Теорема о делении с остатком

1. Найдите целое частное и остаток от деления:

а) 119 на 5; г) -666 на 13; ж) 60 на 12;
б) -128 на 7; д) 12 345 на 6; з) -225 на 3;
в) 1000 на 11; е) -144 на 7; и) 0 на 77.

2. Поделите с остатком при $n \in \mathbb{N}$:

а) $2n^2 + 4n + 1$ на 2; г) $25n^5 + 10n^4 - 2$ на 5;
б) $15n^4 + 9n^2 + 2$ на 3; д) $12n^2 - 24n + 29$ на 6;
в) $8n^2 + 12n - 3$ на 4; е) $21n^8 - 35n^2 - 44$ на 7.

3. Поделите с остатком при $n \in \mathbb{N}$:

а) $4n^2 + 7n - 1$ на n; в) $6n^6 - 18n^5 + 3$ на $2n$;
б) $6n^7 + 3n - 2$ на n; г) $4n^9 + 14n^5 + 4$ на $2n$.

4. Целые числа a, b и c дают при делении на n остатки $n - 1$, $n - 2$ и $n - 3$, соответственно. Какие остатки при делении на n дают числа:

а) $5a$; г) a^2; ж) $4abc$; к) $abc - 2a^2b^3c^4$?
б) $-7b$; д) b^3; з) $ab - 28c$;
в) $9c$; е) c^4; и) $3a - 5b + 8c$;

Решите задачу для каждого $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

5. Докажите, что любое целое число единственным образом представимо в виде:

а) $6k$, или $6k \pm 1$, или $6k \pm 2$, или $6k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$;
б) $7k$, или $7k \pm 1$, или $7k \pm 2$, или $7k \pm 3$, $k \in \mathbb{Z}$;
в) $10k$, или $10k \pm 1$, или $10k \pm 2$, или $10k \pm 3$, или $10k \pm 4$, или $10k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$;
г) $12k$, или $12k \pm 1$, или $12k \pm 2$, или $12k \pm 3$, или $12k \pm 4$, или $12k \pm 5$, или $12k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Докажите, что квадрат целого числа не может иметь вид:

а) $3k - 1$; в) $5k + 2$; д) $6k + 2$;
б) $4k - 1$; г) $5k - 2$; е) $6k - 1$.

7. Докажите, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.

8. Докажите, что сумма четных степеней двух нечетных чисел не может быть кубом целого числа.

Отношение делимости

1. Докажите, что:

а) произведение двух последовательных целых чисел делится на 2;

б) произведение четырех последовательных целых чисел делится на 4;

в) произведение пяти последовательных целых чисел делится на 5;

г) произведение n последовательных целых чисел делится на n, $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что для любого целого a:

а) $a^{10} - 9a + 8$ делится на 2;

б) $a^5 + 3a^3 - 12$ делится на 4;

в) $a^3 - 7a + 18$ делится на 6;

г) $a^7 - a - 56$ делится на 7;

д) $a^5 - 17a^3 + 24$ делится на 8;

е) $a^9 + 17a^3 - 18$ делится на 9.

3. Докажите, что:

а) разность четных степеней двух нечетных чисел делится на 4;

б) сумма кубов двух последовательных нечетных чисел делится на 4;

в) разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8;

г) сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 3.

4. Докажите, что:

а) $5ab$ делится на 45, если $a^6 + b^6$ делится на 3;

б) $4ab$ делится на 100, если $a^8 + b^8$ делится на 5;

в) $2ab$ делится на 98, если $a^4 + b^4$ делится на 7;

г) $3ab$ делится на 363, если $a^2 + b^2$ делится на 11.

Простые и составные числа

1. Разложите на простые множители числа:

а) 5472; в) 8250; д) 14 125; ж) 25 750;

б) 6624; г) 8775; е) 19 392; з) 34 800.

2. Докажите, что всякое простое число p, большее двух, представимо в виде $4q \pm 1$, $q \in \mathbb{N}$.

