Аффинные преобразования и проецирование в 3D

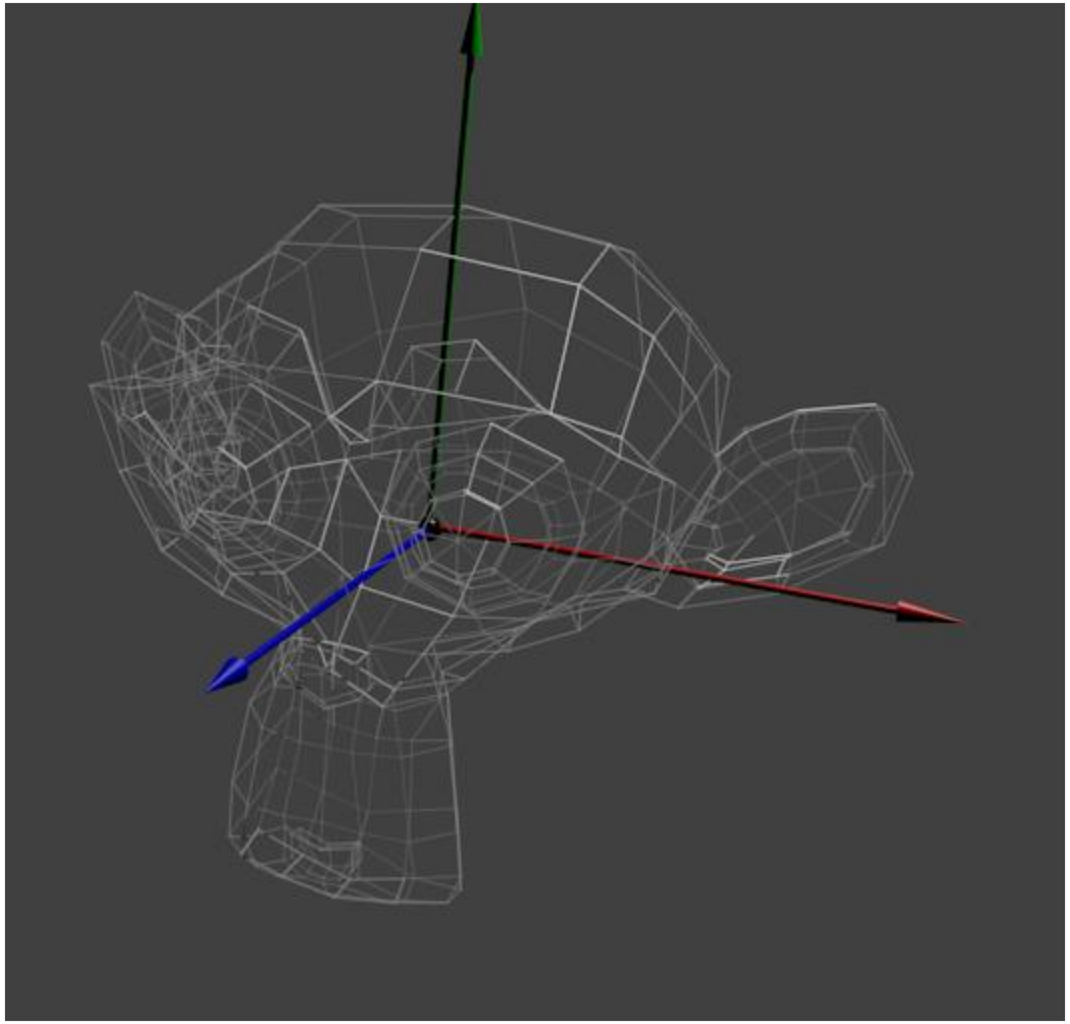
Компьютерная графика

Вопрос

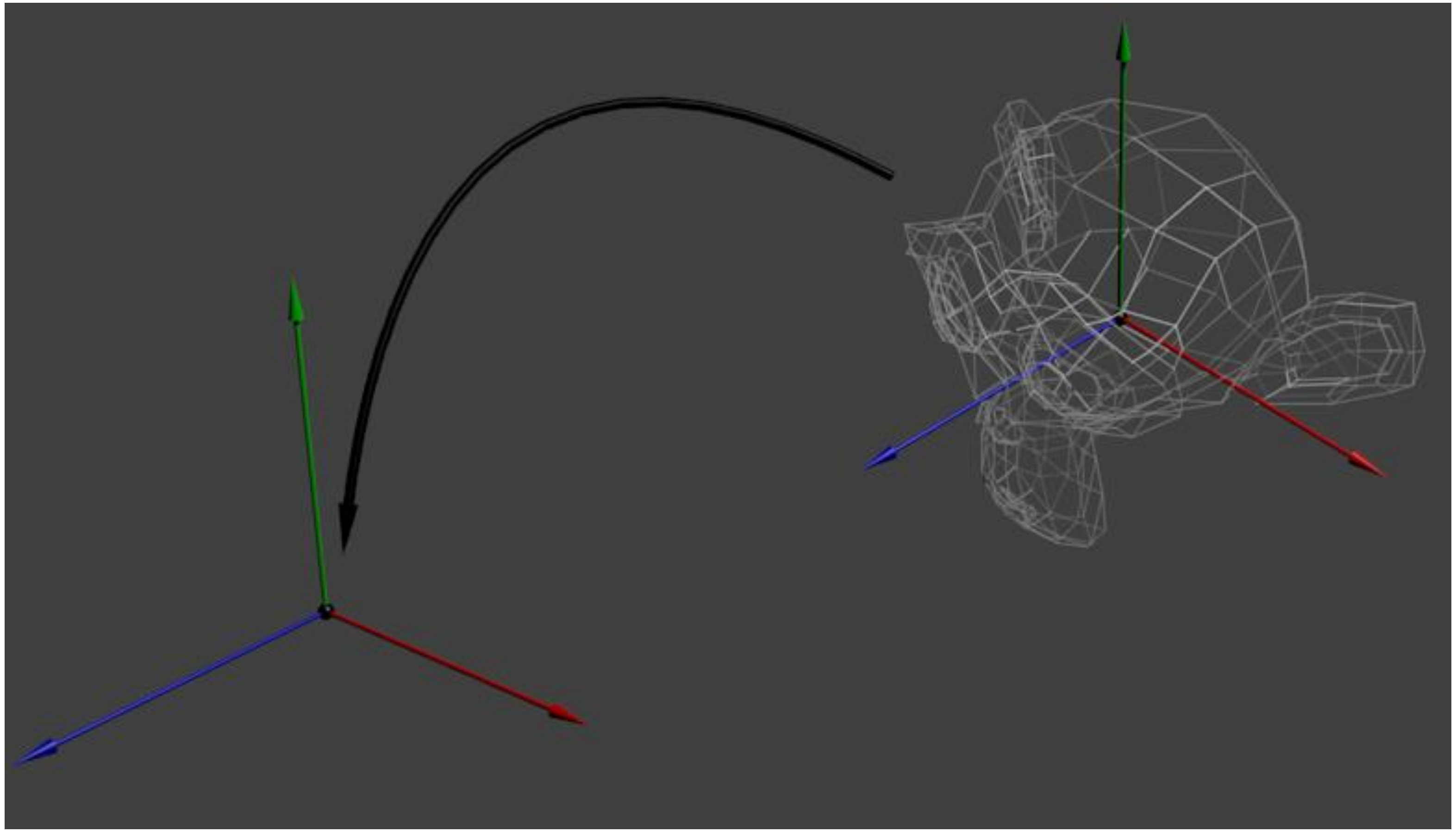
Как 3D объект нарисовать на 2D экране?

