

ЕГЭ-14 (4 минуты)^a

Содержание

14.1 Перевод из 10-ной с.с. в p -ную с.с.	2
14.2 Системы счисления и Python	2
14.3 Практикум по программированию. Часть А	5
14.3.1 Стандартные системы счисления и стандартный вопрос	5
Задания для самостоятельной работы	7
Задания для дополнительной отработки	7
14.3.2 Нестандартные системы счисления и стандартный вопрос	8
Задания для самостоятельной работы	10
Задания для дополнительной отработки	10
14.3.3 Сумма цифр, подбор x . Задачи типа ЕГЭ-2024	11
Задания для самостоятельной работы	13
Задания для дополнительной отработки	14
14.3.4 Системы счисления и простые числа (повышенный уровень)	15
Задания для самостоятельной работы	15
14.4 Перевод из p -ной с.с. в 10-ную с.с.	16
14.5 Практикум по программированию. Часть В	17
14.5.1 Задачи типа демо-ЕГЭ-2022–2023	17
Задания для самостоятельной работы	18
Задания для дополнительной отработки	19
14.5.2 Задачи типа демо-ЕГЭ-2022–2023 (разные системы счисления)	20
Задания для самостоятельной работы	21
Задания для дополнительной отработки	22
Ответы	23

^a Тестовый вариант (возможны опечатки). Нулевой курс мехмата ЮФУ.

14.1 Перевод из 10-ной с.с. в p -ную с.с.

Общий алгоритм: делим десятичное число на основание новой с.с. p ($N_{10} // p$) и выписываем остатки ($N_{10} \% p$). Деление происходит до тех пор, пока делимое не меньше p . Последняя цифра просто переносится вправо. В ответе полученные цифры записываем в обратном порядке («снизу-вверх»).

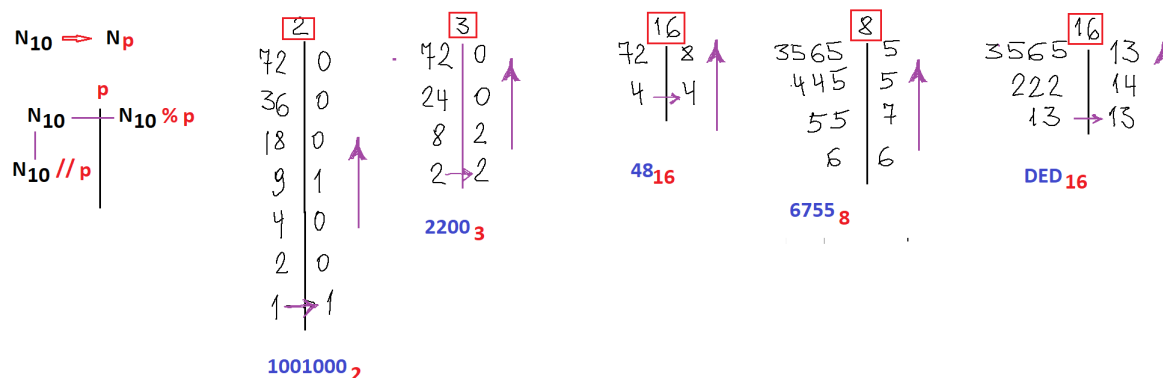


Рис. 1. Перевод $N_{10} \rightarrow N_p, p > 1$

14.2 Системы счисления и Python

Python имеет стандартные функции для перевода 10-ного числа в с.с. с основаниями 2, 8 и 16:

Система счисления	Функция n — целое число в 10-ной с.с.	Пример использования	Вид результата (строка)
2-ая	<code>bin(n)</code>	<code>bin(31)</code>	<code>'0b11111'</code>
8-ая	<code>oct(n)</code>	<code>oct(31)</code>	<code>'0o37'</code>
16-ая	<code>hex(n)</code>	<code>hex(31)</code>	<code>'0x1f'</code>

Аргумент любой из этих функций — целое число; результат — строка с префиксом вида «0буква».

```
>>> bin(35) # здесь 35 - аргумент функции bin()
'0b100011' # это результат выполнения bin(35)
```

Рис. 2. Аргумент и результат функции

```
>>> bin(35)[2:] # срез [2:] уберёт префикс 0b
'100011'
```

Рис. 3. Удаление префикса

Функции Python `bin()`, `oct()`, `hex()` не выдают незначащие нули.

Значащие нули — это нули, являющиеся значимыми для числа. Например, $5 \neq 50 \neq 500$, так как все нули в этих числах значащие. А числа $5 = 05 = 005$, так как все нули в этих числах незначащие.

Использование стандартных функций Python `bin()`, `oct()`, `hex()` см. в примерах 14.1, 14.2, 14.3.

