1 Прямой метод сведения

Теорема взаимности Пусть у нас имеется некоторое упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью S. Рассмотрим два его состояния:

1. поверхностные силы $p_i^{(1)}$, массовые силы $F_i^{(1)}$, этой нагрузке соответствует решение $u_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$;

2. поверхностные силы $p_i^{(2)}$, массовые силы $F_i^{(2)}$, этой нагрузке соответствует решение $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$;

Работа первой системы сил на перемещениях, вызванных второй системой сил, равняется работе второй системы сил на перемещениях, вызванных первой системой сил.

Рассмотрим уравнения, которым удовлетворяют два решения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(1)} + F_i^{(1)} &= -\rho\omega^2 u_i^{(1)}, \\ \sigma_{ij,j}^{(2)} + F_i^{(2)} &= -\rho\omega^2 u_i^{(2)} \end{aligned} \tag{1}$$

Умножим первое уравнение (1) на $u_i^{(2)}$, второе — на $u_i^{(1)}$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по объёму V. Получаем:

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} - \sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV + \int\limits_V \left[F_i^{(1)} u_i^{(2)} - F_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = 0 \tag{2}$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части (2):

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} - \sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = \\ &= \int\limits_V \left\{ \left[\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}\right]_{,j} - \left[\sigma_{ij}^{(2)} u_i^{(1)}\right]_{,j} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right\} dV \end{aligned} \tag{3}$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_V \left\{ \left[\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}\right]_{,j} - \left[\sigma_{ij}^{(2)} u_i^{(1)}\right]_{,j} - \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} \right\} dV =$$
$$= \int\limits_S \left[\sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^{(1)}\right] dS - \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right] dV \quad (4)$$

Граничные условия для двух систем сил имеют вид:

$$\sigma_{ij}^{(1)} n_j \Big|_S = p_i^{(1)},$$
$$\sigma_{ij}^{(2)} n_j \Big|_S = p_i^{(2)} \quad (5)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right] dV = \int\limits_V \left[C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right] dV =$$
$$= \int\limits_V \left[C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - C_{klij}\varepsilon_{ij}^{(2)}\varepsilon_{kl}^{(1)}\right] dV = 0 \quad (6)$$

Соотношение (2) приобретает вид:

$$\int\limits_S \left[p_i^{(1)} u_i^{(2)} - p_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] dS + \int\limits_V \left[F_i^{(1)} u_i^{(2)} - F_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = 0 \quad (7)$$

или

$$\int\limits_V F_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int\limits_S p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS = \int\limits_V F_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \int\limits_S p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS \quad (8)$$

Последнее равенство представляет из себя математическую формулировку теоремы взаимности. Теорема доказана.

Рассмотрим два состояния:

1. истинное: F_i, u_i, σ_{ij}, ε_{ij};
2. $F_i^{(2)} = \delta_{im}\delta(x-\xi)$, $u_i^{(2)} = U_i^{(m)}(x,\xi)$ — фундаментальное решение, $\sigma_{ij}^{(2)} n_j = \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi) n_j$ — сингулярное решение;

Подставим эти два состояния в уравнение (8):

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,\xi)dV_x + \int\limits_S \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi)dS_x = \\
&= \int\limits_V \delta(x-\xi)u_i(x)dV_x + \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)dS_x
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Воспользуемся свойствами функции Дирака, свойствами символа Кронекера, и перегруппируем слагаемые в (9):

$$
\begin{aligned}
&u_m(\xi) = \int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,\xi)dV_x + \\
&+ \int\limits_S \left[\sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi) - \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)\right] dS_x,\ \xi \in V
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Соотношение (7) называется формулой Сомильяны и оно позволяет построить поле перемещений во всём теле, если на его границе известны перемещения и напряжения. Однако в краевой задаче теории упругости на границе обычно задаётся что-нибудь одно: или перемещение, или напряжение. Следовательно, если граничные условия имеют вид:

$$
S = S_u \cup S_\sigma,\ u_i|_{S_u} = u_i^0,\ \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i,
$$

то нужно определить перемещения на S_σ и поверхностные напряжения на S_u.

