Сомильяны и оно позволяет построить поле перемещений во всём теле, если на его границе известны перемещения и напряжения. Однако в краевой задаче теории упругости на границе обычно задаётся что-нибудь одно: или перемещение, или напряжение. Следовательно, если граничные условия имеют вид:

$$S=S_u\cup S_\sigma,\ u_i|_{S_u}=u_i^0,\ \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma}=p_i,$$

то нужно определить перемещения на S_σ и поверхностные напряжения на S_u.

Осуществим предельный переход при $\xi\to y\in S$. Рассмотрим отдельно подынтегральные слагаемые:

$$\int\limits_S \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi)dS_x$$

— аналог потенциала простого слоя.

$$\int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)dS_x$$

— аналог потенциала двойного слоя.

Выполняется теорема, аналогичная теореме о скачке потенциала двойного слоя и если $\xi \in V$, то

$$\lim_{\xi \to y} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi) n_j u_i(x) dS_x = -\frac{1}{2} u_m(y) + \text{v.p.} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,y) n_j u_i(x) dS_x$$

и соотношение (49) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_m(y) &= \int\limits_V F_i(x) U_i^{(m)}(x,y) dV_x + \\ &+ \int\limits_S \sigma_{ij}(x) n_j U_i^{(m)}(x,y) dS_x - \text{v.p.} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,y) n_j u_i(x) dS_x,\ y \in S \end{aligned} \tag{50}$$

Соотношения (49), (50) связывают неизвестные граничные условия с известными и позволяют полностью решить задачу.

Зачечание Соотношение (50) получено в предположении гладкости поверхности S. Если поверхность содержит особые точки (или кривые), то

$$\frac{1}{2} u_m(y)$$

заменяется на

$$C_{mk} u_k,$$

C_{mk} — зависит от механических и геометрических параметров.

5 Метод граничных элементов (Boundary Elements Method, BEM)

Требуется из уравнения (50) найти $\sigma_{ij}n_j|_{S_u}$ и $u_i|_{S_\sigma}$. Рассмотрим случай двух измерений. Соотношение (50) имеет вид:

$$\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \int\limits_l \sigma_{ij}(x)n_j U_i^{(m)}(x,y)dl_x - \text{v.p.}\int\limits_l \sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_j u_i(x)dl_x,\ y \in l, \quad (51)$$

где S — рассматриваемая область, $l = \partial S$ — её граница.

$$u_0(y) = \int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,y)dS_x$$

Метод граничных элементов состоит из следующих этапов:

1. Разбиение границы на элементы.

   Граница аппроксимируется ломаной

   $$l = \bigcup_{q=1}^{N} l_q,$$

   l_q — отрезки прямой. Соотношение (51) принимает вид:

   $$\begin{gathered}\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \sum_{q=1}^{N}\int\limits_{l_q}\sigma_{ij}(x)n_j U_i^{(m)}(x,y)dl_x - \\ -\sum_{q=1}^{N}\text{v.p.}\int\limits_{l_q}\sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_j u_i(x)dl_x,\ y \in l,\end{gathered} \quad (52)$$

2. Интерполяция неизвестной функции и введение узловых неизвестных

   Каждый из отрезков l_q взаимно однозначно отображается на отрещок $[-1,1]$. Обозначим концы отрезка ломаной через (x_{1q}^-, x_{2q}^-) и (x_{1q}^+, x_{2q}^+). Отображение имеет вид:

$$x_{iq} = x_{iq}^0 + \beta_{iq}\xi,$$

где

$$x_{iq}^0 = \frac{x_{iq}^+ + x_{iq}^-}{2},\ \beta_{iq} = \frac{x_{iq}^+ - x_{iq}^-}{2},\ \xi \in [-1, 1]$$

Аппроксимируем неизвестные функции на отрезке ломаной по формулам:

$$u_i(x)|_{l_q} = \sum_{n=1}^{n_q} u_{im}\psi_m(\xi),\ \sigma_{ij}(x)n_j|_{l_q} = \sum_{n=1}^{n_q} t_{im}\psi_m(\xi)$$