Модель в объектных координатах

Модель задается множеством вершин, координаты которых заданы относительно центра объекта, т. е. вершина с координатами (0, 0, 0) будет находиться в центре объекта.

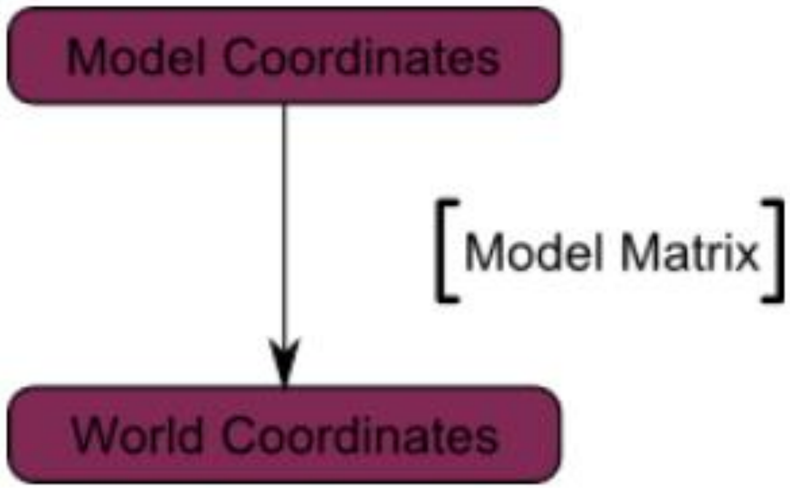


Преобразования к мировым координатам – мировая матрица

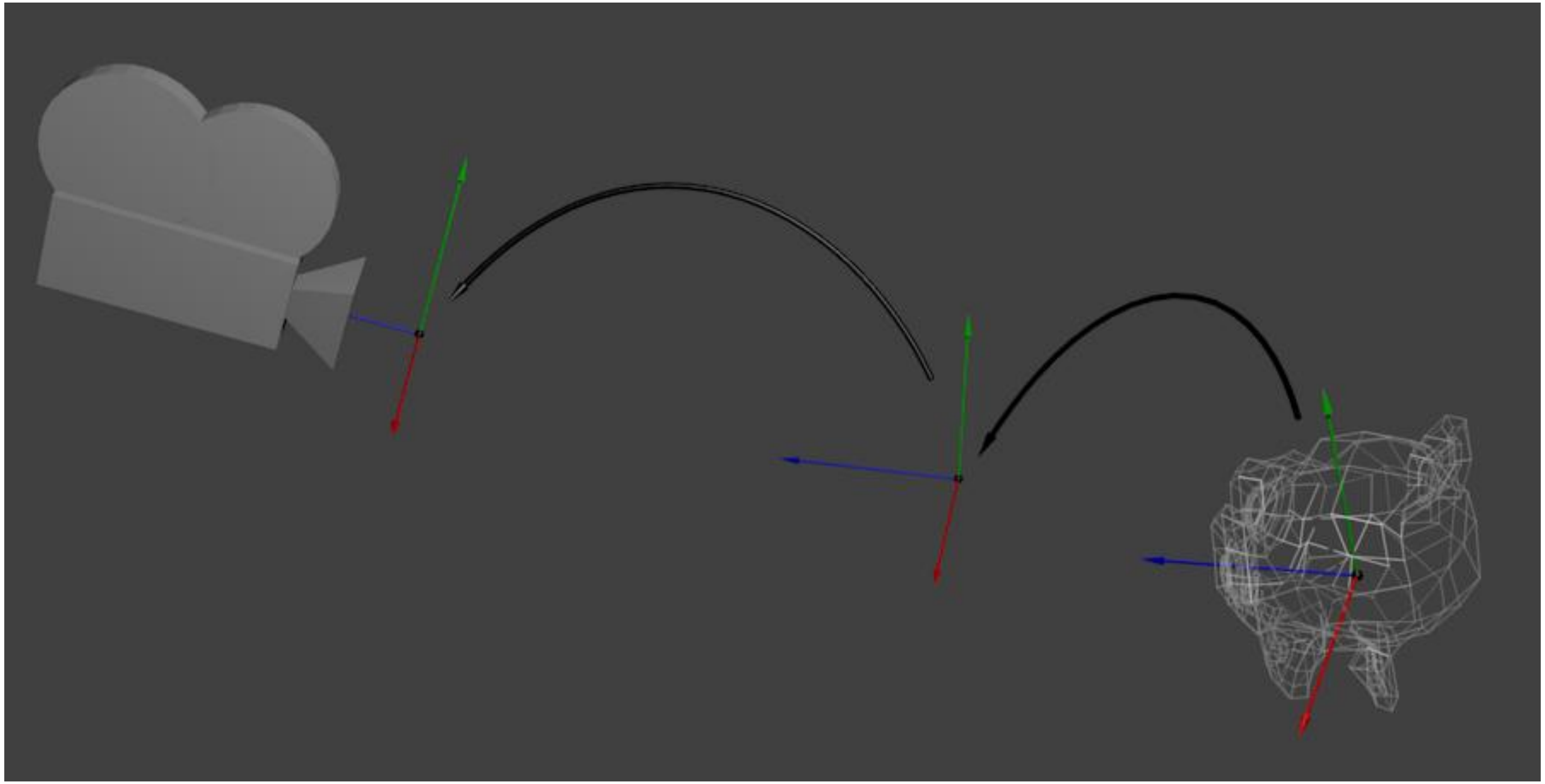


Преобразования к мировым координатам – мировая матрица

Мы перешли из пространства объекта
(все вершины заданы относительно центра объекта)
к мировому пространству
(все вершины заданы относительно центра мира)