Осуществим предельный переход при $\xi \to y \in S$. Рассмотрим отдельно подынтегральные слагаемые:

$$
\int\limits_S \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi)dS_x
$$

— аналог потенциала простого слоя.

$$
\int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)dS_x
$$

— аналог потенциала двойного слоя.

Выполняется теорема, аналогичная теореме о скачке потенциала двойного слоя и если $\xi \in V$, то

$$\lim_{\xi\to y}\int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_j u_i(x)dS_x = -\frac{1}{2}u_m(y) + \text{v.p.}\int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_j u_i(x)dS_x$$

и соотношение (10) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}u_m(y) = \int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,y)dV_x + \\ &+\int\limits_S \sigma_{ij}(x)n_j U_i^{(m)}(x,y)dS_x - \text{v.p.}\int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_j u_i(x)dS_x,\ y\in S \end{aligned} \tag{11}$$

Соотношения (10), (11) связывают неизвестные граничные условия с известными и позволяют полностью решить задачу.

Зачечание Соотношение (11) получено в предположении гладкости поверхности S. Если поверхность содержит особые точки (или кривые), то

$$\frac{1}{2}u_m(y)$$

заменяется на

$$C_{mk}u_k,$$

C_{mk} — зависит от механических и геометрических параметров.

2 Метод граничных элементов (Boundary Elements Method, BEM)

Требуется из уравнения (11) найти $\sigma_{ij}n_j|_{S_u}$ и $u_i|_{S_\sigma}$. Рассмотрим случай двух измерений. Соотношение (11) имеет вид:

$$\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \int\limits_l \sigma_{ij}(x)n_j U_i^{(m)}(x,y)dl_x - \text{v.p.}\int\limits_l \sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_j u_i(x)dl_x,\ y \in l, \quad (12)$$

где S — рассматриваемая область, $l = \partial S$ — её граница.

$$u_0(y) = \int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,y)dS_x$$

Метод граничных элементов состоит из следующих этапов:

1. Разбиение границы на элементы.

   Граница аппроксимируется ломаной

   $$l = \bigcup_{q=1}^{N} l_q,$$

   l_q — отрезки прямой. Соотношение (12) принимает вид:

   $$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \sum_{q=1}^{N}\int\limits_{l_q}\sigma_{ij}(x)n_j U_i^{(m)}(x,y)dl_x - \\ - \sum_{q=1}^{N}\text{v.p.}\int\limits_{l_q}\sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_j u_i(x)dl_x,\ y \in l,\end{aligned} \quad (13)$$

2. Интерполяция неизвестной функции и введение узловых неизвестных

   Каждый из отрезков l_q взаимно однозначно отображается на отрещок $[-1,1]$. Обозначим концы отрезка ломаной через (x_{1q}^-, x_{2q}^-) и (x_{1q}^+, x_{2q}^+). Отображение имеет вид:

$$x_{iq} = x_{iq}^0 + \beta_{iq}\xi,$$

где

$$x_{iq}^0 = \frac{x_{iq}^+ + x_{iq}^-}{2},\ \beta_{iq} = \frac{x_{iq}^+ - x_{iq}^-}{2},\ \xi \in [-1, 1]$$

Аппроксимируем неизвестные функции на отрезке ломаной по формулам:

$$u_i(x)\big|_{l_q} = \sum_{n=1}^{n_q} u_{im}\psi_m(\xi),\ \sigma_{ij}(x)n_j\big|_{l_q} = \sum_{n=1}^{n_q} t_{im}\psi_m(\xi)$$

Граничным элементом называется подмножество границы области (в нашем случае отрезок ломаной) вместе с заданными базисными функциями. Существуют следующие типы элеметов:

- Постоянные, $n = 1$, $\psi_1(\xi) = 1$, узловыми точками являются x_q^0, — середины отрезков ломаных.
- Линейные, $n = 2$,
$$\psi_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2},\ \psi_2(\xi) = \frac{1-\xi}{2},$$
узловыми точками являются x_q^-, x_q^+ — концы отрезков ломаных.
- Квадратичные, $n = 3$
$$\psi_1(\xi) = -\frac{\xi(1-\xi)}{2},\ \psi_2(\xi) = 1 - \xi^2,\ \psi_3(\xi) = \frac{\xi(1+\xi)}{2},$$
три узловые точки расположены на концах и в середине отрезка ломаной

В дальнейшем используем постоянные элементы.