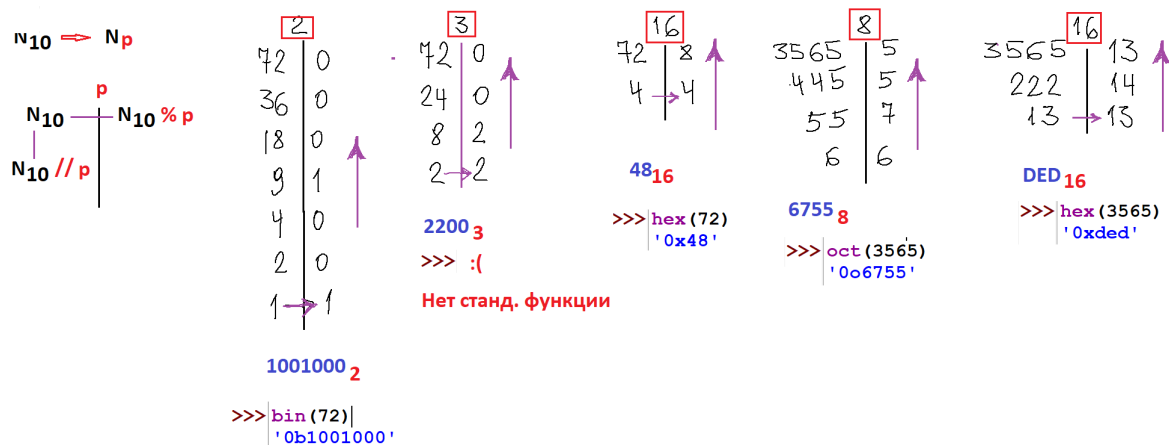


Рис. 4. Перевод $N_{10} \rightarrow N_p$ ($p > 1$) и стандартные функции Python

Нестандартная функция^b для перевода $N_{10} \rightarrow N_p$

Нестандартная функция `n2p()` служит для перевода десятичного числа в «любую» с.с. Функция `n2p()` имеет два параметра: n — десятичное число; p — основание с.с.

Функция перевода $N \rightarrow N_p$, $1 < p \leq 36$

```

1 def n2p(n, p):
2     s = ''
3     while n > 0:
4         dig = n % p
5         sdig = sorted('0123456789qwertyuiopasdfghjklzxcvbnm')[dig]
6         s = sdig + s # порядок важен!
7         n = n // p
8     return s
  
```

Использование функции `n2p(n, p)` см. в примерах 14.6, 14.7, 14.8.

В заданиях ЕГЭ обычно **вопрос формулируется так, что не требуется самого вида числа в некоторой с.с.** Достаточно найти количество заданных цифр, входящих в p -ную запись числа. Если система счисления не стандартная, то проще написать и использовать функции, основанные на алгоритме перевода $N_{10} \rightarrow N_p$ (см. рис. 1).

Шаблон кода для работы с цифрами целого числа в p -ной с.с.

```

1 #... инициализация искомой переменной
2 while n > 0:
3     dig = n % p # цифра числа в p-ной с.с.
4     #... модификация искомой переменной
5     n = n // p
  
```

^bНестандартная функция — функция, созданная пользователем.

Примеры функций для работы с цифрами целого числа

—— I. Функция для поиска количества цифр в p -ной записи десятичного числа n ——

```
def kdig(n, p):
    cnt = 0 # инициализация счётчика цифр
    while n > 0:
        cnt = cnt + 1 # модификация счётчика
        n = n // p
    return cnt # результат

# Пример тестирования функции
print(kdig(9, 8)) # результат 2, так как 9 в 8-ной с.с. это 11_8
```

—— II. Функция для поиска количества цифр d в p -ной записи десятичного числа n ——

```
def kdigD(n, p, d):
    cnt = 0 # счётчик цифр d
    while n > 0:
        dig = n % p # цифра числа в p-ной с.с.
        if dig == d: # если цифра равна d
            cnt += 1 # модификация счётчика
        n //= p
    return cnt # результат

# Пример 1 тестирования функции Находим кол-во 0 в десятичном числе 10200
print(kdigD(10200, 10, 0)) # результат 3

# Пример 2 тестирования функции Находим кол-во 1 в 8-чной записи числа 520
print(kdigD(520, 8, 1)) # результат 2. Действительно, 520 = 1010_8
```

—— III. Функция для поиска суммы всех цифр в p -ной записи десятичного числа n ——

```
def sumdig(n, p): # сумма цифр в p-ной записи числа n_10
    sm = 0 # инициализация суммы
    while n > 0:
        dig = n % p
        sm = sm + dig # модификация суммы
        n = n // p
    return sm # результат: сумма цифр числа

# Пример 1 тестирования функции. Находим сумму цифр в десятичном числе 172
print(sumdig(172, 10)) # результат 10 (1 + 7 + 2)

# Пример 2 тестирования функции. Находим сумму цифр в 8-ной записи числа 172
print(sumdig(172, 8)) # результат 11, так как 172 = 254_8 -> 2 + 5 + 4 = 11
```

Примечание. Сумма цифр при переводе любого числа в p -ную систему счисления **всегда** получается в 10-ной с.с.

14.3 Практикум по программированию. Часть А

14.3.1 Стандартные системы счисления и стандартный вопрос

Пример 14.1. Значение арифметического выражения $8^{675} + 2^{2024} - 25$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько единиц содержится в этой записи?

Использование стандартной функции `bin()`. Ответ: 2023

```
n = 8**675 + 2**2024 - 25 # задаем выражение
n2 = bin(n)[2:]          # срез строки вид '0b1...' - со второго символа до конца
print(n2.count('1'))     # метод count ищет в строке n2 количество '1'.
```

Пример 14.2. Значение арифметического выражения $8^{675} + 5 \cdot 2^{2024} - 21$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько семёрок содержится в этой записи?