3. Докажите, что всякое простое число p, большее трех, представимо в виде $12q \pm 1$ или $12q \pm 5$, $q \in \mathbb{N}$.

4. Найдите все $p \in \mathbb{P}$, для которых $p + 5$, $p + 11 \in \mathbb{P}$.

5. Найдите все $p \in \mathbb{P}$, для которых $p^4 + 15 \in \mathbb{P}$.

6. Докажите, что сумма квадратов двух нечетных простых чисел есть число составное.

7. Докажите, что сумма квадратов четырех нечетных простых чисел есть число составное.

8. Найдите все натуральные n, для которых:

а) $3^n - 1 \in \mathbb{P}$;

б) $6^n - 1 \in \mathbb{P}$;

в) $12^n - 1 \in \mathbb{P}$;

г) $18^n - 1 \in \mathbb{P}$.

9. Докажите, что для любого натурального n:

а) $8^n + 1 \in \mathbb{S}$;

б) $64^n + 1 \in \mathbb{S}$;

в) $125^n + 8 \in \mathbb{S}$;

г) $32^n + 243 \in \mathbb{S}$.

Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное

1. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

а) 10, 5 и -20; в) 1200 и -396; д) 288, 336 и -1220;
б) 14, -21 и -7; г) 8888 и -666; е) 48, 999 и 1580.

2. Сократите дроби:

а) 540/546; в) 1725/2295; д) 2002/1980;
б) $-1224/1440$; г) $-2431/3025$; е) $-819/1690$.

3. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю и найдите их сумму:

а) 1/210, 3/100, 13/294; в) 5/297, 13/396;
б) 1/1224, 7/1500, $-13/1440$; г) 7/1625, $-11/2925$.

1. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите:

а) $(6238, 445)$; в) $(-1836, -5292)$;
б) $(-872, 236)$; г) $(-555, 444)$.

2. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите наибольший общий делитель d чисел a и b и укажите два целых числа x_0, y_0, таких что $d = a \cdot x_0 + b \cdot y_0$:

а) $a = 12,\ b = 28$; г) $a = -80,\ b = -1024$;
б) $a = -34,\ b = 90$; д) $a = 99,\ b = 102$;
в) $a = 91,\ b = -150$; е) $a = 780,\ b = -45$.

3. При любом натуральном n найдите наибольший общий делитель чисел:

а) $n^2 + 3n + 1$ и $n + 3$; б) $3n^4 + 6n^2 + 1$ и $n^3 + 2n$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3n+2}{4n+3}$; б) $\dfrac{6n+5}{8n+7}$; в) $\dfrac{5n+2}{3n+2}$; г) $\dfrac{9n+8}{7n+4}$.

5. Для целых чисел a и b найдите:

а) $(5a+7b, 3a+4b)$, если $(a,b)=3$; в) $(7a+5b, 3a+2b)$, если $(a,b)=2$;
б) $(13a+2b, 20a+3b)$, если $(a,b)=1$; г) $(7a+2b, 11a+3b)$, если $(a,b)=4$.

Взаимно-простые числа

1. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $n^6 - n^2$ делится на 60;

б) $n^7 - n^3$ делится на 120;

в) $10^n + 5$ делится на 15;

г) $7^{6n} - 1$ делится на 18.

2. Докажите, что $n^6 + 17$ делится на 9, если n — целое число, взаимно простое с 9.

3. Докажите, что $n^2 - 1$ делится на 24, если n — целое число, взаимно простое с 6.

4. Докажите, что натуральные числа $4n + 3, 2n + 2$ и $2n + 1$ попарно взаимно просты.

5. Докажите, что натуральные числа $4n - 1$, n и $2n - 1$ попарно взаимно просты.

6. Докажите, что два различных простых числа p и q взаимно просты: $(p, q) = 1$, если $p, q \in \mathbb{P}$, $p \neq q$.

7. Докажите, что взаимно просты целые неотрицательные степени двух различных простых чисел p и q: $(p^n, q^m) = 1$, если $p, q \in \mathbb{P}$, $p \neq q$, $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.