3. Формирование конечномерного оператора и его обращение

Уравнение (13) теперь имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2} u_m(y) = u_0(y) + \sum_{q=1}^{N} t_{iq} \int\limits_{l_q} U_i^{(m)}(x,y) dl_x - \\
- \sum_{q=1}^{N} u_{iq} \cdot \text{v.p.} \int\limits_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x,y) n_j dl_x
\end{gathered} \tag{14}
$$

Потребуем выполнения равенств (14) в узловых точках, расположенных на серединах отрезков ломаных. Получаем:

$$
\frac{1}{2} u_{mp} = u_{0p} + \sum_{q=1}^{N} A_{imqp} t_{iq} - \sum_{q=1}^{N} B_{imqp} u_{iq},\ p = \overline{1,N} \tag{15}
$$

где

$$
A_{imqp} = \int\limits_{l_q} U_i^{(m)}(x, x_p) dl_x,
$$

$$
B_{imqp} = \text{v.p.} \int\limits_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x, x_p) n_j dl_x
$$

При решении задачи известные слагаемые переносим влево, неизвестные — вправо.

2.1 Сравнение методов граничных элементов (Boundary Elements Method, BEM, МГЭ) и метода конечных элементов (Finite Elements Method, FEM, МКЭ)

Особенности методов:

- Размерность матрицы:
  - МКЭ — большая размерность матрицы СЛАУ, матрица разреженная, основное расчётное время — решение СЛАУ;
  - МГЭ — малая размерность матрицы СЛАУ (размерность начинается от $N = 20 \div 40$), матрица плотно заполненная, несимметричная и комплекс-

нозначная, однако она хорошо обусловлена, с диагональным преобладанием. Основное расчётное время — вычисление коэффициентов матрицу, используются квадратурные формулы Гаусса;

- Неоднородность среды:
  - для МКЭ — не является препятствием;
  - для МГЭ — серьёзное препятствие, если рассматриваемое тело состоит из нескольких материалов, добавляются уравнения по границам раздела, в случае гладкой зависимости механических параметров от координат метод практически неприменим;
- Неограниченность среды:
  - для МКЭ — серьёзное препятствие. При помощи МКЭ может быть решена статическая задача для неограниченной области (с использованием принципа Сен-Венана). Динамическую задачу для неограниченной области можно решить при помощи МКЭ только если решение стремится к нулю на бесконечности;
  - для МГЭ — не препятствие;

3 Антиплоские колебания полупространства с цилиндрической полостью

Рассмотрим упругое полупространство $x_2 < 0$ с цилиндрической полостью S, ограниченной контуром $l = \partial S$. Решение имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{-i\omega t} \end{cases} \tag{16}$$