Использование стандартной функции `oct()`. Ответ: 672

```
n = 8**675 + 5*2**2024 - 21
n8 = oct(n)[2:]
print(n8.count('7'))
```

Пример 14.3. Значение арифметического выражения $8^{500} - 2^{250} + 35$ записали в системе счисления с основанием 16. Сколько цифр «f» содержится в этой записи?

Использование стандартной функции `hex()`. Ответ: 312

```
n = 8**500 - 2**250 + 35
n16 = hex(n)[2:]
print(n16.count('f'))
```

Пример 14.4. Сколько значащих нулей содержится в десятичной записи значения арифметического выражения $100^{25} - 10^{15} + 120$?

Использование стандартной функции `str()`. Ответ: 13

```
n = 100**25 - 10**15 + 120
n10 = str(n)
print(n10.count('0'))
```

Пример 14.5. Значение арифметического выражения $(8^{120} - 15) \cdot (4^{120} + 20)$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько различных цифр встречается в этой записи?

Решение. I способ. Самый простой, но ненадежный способ — напечатать восьмеричное число и посчитать вручную количество различных цифр. Велик риск ошибки!

Способ I. Ответ: 7

```
y = (8**120 - 15) * (4**120 + 20)
y8 = oct(y)[2:]
print(y8) # Результат работы программы -- строка, длиной 201 символ
```

Решение. II способ. Организация цикла for с параметром, пробегающим все 8-ричные цифры. В теле цикла проверяем условие «некоторая цифра есть в 8-ной записи исходного выражения». Если цифра в строке находится, то увеличиваем счётчик цифр. Алгоритм со счётчиком необходимо знать обязательно.

Способ II. Ответ: 7

```
y = (8**120 - 15) * (4**120 + 20)
y8 = oct(y)[2:]

cnt = 0 # счётчик разных цифр
for x in '01234567': # x - одна из 8-ричных цифр
    if x in y8:
        cnt += 1
print(cnt)
```

Решение. III способ. Использование функции set() для преобразования строки в множество. В любом множестве каждый символ будет находиться однократно. Для получения ответа либо множество вывести на экран и вручную посчитать количество его элементов, либо сразу вывести длину множества, используя функцию len().

Способ III. Ответ: 7

```
y = (8**120 - 15) * (4**120 + 20)
y8 = oct(y)[2:]

y8set = set(y8) # формируем множество, которое содержит каждый символ однократно

print(y8set) # печать множества для контроля {'1', '4', '3', '7', '2', '0', '6'}
print(len(y8set)) # количество элементов в множестве
```

Задания для самостоятельной работы

№ 14.1 (→). Значение арифметического выражения $4^{2021} + 2^{2025} - 16$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько единиц содержится в этой записи?

№ 14.2 (→). Значение арифметического выражения $4^{2025} + 8^{205} - 2^{110} - 80$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько значащих нулей содержится в этой записи?

№ 14.3 (→). Значение арифметического выражения $4^{205} + 8^{100} - 2^{50} + 162$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько двоек содержится в этой записи?

№ 14.4 (→). Значение арифметического выражения $(8^{2200} - 1) \cdot (4^{2200} + 2)$ записали в системе счисления с основанием 16. Сколько значащих нулей содержится в этой записи?

№ 14.5 (→). Значение арифметического выражения $10^{100} - 10^{20} + 10450$ записали в системе счисления с основанием 10. Сколько различных цифр встречается в этой записи?

Задания для дополнительной отработки

№ 14.6 (→). Значение арифметического выражения $4^{111} + 2^{111} - 111$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько единиц содержится в этой записи?

№ 14.7 (→). Значение арифметического выражения $5 \cdot (2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^5)$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько значащих нулей содержится в этой записи?

№ 14.8 (→). Значение арифметического выражения $4^{235} + 4^{100} - 3 \cdot 2^{50} + 60$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько цифр «4» и «7» содержится в этой записи? В ответе запишите одно число — сумму количества цифр «4» и количества цифр «7».

№ 14.9 (→). Значение арифметического выражения $(8^{1200} - 10) \cdot (4^{1200} + 20)$ записали в системе счисления с основанием 16. Сколько различных цифр встречается в этой записи?

№ 14.10 (→). Значение арифметического выражения $8^{430} - 4^{160} + 2^{442} - 25$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько единиц содержится в этой записи?

№ 14.11 (→). Значение арифметического выражения $4^{1025} - 4^{1024} + 4^{2025} - 2024$ записали в системе счисления с основанием 2. Сколько значащих нулей содержится в этой записи?

№ 14.12 (→). Значение арифметического выражения: $64^{640} + 8^{800} - 1024$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько цифр «7» в этой записи?

№ 14.13 (→). Значение арифметического выражения: $9 \cdot 64^{64} + 10 \cdot 8^{100} - 23$ записали в системе счисления с основанием 16. Сколько цифр «9» в этой записи?

№ 14.14 (→). Значение арифметического выражения: $64^{640} - 2^{640} + 8^{100} - 480$ записали в системе счисления с основанием 16. Сколько чётных 16-ричных цифр в этой записи?

14.3.2 Нестандартные системы счисления и стандартный вопрос

Пример 14.6. Значение арифметического выражения: $343^4 - 7^{11} + 7^8 - 49$ записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр «6» содержится в этой записи?

