Кинематика точки

18.11.2026

1. Траектория и уравнения движения точки

Задать движение точки означает определить ее положение в любой момент времени t относительно некоторой системы отсчета.

Непрерывная кривая, представляющая собой геометрическое место положений точки при ее движении, называется ***траекторией точки***.

Способы задания движения точки:

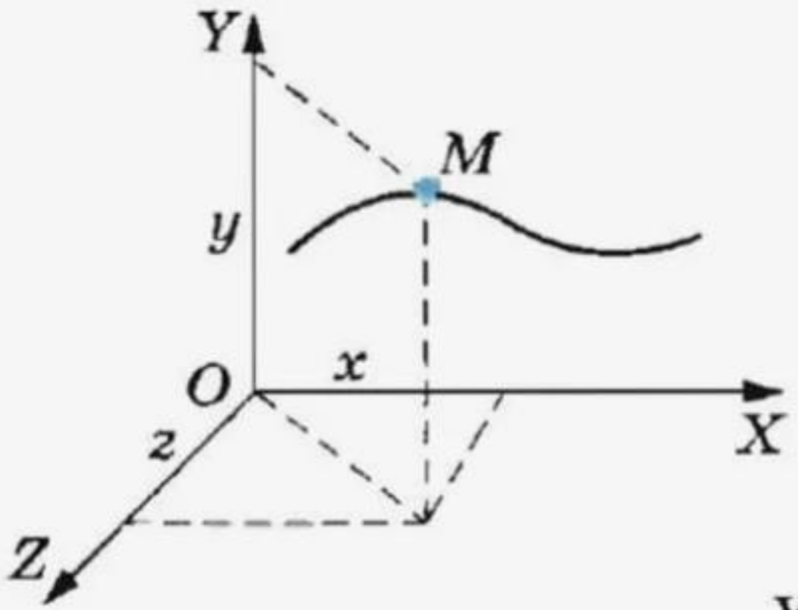
1. Положение точки можно задать радиус-вектором точки (рис. 1.1)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

или тремя скалярными параметрами (координатами точки)

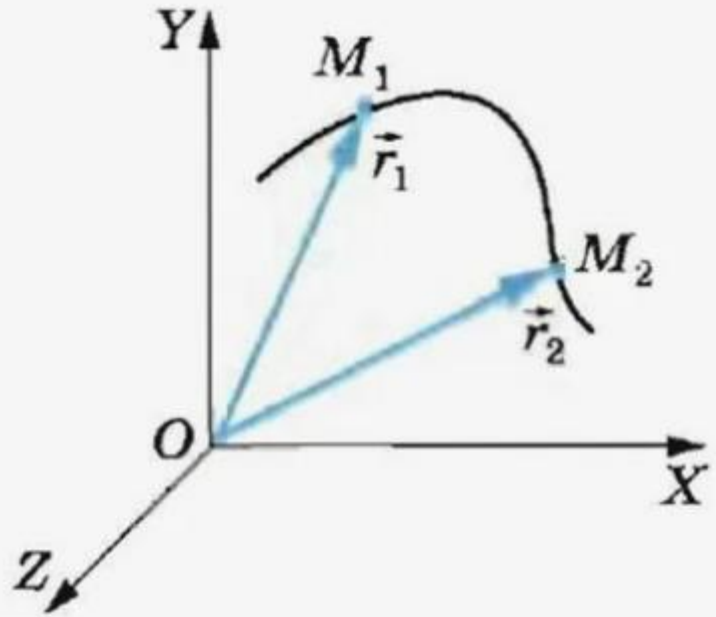
$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

1) Координатный



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

2) Векторный



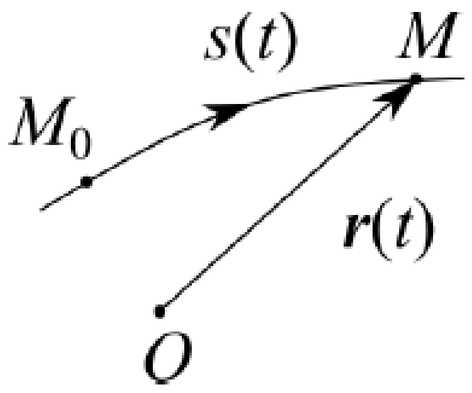
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Если ввести в рассмотрение единичные векторы- орты $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3, |\bar{i}_k| = 1, k = 1,2,3,$ тогда можно перейти от векторного способа к координатному:

$\bar{r}(t) = x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3 = \sum_{k=1}^{3} x_k\bar{i}_k$