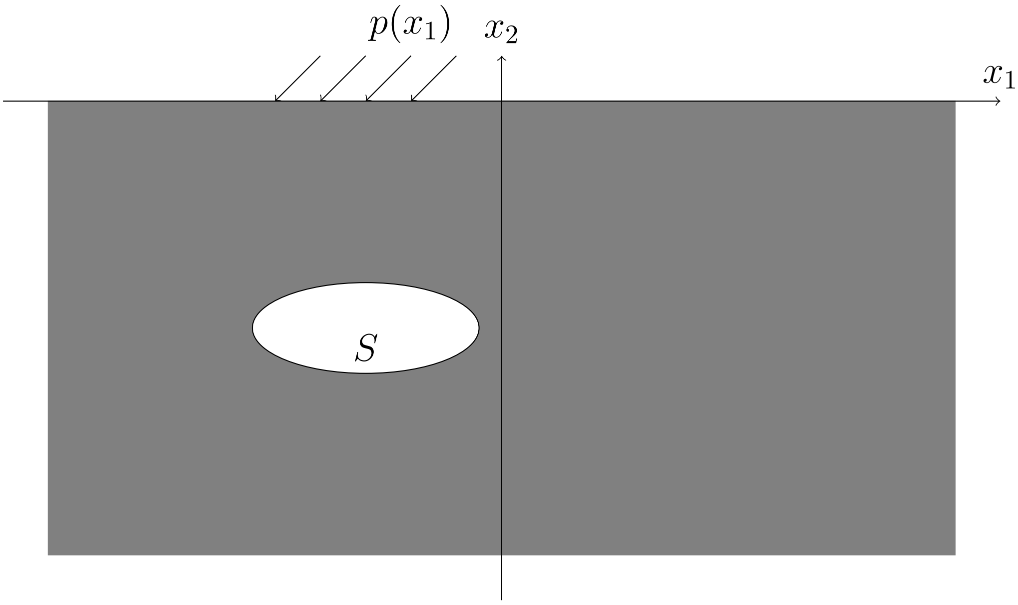

Рис. 1: Полупространство

Граничные условия имеют вид:

На верхней поверхности полупространства действует цилиндрическая нагрузка:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = p(x_1) \tag{17}$$

Границы полости свободны от напряжений:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\bigg|_l = \mu \left(n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)\bigg|_l = 0, \tag{18}$$

где $\underline{n}$ — внутренняя нормаль к границе полости.

3.1 Построение фундаментального решения для полуплоскости

Фундаментальное решение удовлетворяет уравнению

$$U^0_{,11} + U^0_{,22} + k_2^2 U^0 = -\delta(x - \xi), \tag{19}$$

где

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, μ — модуль сдвига.

Верхняя поверхность полупространства свободна от напряжений:

$$\mu \frac{\partial U^0}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = 0 \tag{20}$$

Ишем решение U^0 в виде суммы двух слагаемых:

$$U^0 = V + W,$$

где V — решение неоднородного уравнения Гельмгольца

$$V_{,11} + V_{,22} + k_2^2 V = -\delta(x - \xi), \tag{21}$$

для неограниченной плоскости.

Функция W — решение однородного уравнения Гельмгольца

$$W_{,11} + W_{,22} + k_2^2 W = 0, \tag{22}$$

при граничном условии

$$W'\big|_{x_2=0} = -\, V'\big|_{x_2=0} \tag{23}$$

Для отыскания функции V воспользуемся двойным преобразованием Фурье:

$$\tilde{\tilde{V}} = \int\limits_R^2 V(x_1, x_2) e^{i(\alpha,x)} dx_1 dx_2,\ (\alpha, x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

Уравнение (21) принимает вид:

$$-\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right) \tilde{\tilde{V}} = -e^{i(\alpha,\xi)}, \tag{24}$$

следовательно

$$\tilde{\tilde{V}} = \frac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2}, \tag{25}$$

Обращаем преобразование Фурье по переменной x_2:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[\alpha_1\xi_1 + \alpha_2(\xi_2 - x_2)]}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2} d\alpha_2, \tag{26}$$

Рассмотрим особенности подынтегрального выражения. Они определяются из уравнения

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2 = 0,$$

следовательно

$$\alpha_2^2 = -\left(\alpha_1^2 - k_2^2\right),$$

и

$$\alpha_2 = \pm i\gamma = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - k_2^2},$$

Предположим, что $\xi_2 - x_2 > 0$. Тогда контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости и выражение для $\tilde{V}$ принимает вид:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i[\alpha_1\xi_1 + i\gamma(\xi_2 - x_2)]}}{2i\gamma} = \frac{e^{-\gamma(\xi_2 - x_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1}, \tag{27}$$