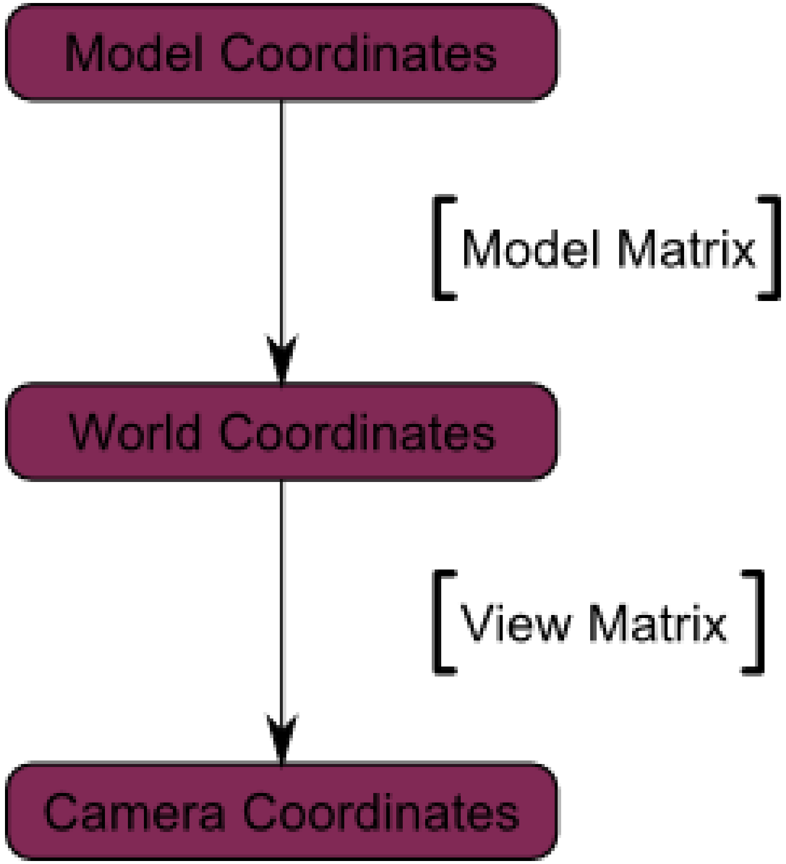


Переход к системе координат камеры – видовая матрица

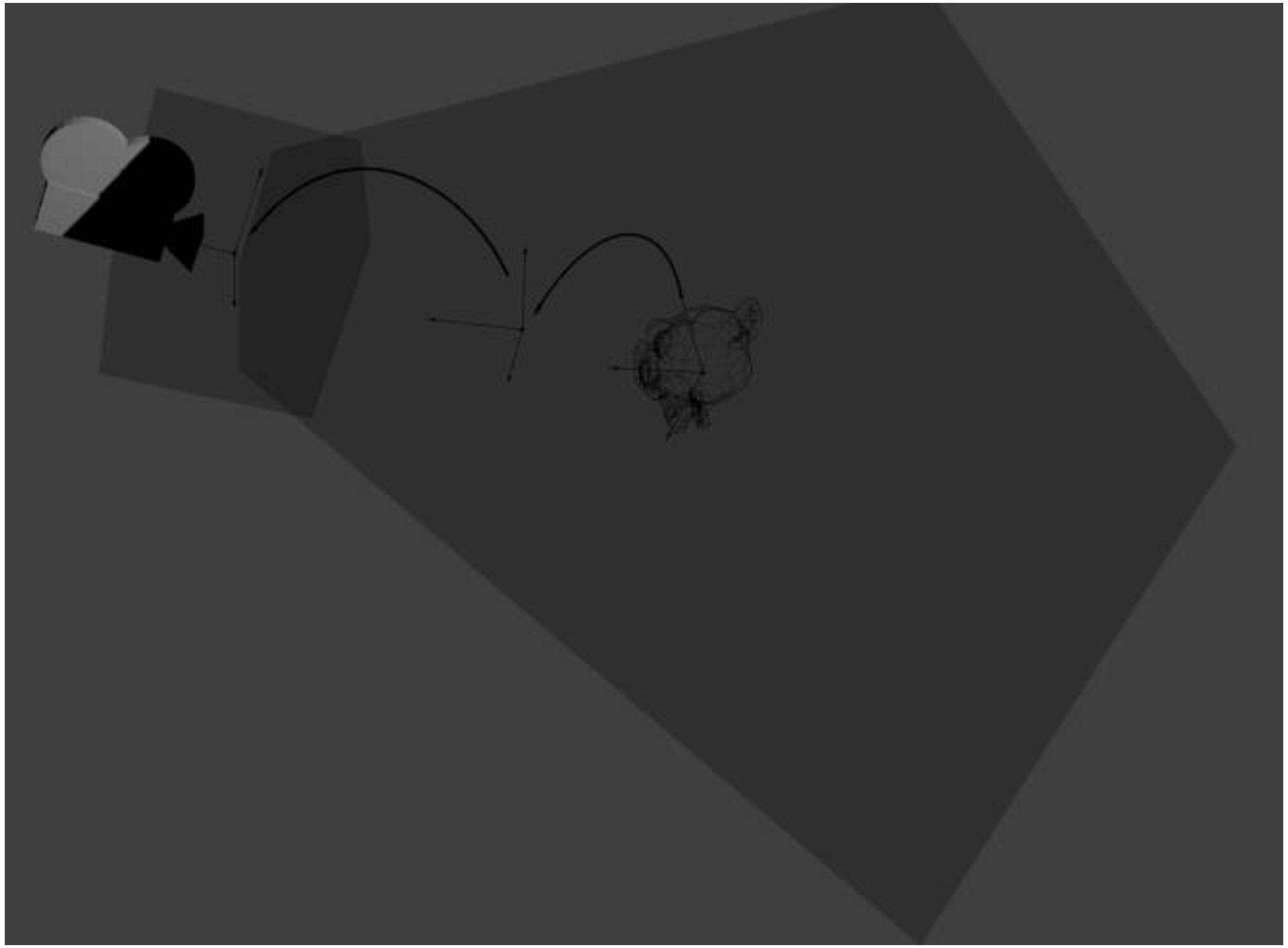


Преобразования к системе координат камеры – видовая матрица

Мы перешли из мировой системы координат
(все вершины заданы относительно центра мировой системы)
к системе координат камеры
(все вершины заданы относительно камеры)

