Лабораторная работа 4. Метод градиентного спуска

Определения

Метод градиентного спуска – численный метод нахождения локального минимума или максимума функции с помощью движения вдоль градиента

Градиент – это вектор, который показывает направление самого быстрого роста функции, а его длина показывает, насколько быстро функция растёт в этом направлении
Пусть задана скалярная функция от векторного аргумента $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Градиентом функции $f(x)$ называют вектор-функцию, состоящую из частных производных функции по каждой координате: $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

Постановка задачи

Пусть задана целевая функция $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Задачей оптимизации является задача поиска наименьшего значения функции
$F(x) \to min$

Основная идея метода:

- Вычислить градиент целевой функции
- Итеративно двигаться в направлении, противоположном градиенту

Формула вычисления следующей точки:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \nabla F(x_n) \tag{1}$$

где:

- x_n – текущая точка
- λ – скорость спуска (размер шага)
- $\nabla F(x_n)$ – градиент функции

Как выбрать скорость спуска

1. Константа $\lambda = const$. Метод может расходиться
2. Убывающий в процессе спуска
   - Ступенчатое затухание. Снижение скорости обучения на определенный процент через каждые (n) эпох
   - Экспоненциальное затухание: $\lambda_n = \lambda_0 \cdot e^{-kn}$
   - Затухание по времени: $\lambda_n = \frac{\lambda_0}{1+kn}$

3. Гарантирующий наискорейший спуск: $\lambda_n = argmin_{\lambda} F(x_n - \lambda \nabla F(x_n))$

Алгоритм

1. Аналитически вычисляем градиент целевой функции
2. Задаем начальное приближение x_0 и точность расчета ε
3. Вычисляем следующую точку по формуле (1)
4. Продолжаем данный алгоритм до тех пор, пока не будет выполнено условие остановки

Задания

Варианты заданий

Функции одной переменной

№	Функция
1	$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2$
2	$f(x) = x^6 - x^5 - 5x^4 + x^2$
3	$f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1$
4	$f(x) = x^6 + 2x^5 - 7x^4 + 3$
5	$f(x) = x^8 - 2x^6 - 3x^4 + x^2$
6	$f(x) = x^2 + sin(x) + 0.1x^3$
7	$f(x) = x^4 - 2x^2 + sin(2x) + x$
8	$f(x) = x^2 + sin(3x) + 0.2x$
9	$f(x) = x^6 - 3x^4 + sin(x) + x^2$
10	$f(x) = x^4 + sin(x) + 0.5x^3 - x$

Пространственные функции

№	Функция
1	$f(x, y) = (x^2 - 1)^5 + y^2 + sin(x + y) - 1$
2	$f(x, y) = (1 - x)^2 + 5(y - x^2)^2$
3	$f(x, y) = x^2 + y^2 + 0.3x - 0.2x^5 + sin(x + y)$
4	$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + x + y^2 - 7$
5	$f(x, y) = (x^2 - 2)^2 + y^3 + cos(x - y)$

№	Функция
6	$f(x,y) = (0.2x^2 - 3)^3 + (y+1)^2 + 7 + e^{-x}$
7	$f(x,y) = (0.3x - 6)^3 + (y+4)^2 + e^(- x)$
8	$f(x,y) = (0.1x - 1)^2 + (y+5)^2 + sin(3x)$
9	$f(x,y) = (0.1x + 2)^2 + 0.1y^2 + sin(0.2x + 0.1y)$
10	$f(x,y) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + sin(xy)$

Распределение вариантов

№ варианта	Функция 1	Функция 2
1	3	7
2	8	2
3	1	10
4	6	1
5	10	5
6	4	9
7	7	3
8	2	8
9	9	4
10	5	6
11	1	2
12	6	7
13	3	5
14	8	1
15	2	9
16	10	3
17	4	8
18	7	6
19	9	10
20	5	1
21	2	4
22	6	3

№ варианта	Функция 1	Функция 2
23	8	9
24	1	6
25	7	2
26	3	8
27	10	4
28	5	7
29	4	10
30	9	1
31	1	8
32	4	7
33	10	2
34	9	3
35	3	6

Задания

Сначала выполните задания для функции одной переменной, затем повторите все шаги для пространственной функции

Задание 1

Аналитически вычислите градиент функции

Задание 2

Постройте графики функции и ее градиента

Задание 3

Реализовать алгоритм градиентного спуска на Python

Задание 4

Сравнить результаты выполнения алгоритма при запуске из разных начальных точек