Решение. Для решения этой задачи достаточно использовать функцию для подсчёта заданных цифр в p -ной записи десятичного числа (см. вариант А). В коде В использован другой подход — перевод десятичного числа в p -ую с.с.

Вариант А. Ответ: 7

```
def kdigD(n, p, d):
    cnt = 0
    while n > 0:
        dig = n % p
        if dig == d:
            cnt += 1
        n //= p
    return cnt # результат - количество цифр d

n = 343**4 - 7**11 + 7**8 - 49
k6 = kdigD(n, 7, 6)
print(k6)
```

Вариант В. Ответ: 7

```
def n2p(n, p):
    s = ''
    while n > 0:
        dig = n % p
        sdig = str(dig)
        s = sdig + s
        n = n // p
    return s # результат - число в p-ной с.с.

n = 343**4 - 7**11 + 7**8 - 49
n7 = n2p(n, 7) # значение выражения n в 7-ной с.с.
k6 = n7.count('6') # количество шестёрок
print(k6) # 7
print(n7) # печать числа в 7-ной с.с. для контроля: 600066666600_7
```

Пример 14.7 (демо-2024). Значение арифметического выражения

$$3 \cdot 3125^8 + 2 \cdot 625^7 - 4 \cdot 625^6 + 3 \cdot 125^5 - 2 \cdot 25^4 - 2024$$

записали в системе счисления с основанием 25. Сколько значащих нулей содержится в этой записи?

Решение. Вариант А: функция для подсчёта количества заданной цифры в p -ной записи десятичного числа.

Вариант А. Ответ: 9

```
def kdigD(n, p, d):
    cnt = 0
    while n > 0:
        dig = n % p
        if dig == d:
            cnt += 1
        n //= p
    return cnt

n = 3*3125**8 + 2*625**7 - 4*625**6 + 3*125**5 - 2*25**4 - 2024
k0 = kdigD(n, 25, 0)
print(k0)
```

Вариант В: функция для перевода $N_{10} \rightarrow N_p$ и поиск заданной цифры в строке.

Вариант В. Ответ: 9

```
def n2p(n, p):
    s = ''
    while n > 0:
        dig = n % p
        sdig = sorted('0123456789qwertyuiopasdfghjklzxcvbnm')[dig]
        s = sdig + s
        n = n // p
    return s

n = 3*3125**8 + 2*625**7 - 4*625**6 + 3*125**5 - 2*25**4 - 2024
n25 = n2p(n, 25)
k0 = n25.count('0')
print(k0)    # 9 ok
print(n25)   # печать числа в 25 с.с. для контроля: 3000001o10000eoомolj1_25
```

Задания для самостоятельной работы

№ 14.15 (→). Значение арифметического выражения: $81^3 + 27^4 - 9^5 + 3^6 - 19$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

№ 14.16 (→). Значение арифметического выражения: $2 \cdot 343^3 + 6 \cdot 49^5 - 2 \cdot 7^6 - 8$ записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр «6» содержится в этой записи?

№ 14.17 (→). Значение арифметического выражения: $3 \cdot 32^8 - 2 \cdot 4^{10} + 3$ записали в системе счисления с основанием 4. Сколько цифр «3» содержится в этой записи?

№ 14.18 (→). Значение выражения $9 \cdot 256^{2025} + 8 \cdot 128^{2024} - 5 \cdot 64^{2023} - 4 \cdot 8^{2022} - 3078$ записали в системе счисления с основанием 64. Определите количество значащих нулей в этой записи.

№ 14.19 (→). Значение арифметического выражения $3 \cdot 289^{10} - 3 \cdot 17^{15} + 5 \cdot 17^3 - 11 \cdot 17^5$ записали в системе счисления с основанием 17. Цифры в этой записи имеют вид: 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F, G. Сколько цифр «G» встречается в этой записи?

Указание. Программу написать в двух вариантах:

1) с использованием функции `kDigD()`; 2) с использованием функции `n2p()`. См. [пример 14.7](#).

Задания для дополнительной отработки

№ 14.20 (→). Значение арифметического выражения: $81^8 + 9^5 - 6$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

№ 14.21 (→). Значение выражения $729^{515} - 8 \cdot 81^{520} + 5 \cdot 81^{510} - 3 \cdot 9^{530} - 1992$ записали в системе счисления с основанием 9. Определите количество значащих нулей в этой записи.

№ 14.22 (→). Значение выражения $7 \cdot 8^{55} - 6 \cdot 16^{25} - 5 \cdot 32^{25}$ записали в системе счисления с основанием 64. Определите количество нечётных цифр в записи этого числа.

№ 14.23 (→). Значение арифметического выражения $225^{20} - 10 \cdot 15^{25} + 15^{15}$ записали в системе счисления с основанием 15. Цифры в этой записи имеют вид: 0, 1, ..., 9, a, b, c, d, e. Сколько цифр «e» встречается в этой записи?

Указание. Программу написать в двух вариантах:

1) с использованием функции `kDigD()`; 2) с использованием функции `n2p()`. См. [пример 14.7](#).

14.3.3 Сумма цифр, подбор x . Задачи типа ЕГЭ-2024

Примечание.