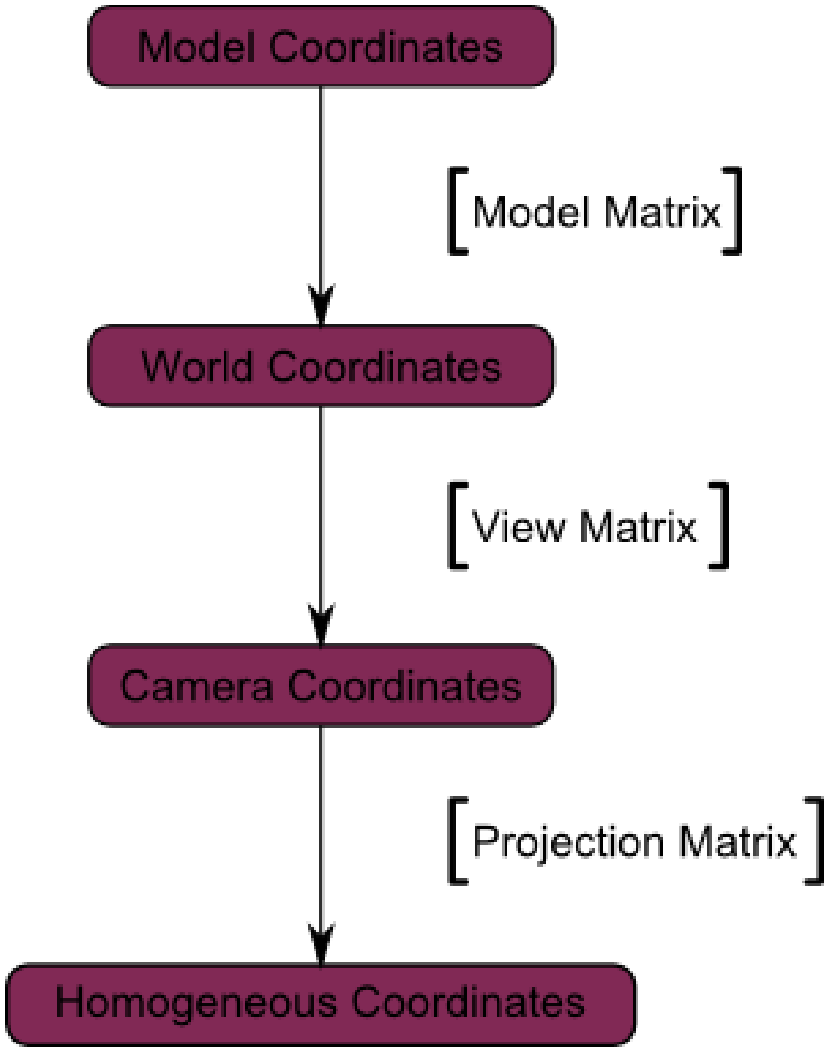


Переход из пространства камеры в однородное пространство



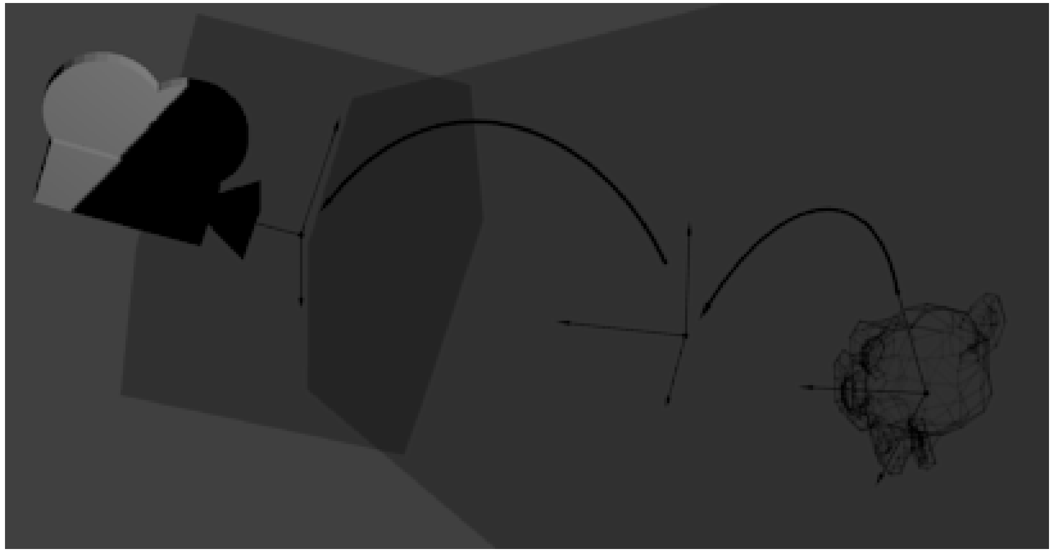
Преобразования к однородным координатам

Мы перешли из пространства камеры
(все вершины заданы относительно камеры)
в однородное пространство
(все вершины находятся в небольшом кубе.
Все, что находится внутри куба - выводится на экран).