Граничным элементом называется подмножество границы области (в нашем случае отрезок ломаной) вместе с заданными базисными функциями. Существуют следующие типы элеметов:

- Постоянные, $n = 1$, $\psi_1(\xi) = 1$, узловыми точками являются x_q^0, — середины отрезков ломаных.
- Линейные, $n = 2$,

  $$\psi_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2},\ \psi_2(\xi) = \frac{1-\xi}{2},$$

  узловыми точками являются x_q^-, x_q^+ — концы отрезков ломаных.
- Квадратичные, $n = 3$

  $$\psi_1(\xi) = -\frac{\xi(1-\xi)}{2},\ \psi_2(\xi) = 1 - \xi^2,\ \psi_3(\xi) = \frac{\xi(1+\xi)}{2},$$

  три узловые точки расположены на концах и в середине отрезка ломаной

В дальнейшем используем постоянные элементы.

3. Формирование конечномерного оператора и его обращение

Уравнение (52) теперь имеет вид:

$$
\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \sum_{q=1}^{N} t_{iq} \int\limits_{l_q} U_i^{(m)}(x,y)dl_x - \\
- \sum_{q=1}^{N} u_{iq} \cdot \text{v.p.} \int\limits_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_j dl_x \tag{53}
$$

Потребуем выполнения равенств (53) в узловых точках, расположенных на серединах отрезков ломаных. Получаем:

$$
\frac{1}{2}u_{mp} = u_{0p} + \sum_{q=1}^{N} A_{imqp}t_{iq} - \sum_{q=1}^{N} B_{imqp}u_{iq},\ p = \overline{1,N} \tag{54}
$$

где

$$
A_{imqp} = \int\limits_{l_q} U_i^{(m)}(x,x_p)dl_x,
$$

$$
B_{imqp} = \text{v.p.} \int\limits_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x,x_p)n_j dl_x
$$

При решении задачи известные слагаемые переносим влево, неизвестные — вправо.

5.1 Сравнение методов граничных элементов (Boundary Elements Method, BEM, МГЭ) и метода конечных элементов (Finite Elements Method, FEM, МКЭ)

Особенности методов:

- Размерность матрицы:
  - МКЭ — большая размерность матрицы СЛАУ, матрица разреженная, основное расчётное время — решение СЛАУ;
  - МГЭ — малая размерность матрицы СЛАУ (размерность начинается от $N = 20 \div 40$), матрица плотно заполненная, несимметричная и комплекс-

нозначная, однако она хорошо обусловлена, с диагональным преобладанием. Основное расчётное время — вычисление коэффициентов матрицу, используются квадратурные формулы Гаусса;

- Неоднородность среды:
  - для МКЭ — не является препятствием;
  - для МГЭ — серьёзное препятствие, если рассматриваемое тело состоит из нескольких материалов, добавляются уравнения по границам раздела, в случае гладкой зависимости механических параметров от координат метод практически неприменим;
- Неограниченность среды:
  - для МКЭ — серьёзное препятствие. При помощи МКЭ может быть решена статическая задача для неограниченной области (с использованием принципа Сен-Венана). Динамическую задачу для неограниченной области можно решить при помощи МКЭ только если решение стремится к нулю на бесконечности;
  - для МГЭ — не препятствие;

6 Антиплоские колебания полупространства с цилиндрической полостью

Рассмотрим упругое полупространство $x_2 < 0$ с цилиндрической полостью S, ограниченной контуром $l = \partial S$. Решение имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{-i\omega t} \end{cases} \tag{55}$$