- 1) Сумма цифр числа в любой системе счисления всегда десятичное число.
- 2) Сумма цифр в двоичной записи числа равна количеству единиц.

Пример 14.8. Число 324 записали в системах счисления с основаниями от 2 до 10 включительно. При каких основаниях сумма цифр этого числа чётная? В ответе укажите сумму всех подходящих оснований.

Решение. Вариант А: функция для подсчёта суммы цифр в p -ной записи десятичного числа; накопление суммы оснований для ответа.

Вариант А. Ответ: 30

```
def sumdig(n, p): # сумма цифр в p-ной записи числа n_10
    sm = 0
    while n > 0:
        dig = n % p
        sm = sm + dig
        n = n // p
    return sm

sm = 0 # инициализация суммы оснований
for p in range(2, 11):
    smd = sumdig(324, p) # находим сумму цифр в p-ной записи числа 324
    if smd % 2 == 0:      # если сумма цифр чётная
        sm += p          # добавляем основание с.с. в сумму
print(sm)
```

Вариант В: функция для подсчёта суммы цифр в p -ной записи десятичного числа; накопление оснований в отдельном списке.

Вариант В. Ответ: 30

```
def sumdig(n, p): # сумма цифр в p-ной записи числа n_10
    sm = 0
    while n > 0:
        dig = n % p
        sm = sm + dig
        n = n // p
    return sm

t = [] # инициализация списка оснований
for p in range(2, 11):
    smd = sumdig(324, p) # находим сумму цифр в p-ной записи числа 324
    if smd % 2 == 0:      # если сумма цифр чётная
        t += [p]          # добавляем основание с.с. в список
print(sum(t)) # 30 - ответ
print(t)      # [3, 5, 6, 7, 9] - печать списка для самопроверки
```

Вариант С: перевод десятичного числа в p -ую с.с.; поиск суммы цифр в строке; накопление оснований в отдельном списке.

Вариант С. Ответ: 30

```
def n2p(n, p): # упрощенный
    s = ''
    while n > 0:
        dig = n % p
        sdig = str(dig)
        s = sdig + s
        n = n // p
    return s # результат: строковое представление числа n_p

t = [] # инициализация списка оснований
for p in range(2, 11):
    np = n2p(324, p) # перевод 10-го числа 324 в p-ую с.с.
    smd = sum(int(d) for d in np) # сумма цифр в строке
    if smd % 2 == 0: # если сумма цифр чётная
        t += [p] # добавляем основание с.с. в список

print(sum(t)) # 30
print(t) # [3, 5, 6, 7, 9] - печать списка для самопроверки
```

Пример 14.9. При каком наименьшем натуральном значении переменной x в выражении

$$49^{13} - 7^x + 104$$

сумма цифр в семеричной записи числа равна 68?

Ответ: 16

```
def sumdig(n, p): # сумма цифр в p-ной записи числа n_10
    sm = 0
    while n > 0:
        dig = n % p
        sm = sm + dig
        n = n // p
    return sm

for x in range(2, 100):
    n = 49**13 - 7**x + 104
    smd = sumdig(n, 7) # находим сумму цифр в числе n_7
    if smd == 68:
        print(x)
        break
```

Пример 14.10 (типа ЕГЭ-2024). Значение арифметического выражения $6^{100} - x$, где x — целое положительное число, не превышающее 2025, записали в шестеричной системе счисления. Определите наибольшее значение x , при котором в шестеричной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, содержится ровно три значащих нуля. В ответе запишите число в десятичной системе счисления.

Ответ: 1944

```
def kdigD(n, p, d):
    cnt = 0
    while n > 0:
        dig = n % p
        if dig == d:
            cnt += 1
        n //= p
    return cnt

t = []
for x in range(1, 2025+1):
    y = 6**100 - x
    k0 = kdigD(y, 6, 0)
    if k0 == 3:
        t += [x]
print(max(t))
```

Задания для самостоятельной работы

№ 14.24 (→). Значение арифметического выражения $5^{100} - 2x$, где x — целое положительное число, не превышающее 10050, записали в системе счисления с основанием 5. Определите наибольшее значение x , при котором в пятеричной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, содержится ровно пять значащих нулей. В ответе запишите число в десятичной системе счисления.

№ 14.25 (→). Значение арифметического выражения $4^{2024} + 4^{100} - x$, где x — целое положительное число, не превышающее 2024, записали в четверичной системе счисления.

Определите наибольшее количество нулей, которое может содержать число, являющееся четверичной записью значения данного арифметического выражения.

№ 14.26 (→). Значение арифметического выражения

$$5 \cdot 324^{1024} + 125 \cdot 64^{124} - 25 \cdot 49^{24} - 2025$$

записали в системе счисления с основанием 29. Определите сумму цифр с числовым значением, не превышающим 15, в записи этого числа.

№ 14.27 (→). Число 735 записали в системах счисления с основаниями от 2 до 64 включительно. При каких основаниях сумма цифр этого числа оканчивается двойкой? В ответе укажите количество всех подходящих оснований.

Задания для дополнительной отработки

№ 14.28 (→). При каком наименьшем натуральном значении переменной x двоичная запись выражения $4^{2024} + 2^x - 2^{2024} + 24$ содержит ровно 300 единиц?