При этом $x_k = x_k(t)$ − функции времени, это проекции вектора $\bar{r}(t)$

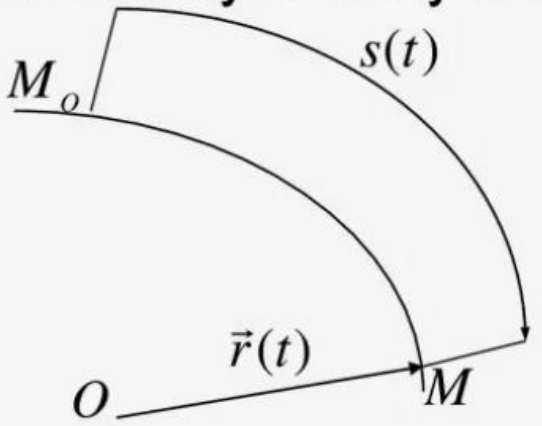
Уравнения (1.1) и (1.2) являются *уравнениями движения точки* в векторной и координатной формах соответственно. Одновременно эти соотношения являются *уравнениями траектории точки* в параметрической форме. Уравнения траектории в координатной форме можно получить, исключив из соотношений (1.2) параметр времени t.



Естественный способ задания движения тела

2. Положение точки можно также определить, задав траекторию точки и закон движения по ней, например, в виде зависимости от времени длины дуги $s(t)$, отсчитываемой от некоторого выбранного начала M_0 в заданном направлении вдоль траектории (рис. 1.1).

$s = s(t) = M_0M$ - дуговая координата (длина дуги, связывающая начальную точку с исследуемой)



Путь l, пройденный точкой при перемещении из положения M_1 в положение M_2 за промежуток времени $t_2 - t_1$, совпадает с расстоянием $|s(t_2) - s(t_1)|$ между положениями M_2 и M_1 на траектории, если движение точки происходит только в одном направлении. Тогда

$$l = \left| \int_{t_1}^{t_2} ds \right|. \qquad (1.3)$$

Закон движения может быть получен из уравнений движения в случае декартовой системы координат так:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Скорость точки

Скоростью точки называется векторная величина

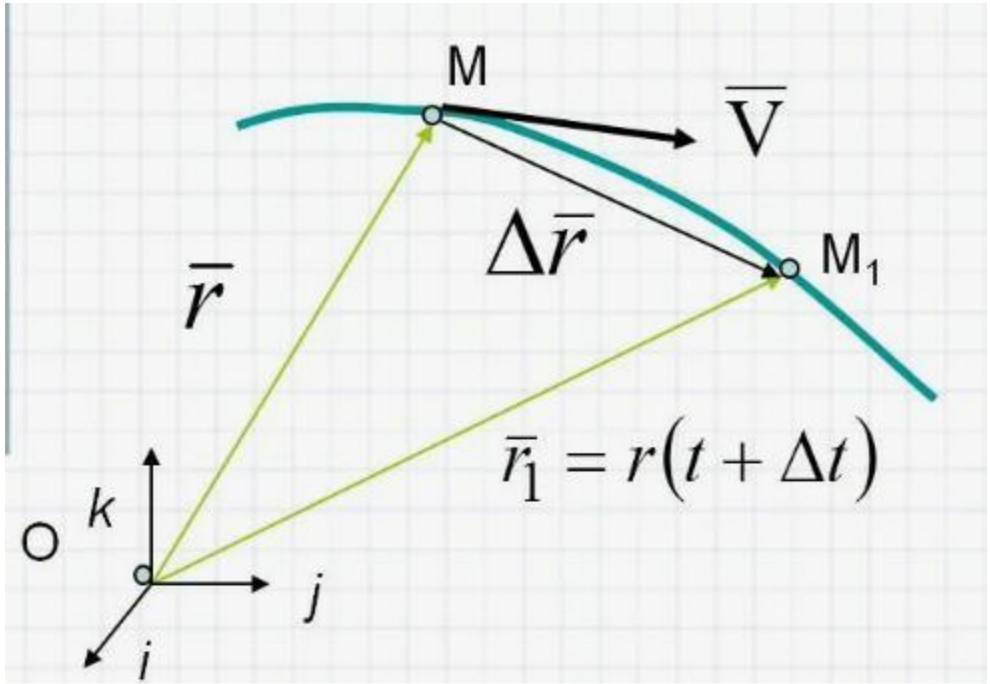
$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}(t).$$

В декартовой системе координат имеем

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Абсолютная величина скорости может быть выражена через проекции вектора