Аналогично, если $\xi_2 - x_2 < 0$, замыкаем контур в нижней полуплоскости, получаем:

$$\tilde{V} = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i[\alpha_1\xi_1 - i\gamma(\xi_2 - x_2)]}}{-2i\gamma} = \frac{e^{\gamma(\xi_2 - x_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1}, \tag{28}$$

Объединяем выражения (27) и (28) и получаем:

$$\tilde{V} = \frac{e^{-\gamma|x_2 - \xi_2|}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1}, \tag{29}$$

Найдём теперь функцию W. Используем преобразование Фурье по переменной

x_1:

$$\tilde{W}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1$$

Уравнение в трансформантах имеет вид:

$$\tilde{W}'' - (\alpha_1^2 - k_2^2)\tilde{W} = 0 \tag{30}$$

Его общее решение, ограниченное в бесконечно удаленной точке, имеет вид:

$$\tilde{W} = Ce^{\gamma x_2} \tag{31}$$

Константу C определяем из условия (23). Найдём $\tilde{V}'$:

$$\tilde{V}' = -\frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|}}{2} e^{i\alpha_1\xi_1} \operatorname{sgn}(x_2 - \xi_2),$$

следовательно

$$\gamma C = \frac{e^{\gamma\xi_2}}{2} e^{i\alpha_1\xi_1} \tag{32}$$

и

$$\tilde{W} = \frac{e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1 x_1} \tag{33}$$

Трансформанта фундаментального решения принимает вид:

$$\tilde{U}^0 = \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|} + e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1\xi_1} \tag{34}$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$U^0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|} + e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{\gamma} e^{i\alpha_1(\xi_1-x_1)} d\alpha_1 \tag{35}$$

Согласно принципа предельного поглощения контур интегрирования по вещественной оси следует заменить на контур σ, который совпадает с вещественной осью всюду, за исключением окрестностей особых точек $\alpha_1 = \pm k_2$. При этом точка $\alpha_1 = k_2$ обходится в нижней полуплоскости, $\alpha_1 = -k_2$ — в верхней.

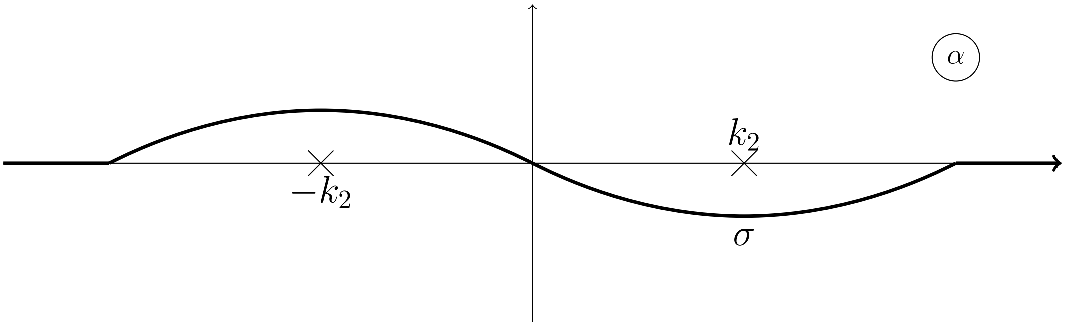

Рис. 2: Контур интегрирования

Интеграл (35) может быть взят аналитически и выражение для него имеет вид:

$$U^0 = \frac{i}{4}\left[H_0^{(1)}(k_2 r) + H_0^{(1)}(k_2 \tilde{r})\right], \tag{36}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2},$$

