Пакеты научных вычислений

Приложение к Лекции 5. Векторный анализ

Особенности задания векторов и векторных полей, градиент, дивергенция, ротор, лапласиан и якобиан

Наседкина А. А.

Векторный анализ в пакетах LinearAlgebra и VectorCalculus

- Особенности задания векторов и векторных полей в пакете VectorCalculus
- Градиент, дивергенция, ротор
- Лапласиан
- Матрица Якоби

Особенности задания векторов и векторных полей в пакете VectorCalculus

- **Vector[o](n, init, f, c)** – задает вектор в заданной системе координат (по умолчанию декартова); все параметры являются необязательными; по умолчанию выводит разложение вектора по базису (**BasisFormat(true)**)

  o – ориентация вектора (**row** или **column**)

  init – значения элементов вектора, могут задаваться функцией, процедурой, списком, массивом и др.

  f – заполняет незаданные элементы вектора в виде **fill=value**

  c – задает систему координат в виде **coords=name** или **coordinates=name**
- **<x1,x2,…,xn>** – также задает вектор в заданной системе координат
- Многие команды пакета VectorCalculus требуют векторное поле, а не вектор, в качестве входного аргумента
- **VectorField(v, c)** – задает векторное поле в заданной системе координат

  v – список list или вектор Vector компонент вектора в заданной системе координат

  c – задает координатную систему и имена для координат в виде **symbol[name, name, …]**
- **SetCoordinates(v,c)** – задает глобальную систему координат для векторов и векторных полей; **v, c** определены как выше

Примеры задания векторов и векторных полей в пакете VectorCalculus

> $with(VectorCalculus):$

здесь команда Vector берется из подключенного пакета

> $v := Vector([3, 4, 5])$

$$v := 3e_x + 4e_y + 5e_z$$

> $v1 := \langle x, 2\,y, 3\,xz\rangle$

$$v1 := (x)e_x + 2\,ye_y + 3\,xze_z$$

> $v2 := \langle x | 2\,y | 3\,xz\rangle$

$$v2 := (x)e_x + 2\,ye_y + 3\,xze_z$$

Векторное поле в декартовой системе координат

> $V := VectorField(\langle 3, 4, 5\rangle, 'cartesian'_{x, y, z})$

$$V := 3\bar{e}_x + 4\bar{e}_y + 5\bar{e}_z$$

Векторное поле в цилиндрической системе координат

> $V1 := VectorField(\langle r\cos(\theta), \sin(\theta), z^2\rangle, 'cylindrical'_{r, \theta, z})$

$$V1 := (r\cos(\theta))\bar{e}_r + (\sin(\theta))\bar{e}_\theta + (z^2)\bar{e}_z$$

Векторное поле в сферической системе координат

> $SetCoordinates('spherical'_{r, \phi, \theta})$

$$spherical_{r, \phi, \theta}$$

> $V2 := VectorField\left(\left\langle \frac{1}{r^2}, \sin(\phi), \cos(\theta)\right\rangle\right)$

$$V2 := \left(\frac{1}{r^2}\right)\bar{e}_r + (\sin(\phi))\bar{e}_\phi + (\cos(\theta))\bar{e}_\theta$$

> $v3 := Vector([1, 2, 3])$

$$v3 := e_r + 2e_\phi + 3e_\theta$$

Градиент

Градиент <u>скалярной функции</u> многих переменных f(x,y,z)

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

∇

VectorCalculus:

- **Gradient(f, c), Del(f,c), Nabla(f,c)** – градиент <u>функции многих переменных</u> **f**, **c** – (необязательный) список переменных или координат
- **linalg: grad(f,[x,y,z], c), c:** coords=cylindrical, coords=spherical

> $with(VectorCalculus):$

> $u := \arctan(y/x) : g := \mathrm{Gradient}(\mathrm{u}, [\mathrm{x}, \mathrm{y}])$

$$g := -\frac{y}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}\bar{e}_x + \left(\frac{1}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}\right)\bar{e}_y$$

> $simplify(g)$

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\bar{e}_x + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\bar{e}_y$$

> $Gradient\left(r^2, \text{'polar'}_{r,\,\theta}\right)$

$$2\, r\bar{e}_r$$

> $SetCoordinates\left(\text{'spherical'}_{r,\,\phi,\,\theta}\right)$

$$spherical_{r,\,\phi,\,\theta}$$

> $g3 := \nabla\left(r^2\,\phi\right)$

$$g3 := 2\, r\,\phi\bar{e}_r + (r)\bar{e}_\phi$$

Дивергенция и ротор

Дивергенция вектор-функции **F**(x,y,z)