№ 14.29 (→). Значение арифметического выражения $5^{100} - 2x$, где x — целое положительное число, не превышающее 10050, записали в системе счисления с основанием 5. Определите количество различных значений x , при которых в пятеричной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, содержится ровно пять значащих нулей. В ответе запишите число в десятичной системе счисления.

№ 14.30 (→). Значение арифметического выражения $3^{200} - x + 7$, где x — целое положительное число, не превышающее 17250, записали в системе счисления с основанием 7. Определите количество различных значений x , при которых сумма цифр семеричной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, кратна 13. В ответе запишите число в десятичной системе счисления.

№ 14.31 (→). Значение арифметического выражения $24^{50} - x$, где x — целое положительное число, не превышающее 2025, записали в четверичной системе счисления.

Определите наибольшее значение x , при котором в четверичной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, содержится ровно семь двоек. В ответе запишите число в десятичной системе счисления.

№ 14.32 (→). Число 735 записали в системах счисления с основаниями от 2 до 64 включительно. При каких основаниях сумма цифр этого числа оканчивается двойкой? В ответе укажите количество всех подходящих оснований.

№ 14.33 (→). Число 1324 записали в системах счисления с основаниями от 2 до 10 включительно. При каких основаниях сумма цифр этого числа кратна трём? В ответе укажите сумму всех подходящих оснований.

№ 14.34 (→). Значение арифметического выражения $5 \cdot 6^{2025} + 36^{50} - x$, где x — целое двузначное положительное число, записали в шестеричной системе счисления. Определите наибольшее количество нулей, которое может содержать число, являющееся шестеричной записью значения данного арифметического выражения.

14.3.4 Системы счисления и простые числа (повышенный уровень)

Примечание. В заданиях ЕГЭ-14 пока не было задач, в которых проверяется простота числа.

Пример 14.11. Здесь описана популярная в ЕГЭ функция для проверки простоты натурального числа.

```
Функция для проверки простоты натур. числа
def prime(n):
    if n == 1:
        return False
    for d in range(2, int(n**0.5)+1):
        if n % d == 0:
            return False
    return True

# тестирование функции
for n in range(1, 15):
    if prime(n):
        print(n)
```

```
Результат работы программы
2
3
5
7
11
13
```

Задания для самостоятельной работы

№ 14.35 (→). Число 777 записали в системах счисления с основаниями от 2 до 10 включительно. При каких основаниях сумма цифр этого числа является простым числом? В ответе укажите сумму всех подходящих оснований.

№ 14.36 (→). При каком наименьшем натуральном значении переменной $x > 4$ в выражении

$$49^{13} - 3 \cdot 7^x + 7$$

сумма цифр в семеричной записи числа является простым числом?

№ 14.37 (→). Значение арифметического выражения $7^{200} - x + 7$, где x — целое положительное число, не превышающее 7250, записали в системе счисления с основанием 7. Определите количество различных значений x , при которых сумма цифр семеричной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, является простым числом.

14.4 Перевод из p -ной с.с. в 10-ную с.с.

Общий алгоритм: число, представленное в любой системе счисления, необходимо записать в развёрнутой форме и вычислить его значение.

Развернутая форма записи: любое целое положительное число в позиционной системе счисления с основанием p представляется в виде суммы

$$N_p = n_{i-1}p^{i-1} + \dots + n_1p^1 + n_0p^0.$$

Отдельные слагаемые в этой сумме называются **разрядами** числа, они определяют позицию любой цифры в числе. Старшинство разрядов определяется множителем p^k , $k = 0, \dots, i-1$, а коэффициенты n_k — цифры p -ной с.с.

Примечание к рисунку: переводится число 1023_8 из 8-ной с.с. в 10-ную. Над числом записаны номера разрядов (нумерация происходит справа налево, начиная с 0).

$N_p \rightarrow N_{10}$ развёрнутая форма записи

$\overbrace{3 \ 2 \ 1 \ 0}^{\text{разряды}} \quad \underbrace{1023}_8 = \underbrace{1}_{\text{цифра}} \cdot \underbrace{8^3}_{\text{множитель}} + \underbrace{0}_{\text{цифра}} \cdot \underbrace{8^2}_{\text{множитель}} + \underbrace{2}_{\text{цифра}} \cdot \underbrace{8^1}_{\text{множитель}} + \underbrace{3}_{\text{цифра}} \cdot \underbrace{8^0}_{\text{множитель}} =$

$= 8^3 + 2 \cdot 8 + 3 = 512 + 16 + 3 = 531$

$72 = 2^6 + 2^3 = 1001000_2$

$1001000_2 = 2^6 + 2^3 = 72$

$12 = 2^3 + 2^2 = 1100_2$

$16: 0..9A..F$

$2: 0, 1$
 $8: 0..7$
 $16: 0..9A..F$

обратная форма записи

Рис. 5. Перевод $N_p \rightarrow N_{10}$, $p > 1$

14.5 Практикум по программированию. Часть В

14.5.1 Задачи типа демо-ЕГЭ-2022–2023

Пример 14.12. Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 13: $12x57_{13} + 2x465_{13}$. В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 13-ричной системы счисления. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 12. Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 12 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

Решение (способ А). Каждое число в выражении запишем в развернутой форме:

Число	Математическая запись	Python
43210_{13}	$= 1 \cdot 13^4 + 2 \cdot 13^3 + x \cdot 13^2 + 5 \cdot 13 + 7$	$= 1*13**4 + 2*13**3 + x*13**2 + 5*13 + 7$
$2x468_{13}$	$= 2 \cdot 13^4 + x \cdot 13^3 + 4 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 5$	$= 2*13**4 + x*13**3 + 4*13**2 + 6*13 + 5$

Алгоритм: перебираем в цикле возможные значения x в 13-ной с.с., вычисляем заданное выражение при некотором x , в случае выполнения условия «значение данного выражения кратно 12», печатаем «частное от деления значения арифметического выражения на 12».