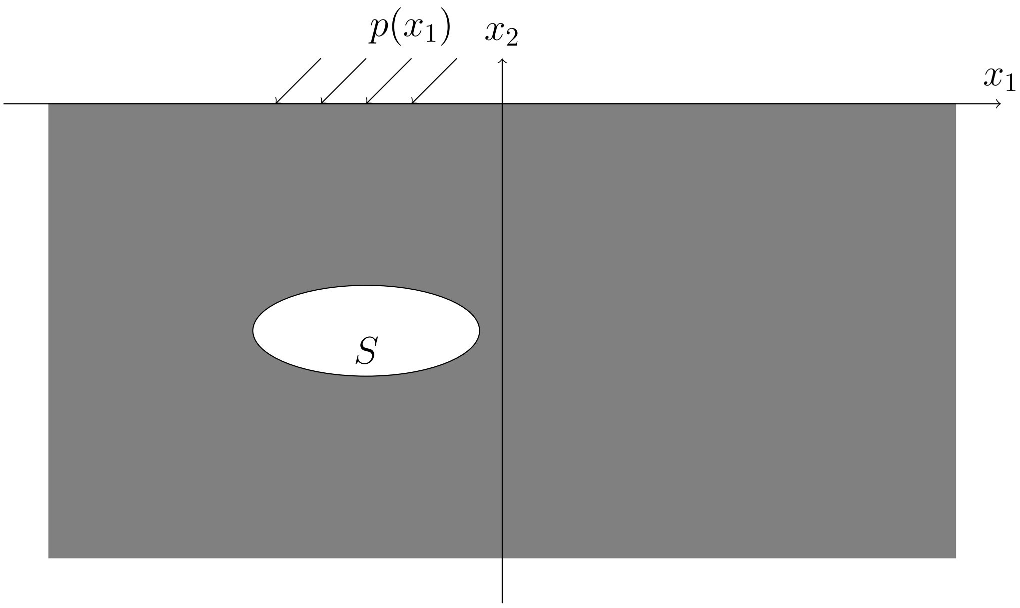

Рис. 1: Полупространство

Граничные условия имеют вид:

На верхней поверхности полупространства действует цилиндрическая нагрузка:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = p(x_1) \tag{56}$$

Границы полости свободны от напряжений:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\bigg|_l = \mu \left(n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)\bigg|_l = 0, \tag{57}$$

где $\underline{n}$ — внутренняя нормаль к границе полости.

6.1 Построение фундаментального решения для полуплоскости

Фундаментальное решение удовлетворяет уравнению

$$U^0_{,11} + U^0_{,22} + k_2^2 U^0 = -\delta(x - \xi), \tag{58}$$

где

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, μ — модуль сдвига.

Верхняя поверхность полупространства свободна от напряжений:

$$\mu \frac{\partial U^0}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = 0 \tag{59}$$

Ищем решение U^0 в виде суммы двух слагаемых:

$$U^0 = V + W,$$

где V — решение неоднородного уравнения Гельмгольца

$$V_{,11} + V_{,22} + k_2^2 V = -\delta(x - \xi), \tag{60}$$

для неограниченной плоскости.

Функция W — решение однородного уравнения Гельмгольца

$$W_{,11} + W_{,22} + k_2^2 W = 0, \tag{61}$$

при граничном условии

$$W'|_{x_2=0} = -\,V'|_{x_2=0} \tag{62}$$

Для отыскания функции V воспользуемся двойным преобразованием Фурье:

$$\tilde{\tilde{V}} = \int\limits_R^2 V(x_1, x_2) e^{i(\alpha,x)} dx_1 dx_2,\ (\alpha, x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

Уравнение (60) принимает вид:

$$-\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right)\tilde{\tilde{V}} = -e^{i(\alpha,\xi)}, \tag{63}$$

следовательно

$$\tilde{\tilde{V}} = \frac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2}, \tag{64}$$

Обращаем преобразование Фурье по переменной x_2:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[\alpha_1\xi_1 + \alpha_2(\xi_2 - x_2)]}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2} d\alpha_2, \tag{65}$$

Рассмотрим особенности подынтегрального выражения. Они определяются из уравнения

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2 = 0,$$

следовательно

$$\alpha_2^2 = -\left(\alpha_1^2 - k_2^2\right),$$

и

$$\alpha_2 = \pm i\gamma = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - k_2^2},$$

Предположим, что $\xi_2 - x_2 > 0$. Тогда контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости и выражение для $\tilde{V}$ принимает вид:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i[\alpha_1\xi_1 + i\gamma(\xi_2 - x_2)]}}{2i\gamma} = \frac{e^{-\gamma(\xi_2 - x_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1}, \tag{66}$$