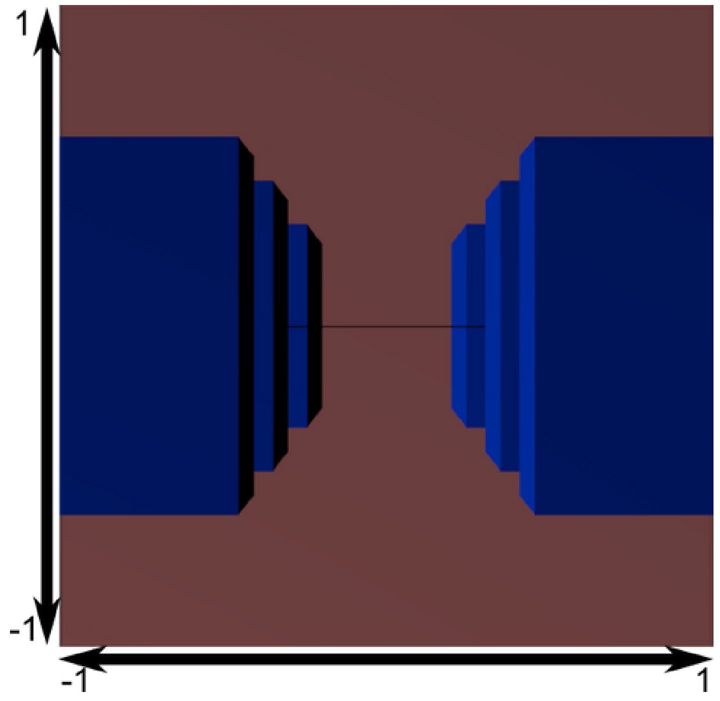


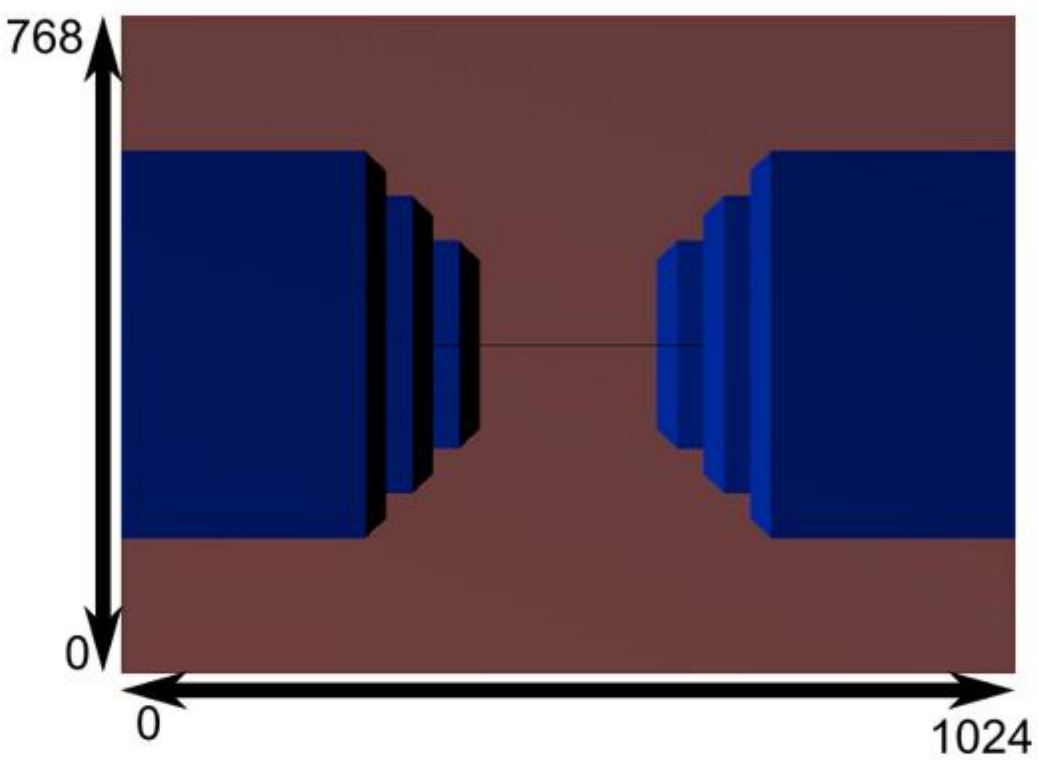
Перспективная проекция

Вершина, которая получит координаты x == 0 и y == 0 будет отображаться по центру экрана.
Однако, при отображении объекта огромную роль играет также дистанция до камеры (z).
Для двух вершин, с одинаковыми x и y, вершина имеющая большее значение по z будет отображаться ближе, чем другая.

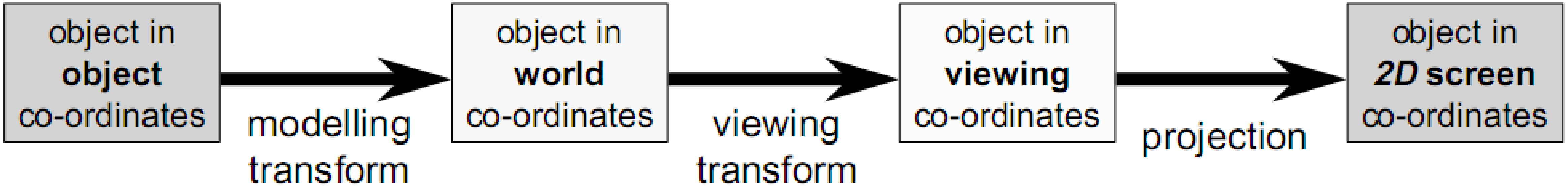


Последний шаг





Разнообразие преобразований – мировая, видовая и проекционная матрицы



- модельно-видовая как одна матрица (мировая х видовая)
- как мировая, так и видовая могут быть единичными