Способ А. Ответ: 7970

```
for x in range(13): # x принимает 13 значений: 0, 1, 2, ..., 12
    v1 = 1*13**4 + 2*13**3 + x*13**2 + 5*13 + 7
    v2 = 2*13**4 + x*13**3 + 4*13**2 + 6*13 + 5
    v = v1 + v2
    if v % 12 == 0:
        print(x, v // 12)
```

Результат работы программы

```
2 7970
8 9153
```

В условии задачи сказано «Определите наименьшее значение x ,... Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 12 и укажите его в ответе...». Первое число в ответе печатаем для интереса (полезно посмотреть, при каком x нашлись подходящие числа), второе число в строке — ответ. В нашей задаче ответ 7970.

Недостаток приведённого способа решения: легко сделать ошибку при использовании громоздкой развёрнутой формы записи числа.

Достоинства данного способа решения: позволяет усвоить алгоритм перевода $N_p \rightarrow N_{10}$; решает все задачи такого типа.

Решение (способ В). Используем приём: запишем искомое выражение в виде строки, затем используя стандартную функцию `int(выражение, основание с.с.)`, переводим строку в десятичную систему счисления ($2 \leq \text{основание с.с.} \leq 36$).

```
#Задание алфавита для с.с.
#abc = sorted('0123456789qwertyuiopasdfghjklzxcvbnm')[:13]

abc = '0123456789abc' # если уверены, что помните алфавит ;)

for x in abc: # x принимает 13 значений: 0, 1, 2, ..., 9, a, b, c
    s1 = f'12{x}57'
    s2 = f'2{x}465'
    v = int(s1, 13) + int(s2, 13)
    if v % 12 == 0:
        print(x, v // 12)
```

Недостаток данного способа решения: не проверяет знания алгоритма перевода $N_p \rightarrow N_{10}$; решает не все задачи из-за ограничений функции `int()`, так выражение $123x_{50}$ с помощью этой функции перевести в десятичную с.с. невозможно (основание с.с. $50 \notin [2; 36]$).

Достоинство данного способа решения: не надо использовать громоздкую развёрнутую форму записи.

Задания для самостоятельной работы

№ 14.38 (→)]. Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 17:

$$673x9_{17} + 5x116_{17}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 17-ричной системы счисления. Определите наибольшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 14. Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 14 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.39 (→)]. Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 23:

$$6x3589_{23} + 23x46_{23} + 1x37_{23}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 23-ричной системы счисления. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 22. Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 22 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

№ 14.40 (→)]. Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 15:

$$27xa3_{15} + x171_{15}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 15-ричной системы счисления. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного арифметического выра-

жения кратно 11. Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 11 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

Задания для дополнительной отработки

№ 14.41 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 25:

$$8x74x_{25} + 67x6x_{25}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 25-ричной системы счисления. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 22. Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 22 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.42 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 15:

$$321x5_{15} + 3x211_{15}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 15-ричной системы счисления. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 14. Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 14 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.43 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 13

$$9x323_{13} - 5x75_{13}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 13-ричной системы счисления. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 18. Для найденного значения x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 18. В ответе в десятичной системе счисления запишите значение произведения найденного частного на x . Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.44 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 13:

$$25x47x_{13} + 7986x_{13} + 42x432x_{13}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 13-ричной системы счисления. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 12. Для найденного x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 12 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления.

14.5.2 Задачи типа демо-ЕГЭ-2022–2023 (разные системы счисления)

Пример 14.13. Операнды арифметического уравнения записаны в разных системах счисления:

$$12xA_{11} = 8x0_{14}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра. Определите наименьшее значение x , при котором данное уравнение обращается в тождество. В ответе укажите значение правой части уравнения в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

Решение. Для наглядности запишем цифры заданных систем счисления

11-ая с.с.: 0123456789a

14-ая с.с.: 0123456789abcd

Переменная x — цифра, которая присутствует и в 11-ной с.с., и в 13-ной с.с. Цикл для x должен быть по наименьшей с.с.

Ответ: 1638

```
abc = sorted('0123456789qwertyuiopasdfghjklzxcvbnm')
abc11 = abc[:11]
abc14 = abc[:14]

for x in abc11: # цикл по с.с. с наименьшим основанием
    sL = f'12{x}a'
    sR = f'8{x}0'
    vL = int(sL, 11)
    vR = int(sR, 14)
    if vL == vR:
        print(x, vR) # 5 1638
```

Пример 14.14. Операнды арифметического выражения записаны в системах счисления с основаниями 15 и 17:

$$34E0x_{15} + FyE8_{17}$$

В записи чисел переменными x и y обозначены неизвестные цифры из алфавитов 15-ричной и 17-ричной систем счисления соответственно. Определите значения x, y , при которых значение данного арифметического выражения кратно 109. Для найденных значений x, y вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 109 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Если можно выбрать x, y не единственным образом, возьмите ту пару, в которой значение y меньше. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

Решение. Для наглядности запишем цифры заданных систем счисления

15-ая с.с.: 0123456789abcde

17-ая с.с.: 0123456789abcdefg

Переменная x — цифра, которая присутствует только в 15-ной с.с., а y — только в 17-ной с.с. В программе используются два цикла — каждая переменная изменяется в пределах своей с.с.