Аналогично, если $\xi_2 - x_2 < 0$, замыкаем контур в нижней полуплоскости, получаем:

$$\tilde{V} = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i[\alpha_1\xi_1 - i\gamma(\xi_2 - x_2)]}}{-2i\gamma} = \frac{e^{\gamma(\xi_2 - x_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1}, \tag{67}$$

Объединяем выражения (66) и (67) и получаем:

$$\tilde{V} = \frac{e^{-\gamma|x_2 - \xi_2|}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1}, \tag{68}$$

Найдём теперь функцию W. Используем преобразование Фурье по переменной

x_1:

$$\tilde{W}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1$$

Уравнение в трансформантах имеет вид:

$$\tilde{W}'' - (\alpha_1^2 - k_2^2)\tilde{W} = 0 \tag{69}$$

Его общее решение, ограниченное в бесконечно удаленной точке, имеет вид:

$$\tilde{W} = Ce^{\gamma x_2} \tag{70}$$

Константу C определяем из условия (62). Найдём $\tilde{V}'$:

$$\tilde{V}' = -\frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|}}{2} e^{i\alpha_1\xi_1} \operatorname{sgn}(x_2 - \xi_2),$$

следовательно

$$\gamma C = \frac{e^{\gamma\xi_2}}{2} e^{i\alpha_1\xi_1} \tag{71}$$

и

$$\tilde{W} = \frac{e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1 x_1} \tag{72}$$

Трансформанта фундаментального решения принимает вид:

$$\tilde{U}^0 = \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|} + e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1} \tag{73}$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$U^0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|} + e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{\gamma} e^{i\alpha_1(\xi_1 - x_1)} d\alpha_1 \tag{74}$$

Согласно принципа предельного поглощения контур интегрирования по вещественной оси следует заменить на контур σ, который совпадает с вещественной осью всюду, за исключением окрестностей особых точек $\alpha_1 = \pm k_2$. При этом точка $\alpha_1 = k_2$ обходится в нижней полуплоскости, $\alpha_1 = -k_2$ — в верхней.

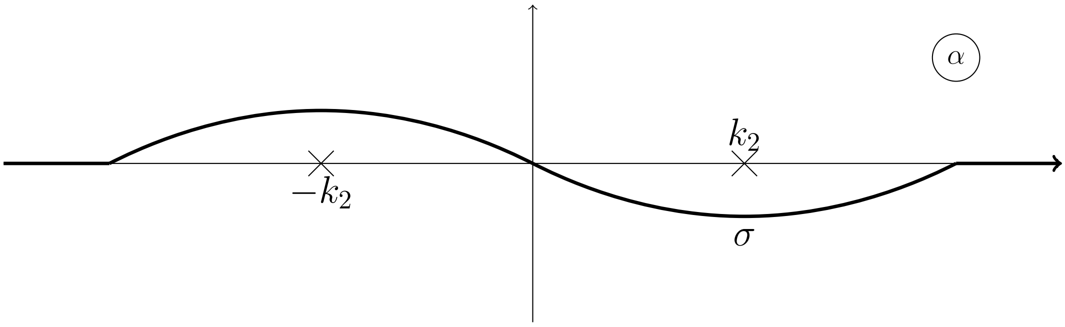

Рис. 2: Контур интегрирования

Интеграл (74) может быть взят аналитически и выражение для него имеет вид:

$$U^0 = \frac{i}{4}\left[H_0^{(1)}(k_2 r) + H_0^{(1)}(k_2 \tilde{r})\right], \tag{75}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2},$$