Аффинные преобразования в 3D

- аналогичны аффинным преобразования в 2D
- однородные координаты (x, y, z, w) → (x/w, y/w, z/w)
- базовые преобразования
  - повороты вокруг осей
  - смещения
  - растяжения
  - отражения

Базовые аффинные преобразования

translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

identity

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about x-axis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

scale

$$\begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

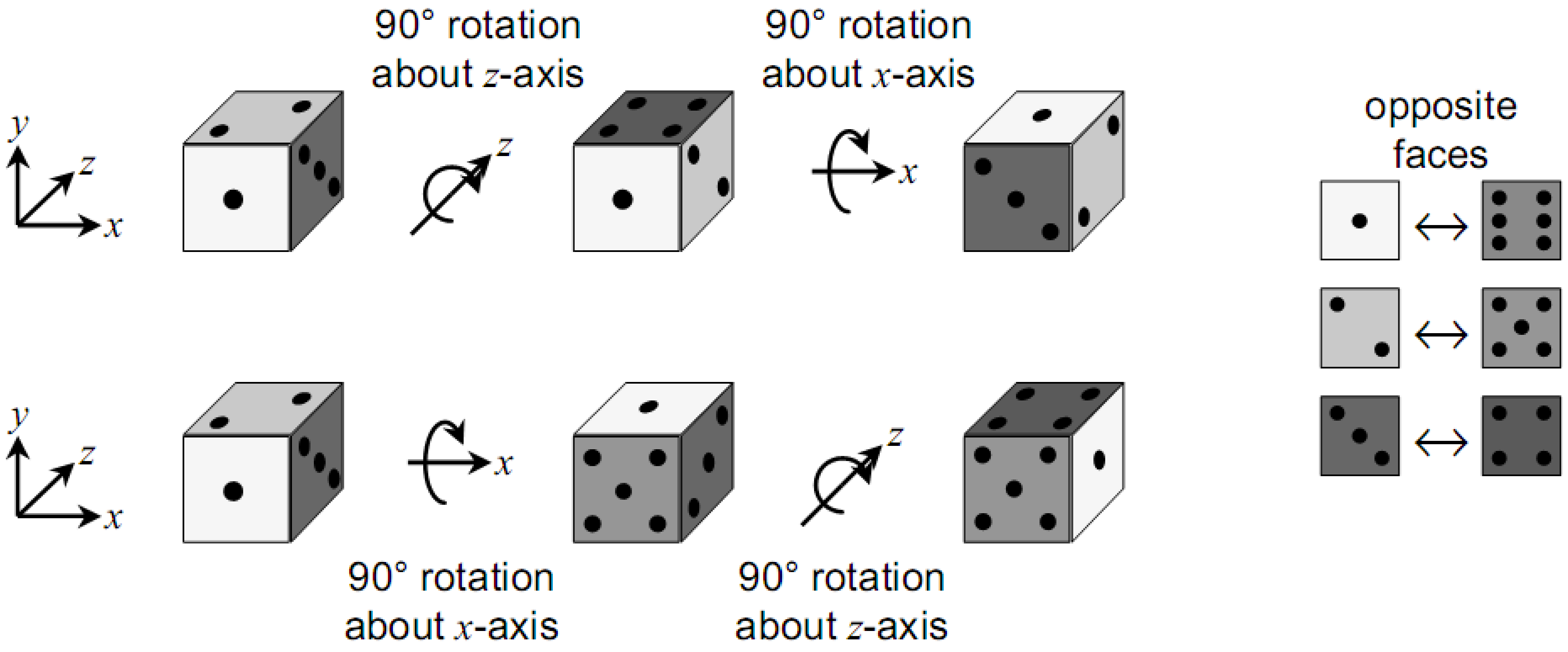
rotation about z-axis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about y-axis

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Преобразования некоммутативны



Задача

- Повернуть объект вокруг произвольной прямой L в пространстве на заданный угол.
- Объект задаётся списком вершин и списком рёбер.
- Прямая задаётся точкой A (a,b,c) , через которую она проходит, и единичным вектором (l,m,n).

Результирующая матрица

$$\begin{pmatrix} l^2+\cos\varphi\left(1-l^2\right) & l(1-\cos\varphi)\mathrm{m}+\mathrm{n}\sin\varphi & l(1-\cos\varphi)\mathrm{n}-\mathrm{m}\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)\mathrm{m}-\mathrm{n}\sin\varphi & \mathrm{m}^2+\cos\varphi\left(1-\mathrm{m}^2\right) & \mathrm{m}(1-\cos\varphi)\mathrm{n}+l\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)\mathrm{n}+\mathrm{m}\sin\varphi & \mathrm{m}(1-\cos\varphi)\mathrm{n}-l\sin\varphi & \mathrm{n}^2+\cos\varphi\left(1-\mathrm{n}^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

План

1. Перенести прямую L в центр координат на –A (-a,-b,-c)
2. Совместить прямую L с одной из координатных осей
3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
4. Выполнить преобразования 1 и 2 в обратной последовательности