$$\tilde{r} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}$$

3.2 Построение граничного интегрального уравнения

Введем в рассмотрение область

$$S_R = \{(x_1, x_2) | \left(x_1^2 + x_2^2\right) \leq R,\, x_2 < 0\}$$

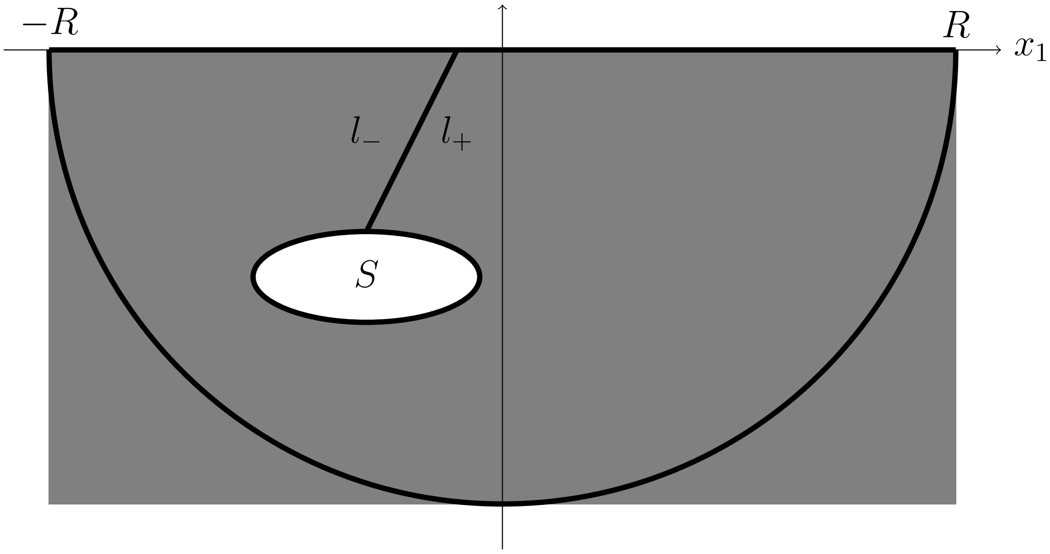

Рис. 3: Полупространство

Область S_R может быть сделана односвязной, если провести разрез l. Введём ещё одно обозначение $C_R = \partial S_R$.

Рассмотрим два уравнения: уравнение, которому удовлетворяет истинное решение задачи и уравнение, которому удовлетворяет фундаментальное решение:

$$\begin{aligned} &u_{,11} + u_{,22} + k_2^2 u = 0, \\ &U^0_{,11} + U^0_{,22} + k_2^2 U^0 = -\delta(x - \xi) \end{aligned} \tag{37}$$

Умножим первое из уравнений (37) на U^0, второе — на u, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по области S_R:

$$\int\limits_{S_R} \left[\Delta u(x) U^0(x,\xi) - \Delta U^0(x,\xi) u(x)\right] dS = u(\xi), \tag{38}$$

$$\Delta u = u_{,11} + u_{,22}.$$

Воспользуемся формулой Грина

$$u(\xi) = \int\limits_{C_R} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x)\right] dl, \tag{39}$$

Устремим $R \to \infty$. Равенство (39) приобретает вид:

$$u(\xi) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{l} + \int\limits_{l_+} + \int\limits_{l_-} \right] \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) \right] dl, \qquad (40)$$

Рассмотрим интегралы в выражении (39):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) \right] dl = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) U_0(x_1, 0; \xi) dx_1,$$

$$\int\limits_{l} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) \right] dl = -\int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl$$

Интегралы вдоль берегов разрезов l_- и l_+ взаимно сокращаются из-за противоположных направлений внешней нормали. Формула (40) теперь приобретает вид:

$$u(\xi) = u_0(\xi) - \int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl, \qquad (41)$$

где

$$u_0(\xi) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) U_0(x_1, 0; \xi) dx_1$$

Выражение (41) позволяет построить решение в любой точке полупространства, если на границе полости известно перемещение и напряжение. Но в условиях задачи указано только отсутствие напряжений на границе полости.

Рассмотрим выражение (41) и устремим точку ξ к точке $y \to l = \partial S$. Интеграл

$$\int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl$$

обладает свойствами потенциала двойного слоя. Уравнение (41) после предельного перехода принимает вид:

$$\frac{1}{2}u(y) = u_0(y) - \text{v.p.} \int\limits_l \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,y)u(x)dl,\ y \in l, \tag{42}$$

где v.p. — главное значение интеграла по Коши.