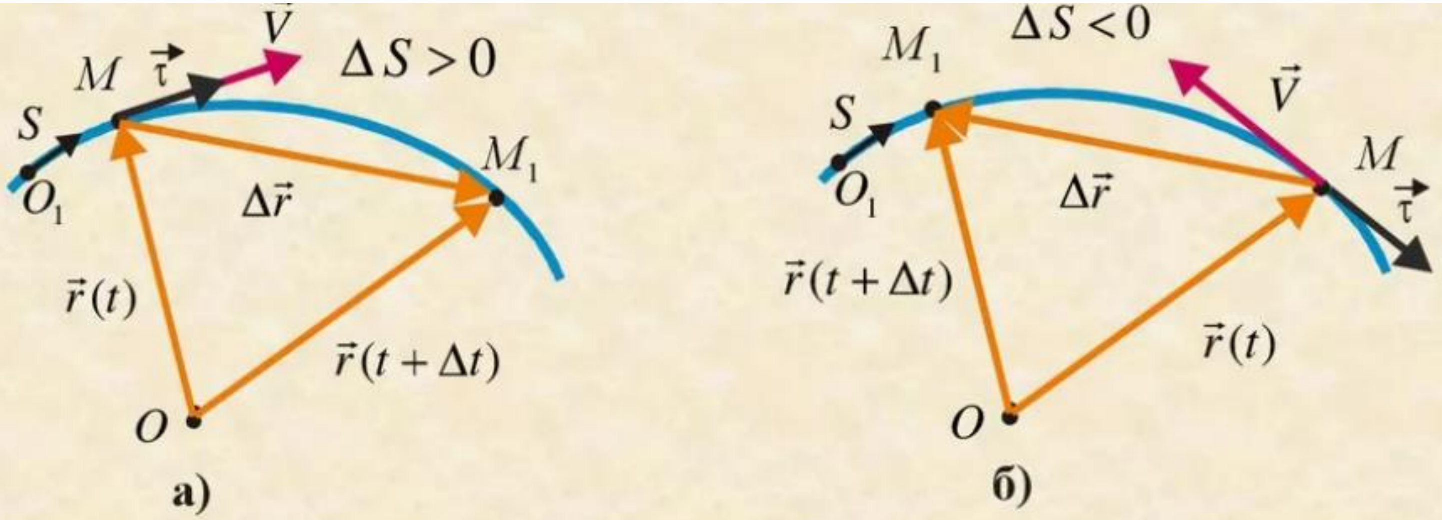
$$v = \sqrt{\sum_{1}^{3} \dot{x}_k^2}$$



а косинусы углов между проекциями $\boldsymbol{v}$ на оси координат и самим вектором скорости $\boldsymbol{v}$ (направляющие косинусы) выражаются следующим образом:

$$\cos\gamma_i = \frac{v_i}{|\boldsymbol{v}|}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При естественном способе задания движения



$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta S} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \dot{S}\vec{\tau} = V_\tau \vec{\tau} \;,$$

где $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{dS}$ *– единичный вектор касательной к траектории точки, направленный в сторону возрастания дуговой координаты* S.

Годографом скорости называют кривую, которую будет описывать конец вектора $\boldsymbol{v}(t)$, если его все время откладывать от общего начала (рис. 2.2). Заметим, что годографом радиус-вектора точки $\boldsymbol{r}(t)$ является траектория точки (рис. 2.1).

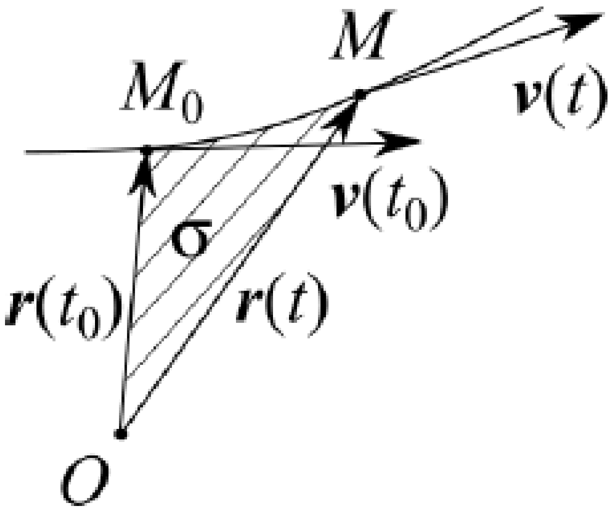


Рис. 2.1

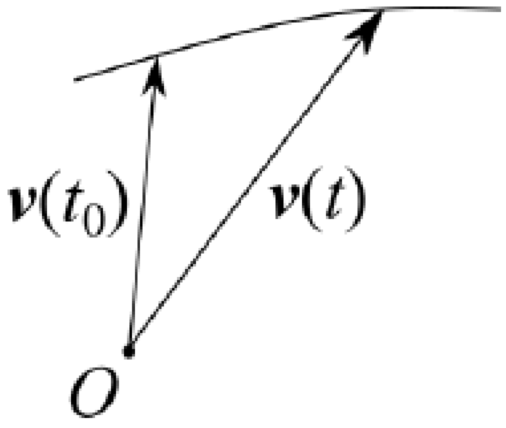


Рис. 2.2