Решение

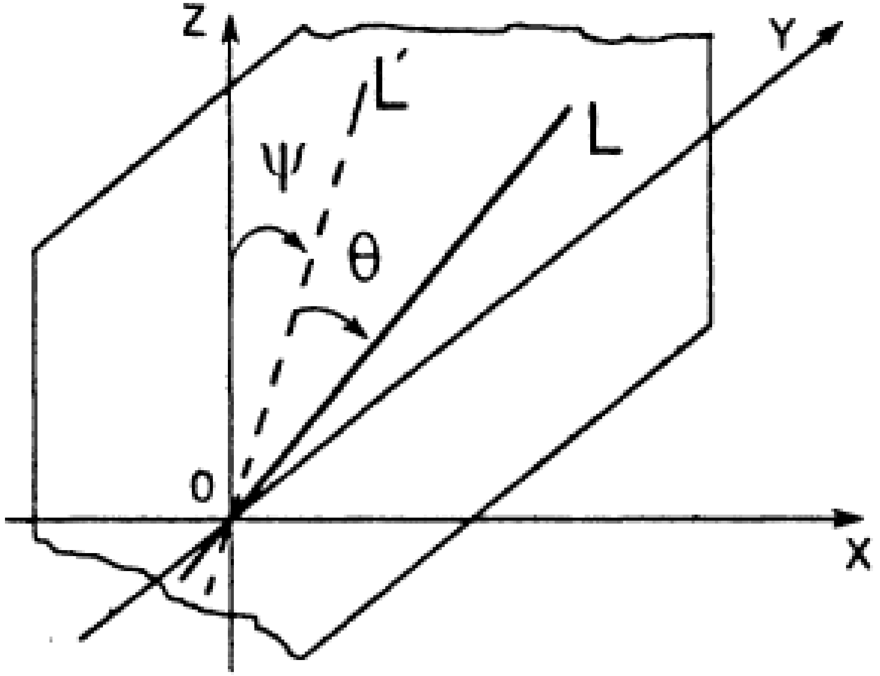
1. Перенести прямую L в центр координат на –A (-a,-b,-c)
2. Совместить прямую L с одной из координатных осей, например, Z
   - Повернуть прямую L вокруг Ox
   - Повернуть прямую L вокруг Oy
3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
4. Выполнить повороты 2 в обратной последовательности на обратные углы
5. Выполнить перенос на A (a, b, c)

Перенос на –A (-a,-b,-c)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

Совмещение прямой L с осью Z

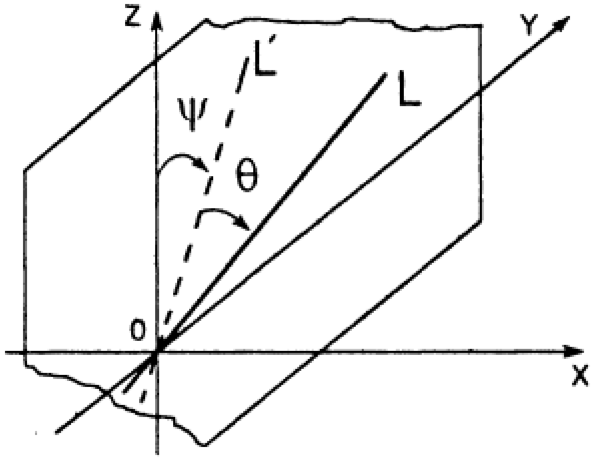
- Повернуть прямую L вокруг Ox на угол ψ
- Повернуть прямую L вокруг Oy на угол θ



Поворот прямой L вокруг Ox на угол ψ

Рассмотрим L' – проекцию на YZ – (0,m,n)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$(l, m, n, 1)[R_x] = (l, 0, d, 1)$$

$$\cos\psi = \frac{n}{d}, \quad \sin\psi = \frac{m}{d},$$

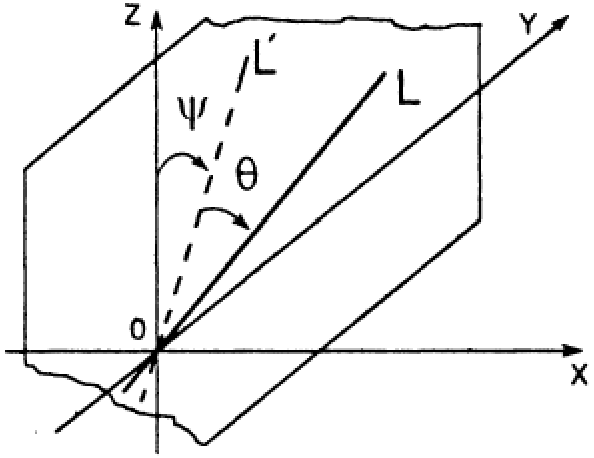
$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Поворот прямой L вокруг Oy на угол θ

$$(l, m, n, 1)[R_x] = (l, 0, d, 1)$$

$$\cos\theta = l, \quad \sin\theta = -d.$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Поворот объекта вокруг прямой L на угол φ

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратные преобразования

- Поворот прямой L вокруг Ox на угол -θ
- Поворот прямой L вокруг Oy на угол –ψ
- Перенос на A (a, b, c)