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

VectorCalculus:

- **Divergence(F)** – дивергенция векторного поля F
- **linalg: diverge(F,[x,y,z],c), c:** coords=cylindrical, coords=spherical

Ротор вектор-функции **F**(x,y,z)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \left[\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\right]$$

VectorCalculus:

- **Curl(F)** – ротор векторного поля F в 3D
- **linalg: curl(F,[x,y,z],c), c:** coords=cylindrical, coords=spherical

> $with(VectorCalculus):$

> $SetCoordinates(cartesian_{x,y,z}):$

> $F := VectorField(\langle x^2 \cdot y \cdot z, x \cdot y^2 \cdot z, x \cdot y \cdot z^2 \rangle)$

$$F := (x^2 y z)\bar{e}_x + (x y^2 z)\bar{e}_y + (x y z^2)\bar{e}_z$$

> $divF := Divergence(F)$

$$divF := 6 x y z$$

> $curlF := Curl(F)$

$$curlF := (x z^2 - x y^2)\bar{e}_x + (x^2 y - y z^2)\bar{e}_y + (y^2 z - x^2 z)\bar{e}_z$$

Лапласиан

Лапласиан скалярной функции f(x,y,z)

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

VectorCalculus:

- **Laplacian(f, c)** – лапласиан функции многих переменных
- **Laplacian(F)** – лапласиан векторного поля

c – (необязательный) список переменных или координат

- **linalg: laplacian(f,[x,y,z],c), c:** coords=cylindrical, coords=spherical

> $with(VectorCalculus):$

> $SetCoordinates(cartesian_{x,y}):$

> $v := VectorField\left(\left\langle x, \frac{y}{x}\right\rangle\right);$

$$v := (x)\bar{e}_x + \left(\frac{y}{x}\right)\bar{e}_y$$

> $Laplacian(v)$

$$\frac{2\,y}{x^3}\bar{e}_y$$

> $restart, with(VectorCalculus):$

> $u := x^3 + a\cdot x\cdot y^2:$

> $DeltaU := Laplacian(u, [x, y]);$

$$DeltaU := 6\,x + 2\,a\,x$$

Матрица Якоби и якобиан

Матрица Якоби вектор-функции **F**(x,y,z)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} & \frac{\partial F_y}{\partial z} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

VectorCalculus:

- **Jacobian(f, v, det); Jacobian(f, v=p, det)** – матрица Якоби и якобиан **f**, где
- **f -** <u>вектор-функция, вектор или векторное поле</u>
- **v** – (необязательный) список переменных дифференцирования или координат. Запись v=p задает точку, в которой будет вычисляться матрица Якоби
- **det** – (необязательный) параметр в виде **determinant=true/false** позволяет вычислить якобиан (определитель). Запись **determinant** эквивалентна determinant=true
- **linalg:** **jacobian(f,[x,y,z])**

Примеры вычисления матрицы Якоби и якобиана

> $with(VectorCalculus)$:

v1 - вектор-функция многих переменных (задана как список выражений)

> $v1 := \left[x, \frac{y}{x}\right]$

$$v1 := \left[x, \frac{y}{x}\right]$$

> $Jacobian(v1, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

Если не указать переменные дифференцирования, будет ошибка

> $Jacobian(v1)$

```
Error, (in VectorCalculus:-Jacobian) unable
to determine differentiation variables
```

v2 - вектор

> $v2 := Vector\left(\left[x, \frac{y}{x}\right]\right)$

$$v2 := (x)e_x + \left(\frac{y}{x}\right)e_y$$

> $Jacobian(v2, [x, y], determinant)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}, \frac{1}{x}$$

v3 - векторное поле

> $SetCoordinates(cartesian_{x,y})$:

> $v3 := VectorField\left(\left\langle x, \frac{y}{x}\right\rangle\right)$

$$v3 := (x)\bar{e}_x + \left(\frac{y}{x}\right)\bar{e}_y$$

Можно не указывать переменные дифференцирования, так как задана система координат

> $Jacobian(v3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби в полярных координатах

> $Jacobian\left(Vector\left(\left[r^2, r\,t\right], 'coordinates' = '\mathrm{polar}'_{r,t}\right)\right)$

$$\begin{bmatrix} 2r & 0 \\ t & r \end{bmatrix}$$

Матрица Якоби и якобиан в точке

> $Jacobian(\langle x^2 + y, 2y\rangle, [x, y] = [-1, 1], determinant)$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, -4$$