$$\tilde{r} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}$$

6.2 Построение граничного интегрального уравнения

Введем в рассмотрение область

$$S_R = \{(x_1, x_2) | \left(x_1^2 + x_2^2\right) \le R,\ x_2 < 0\}$$

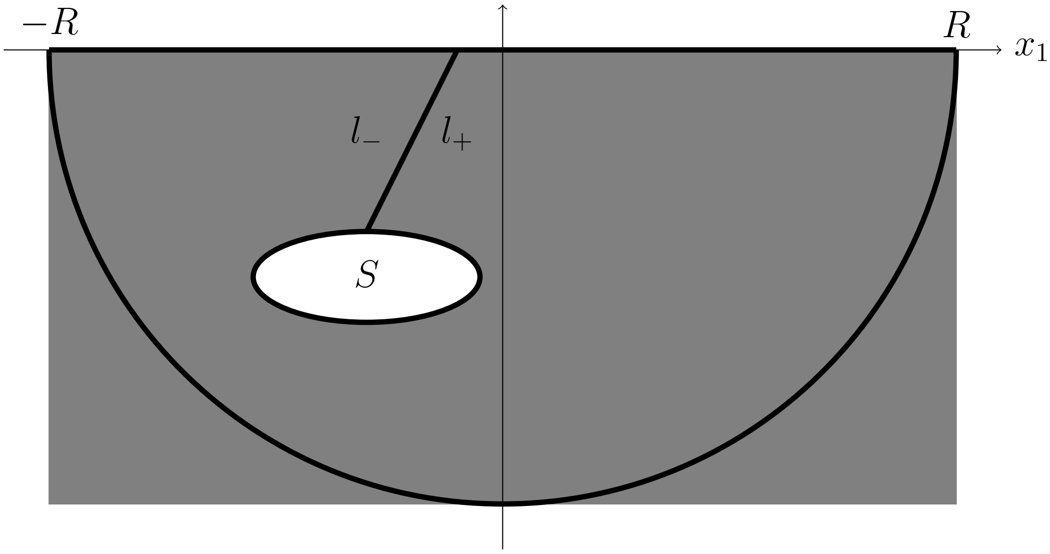

Рис. 3: Полупространство

Область S_R может быть сделана односвязной, если провести разрез l. Введём ещё одно обозначение $C_R = \partial S_R$.

Рассмотрим два уравнения: уравнение, которому удовлетворяет истинное решение задачи и уравнение, которому удовлетворяет фундаментальное решение:

$$\begin{aligned} &u_{,11} + u_{,22} + k_2^2 u = 0, \\ &U^0_{,11} + U^0_{,22} + k_2^2 U^0 = -\delta(x - \xi) \end{aligned} \tag{76}$$

Умножим первое из уравнений (76) на U^0, второе — на u, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по области S_R:

$$\int\limits_{S_R} \left[\Delta u(x) U^0(x,\xi) - \Delta U^0(x,\xi) u(x)\right] dS = u(\xi), \tag{77}$$

$$\Delta u = u_{,11} + u_{,22}.$$

Воспользуемся формулой Грина

$$u(\xi) = \int\limits_{C_R} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x)\right] dl, \tag{78}$$

Устремим $R \to \infty$. Равенство (78) приобретает вид:

$$u(\xi) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{l} + \int\limits_{l_+} + \int\limits_{l_-}\right] \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x)\right] dl, \qquad (79)$$

Рассмотрим интегралы в выражении (78):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x)\right] dl = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) U_0(x_1, 0; \xi) dx_1,$$

$$\int\limits_{l} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x)\right] dl = -\int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl$$

Интегралы вдоль берегов разрезов l_- и l_+ взаимно сокращаются из-за противоположных направлений внешней нормали. Формула (79) теперь приобретает вид:

$$u(\xi) = u_0(\xi) - \int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl, \qquad (80)$$

где

$$u_0(\xi) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) U_0(x_1, 0; \xi) dx_1$$

Выражение (80) позволяет построить решение в любой точке полупространства, если на границе полости известно перемещение и напряжение. Но в условиях задачи указано только отсутствие напряжений на границе полости.

Рассмотрим выражение (80) и устремим точку ξ к точке $y \to l = \partial S$. Интеграл

$$\int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl$$

обладает свойствами потенциала двойного слоя. Уравнение (80) после предельного перехода принимает вид:

$$\frac{1}{2}u(y) = u_0(y) - \text{v.p.} \int\limits_l \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,y)u(x)dl,\ y \in l, \tag{81}$$

где v.p. — главное значение интеграла по Коши.