— Ответ: 2251 —

```
abc = sorted('0123456789qwertyuiopasdfghjklzxcvbnm')
abc15 = abc[:15]
abc17 = abc[:17]

for x in abc15:
    s15 = f'34e0{x}'
    for y in abc17:
        s17 = f'f{y}e8'
        v = int(s15, 15) + int(s17, 17)
        if v % 109 == 0:
            print(x, y, v // 109) # 3 a 2251
```

Программа выведет три строки

3 a 2251

8 d 2259

d g 2267

Для контроля печатаем значения x и y . Из представленных чисел нужно выбрать то, для которого y наименьшее. Это значение при $y = a$. Ответ: 2251.

Задания для самостоятельной работы

№ 14.45 (→). Операнды арифметического уравнения записаны в разных системах счисления

$$14x2_{13} = 85x_{19}$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра. Определите значение x , при котором данное уравнение обращается в тождество. В ответе укажите значение правой части уравнения в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.46 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системах счисления с основаниями 11 и 15:

$$73x1_{11} + 2y13_{15}.$$

В записи чисел переменными x и y обозначены неизвестные цифры из алфавитов 11-ричной и 15-ричной систем счисления соответственно. Определите значения x, y , при которых значение данного арифметического выражения кратно 79. Для найденных значений x, y вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 79 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Если можно выбрать x, y не единственным образом, возьмите ту пару, в которой значение $x \cdot y$ больше. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.47 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системах счисления с основаниями 15 и 17:

$$3y10x_{15} + 7x2y_{17}.$$

В записи чисел переменными x и y обозначены допустимые в данных системах счисления неизвестные цифры. Определите значения x, y , при которых значение данного арифметического выражения кратно 69. Для найденных значений x, y вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 69 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Если можно выбрать x, y не единственным образом, возьмите ту пару, в которой значение y меньше. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

Задания для дополнительной отработки

№ 14.48 (→). Операнды арифметического уравнения записаны в разных системах счисления:

$$3x9x_{12} = 118x_{18}.$$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра. Определите значение x , при котором данное уравнение обращается в тождество. В ответе укажите значение правой части уравнения в десятичной системе счисления. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.49 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системах счисления с основаниями 13 и 17:

$$37x9_{13} + 9y31_{17}.$$

В записи чисел переменными x и y обозначены неизвестные цифры из алфавитов 13-ричной и 17-ричной систем счисления соответственно. Определите значения x, y , при которых значение данного арифметического выражения кратно 37. Для найденных значений x, y вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 37 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Если можно выбрать x, y не единственным образом, возьмите ту пару, в которой значение $x \cdot y$ меньше. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

№ 14.50 (→). Операнды арифметического выражения записаны в системах счисления с основаниями 13 и 17:

$$3x9y_{13} + 5x2y_{17}.$$

В записи чисел переменными x и y обозначены допустимые в данных системах счисления неизвестные цифры. Определите значения x, y , при которых значение данного арифметического выражения кратно 74. Для найденных значений x, y вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 74 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Если можно выбрать x, y не единственным образом, возьмите ту пару, в которой значение y меньше. Основание системы счисления в ответе указывать не нужно.

Ответы

Раздел 14.3: «Практикум по программированию. Часть А»

№ 14.1: 2022

№ 14.2: 3441

№ 14.3: 2

№ 14.4: 1099

№ 14.5: 5

№ 14.6: 701

№ 14.7: e

№ 14.8: 52

№ 14.9: d

№ 14.10: 044

№ 14.11: 0102

№ 14.12: d97

№ 14.13: E

№ 14.14: 88

Nº 14.15: 7

Nº 14.16: 8

Nº 14.17: 10

Nº 14.18: 338

Nº 14.19: 13

Nº 14.20: 8

Nº 14.21: ୧୮

Nº 14.22: ୦୮

Nº 14.23: ୫୮

Nº 14.24: 9375

Nº 14.25: 1929

Nº 14.26: 7425

Nº 14.27: 6

Nº 14.28: ୮୯୧୯

Nº 14.29: ୧୮

Nº 14.30: ୧୮୫୮

№ 14.31: 4501

№ 14.32: 0

№ 14.33: 18

№ 14.34: 7501

№ 14.35: 16

№ 14.36: 7

№ 14.37: 1201

Раздел 14.5: «Практикум по программированию. Часть В»

№ 14.38: 73095

№ 14.39: 45416567

№ 14.40: 14669

№ 14.41: 782218E

№ 14.42: 9E4E5

№ 14.43: 04875

№ 14.44: 7259095

№ 14.45: 2992

№ 14.46: 221

№ 14.47: 2769

№ 14.48: 70E0

№ 14.49: 5E41

№ 14.50: 5550