$$[T][R_x][R_y][R_z][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1}$$

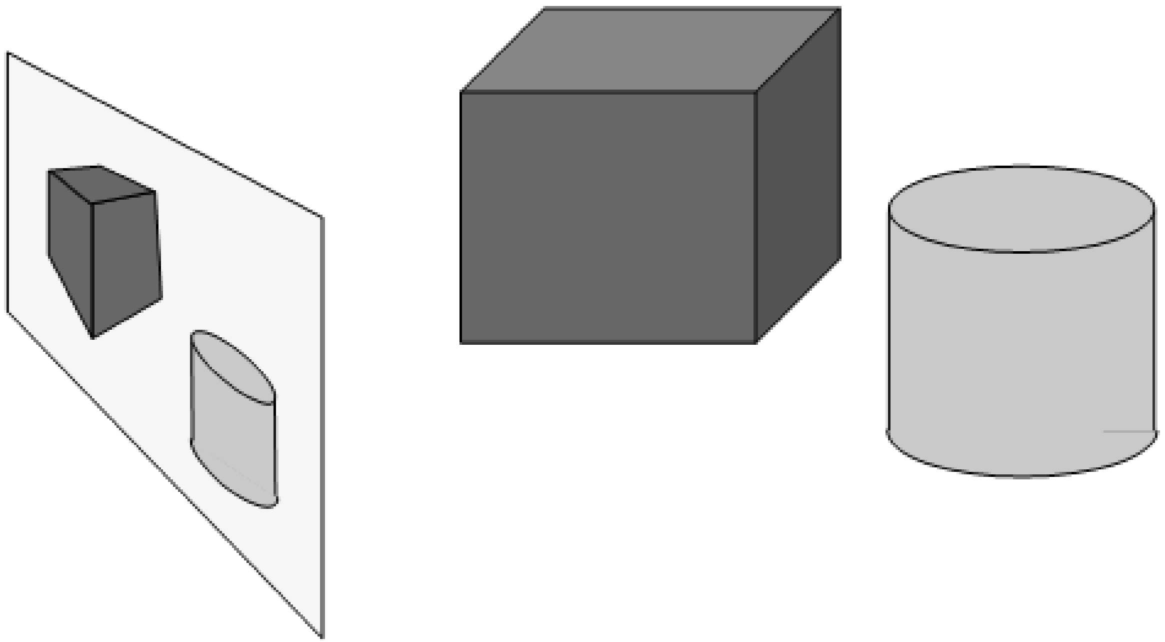
Результирующая матрица

$$\begin{pmatrix} l^2+\cos\varphi(1-l^2) & l(1-\cos\varphi)m+n\sin\varphi & l(1-\cos\varphi)n-m\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)m-n\sin\varphi & m^2+\cos\varphi(1-m^2) & m(1-\cos\varphi)n+l\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)n+m\sin\varphi & m(1-\cos\varphi)n-l\sin\varphi & n^2+\cos\varphi(1-n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для других задач (в общем виде)

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

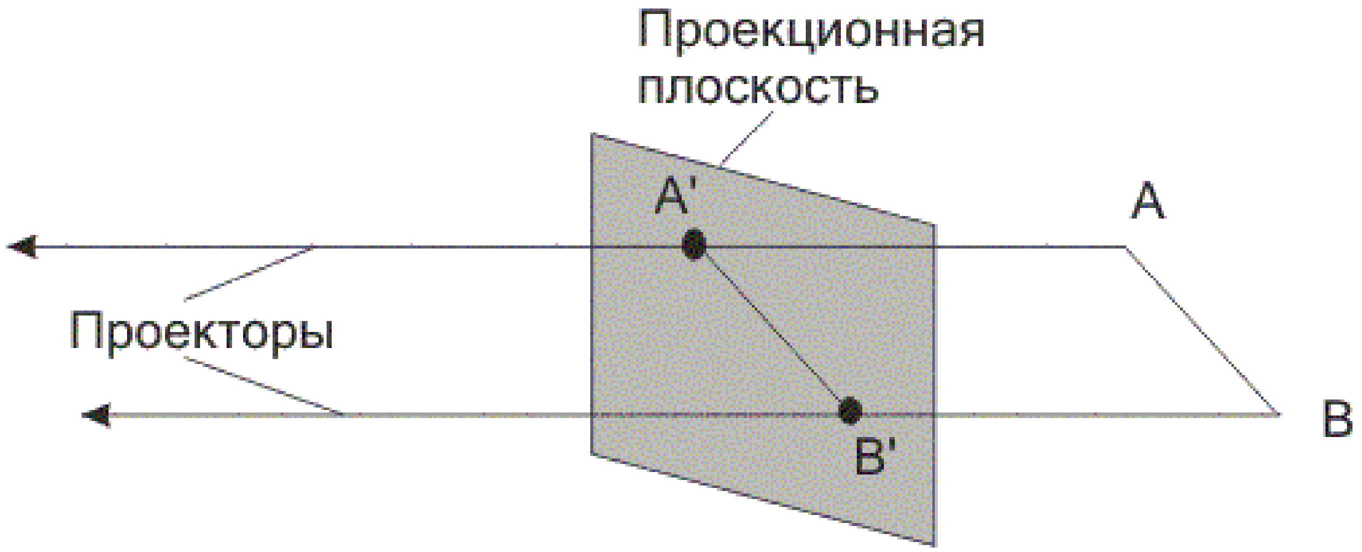
Проецирование



Основные типы проекций

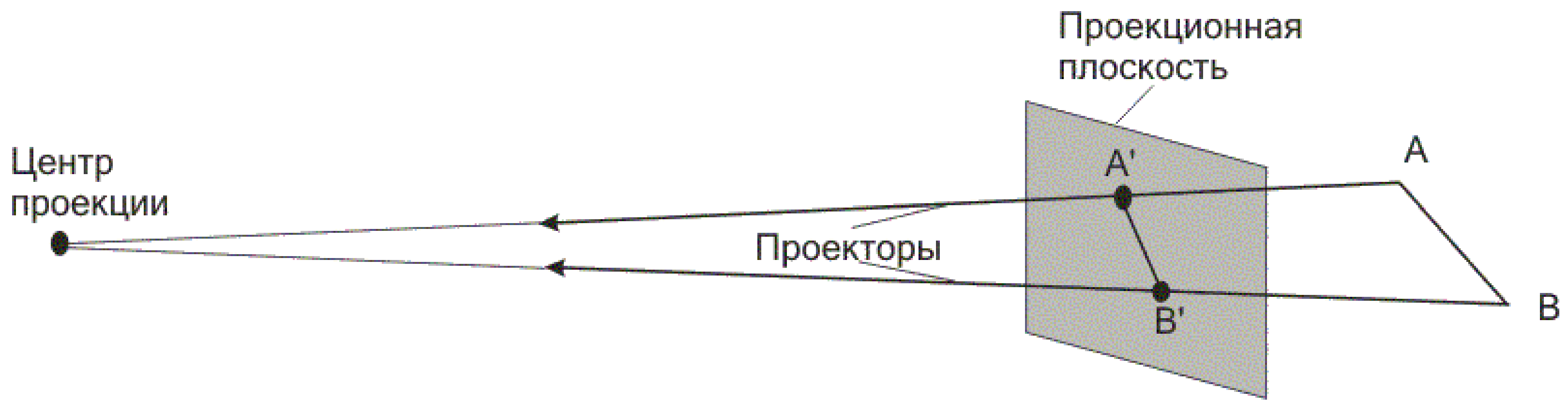
- Параллельная
- Центральная (перспективная)

Параллельная проекция



- (x,y,z) → (x,y)
- используется в САПР (CAD), архитектуре и т.п.
- выглядит нереалистично

Центральная (перспективная) проекция



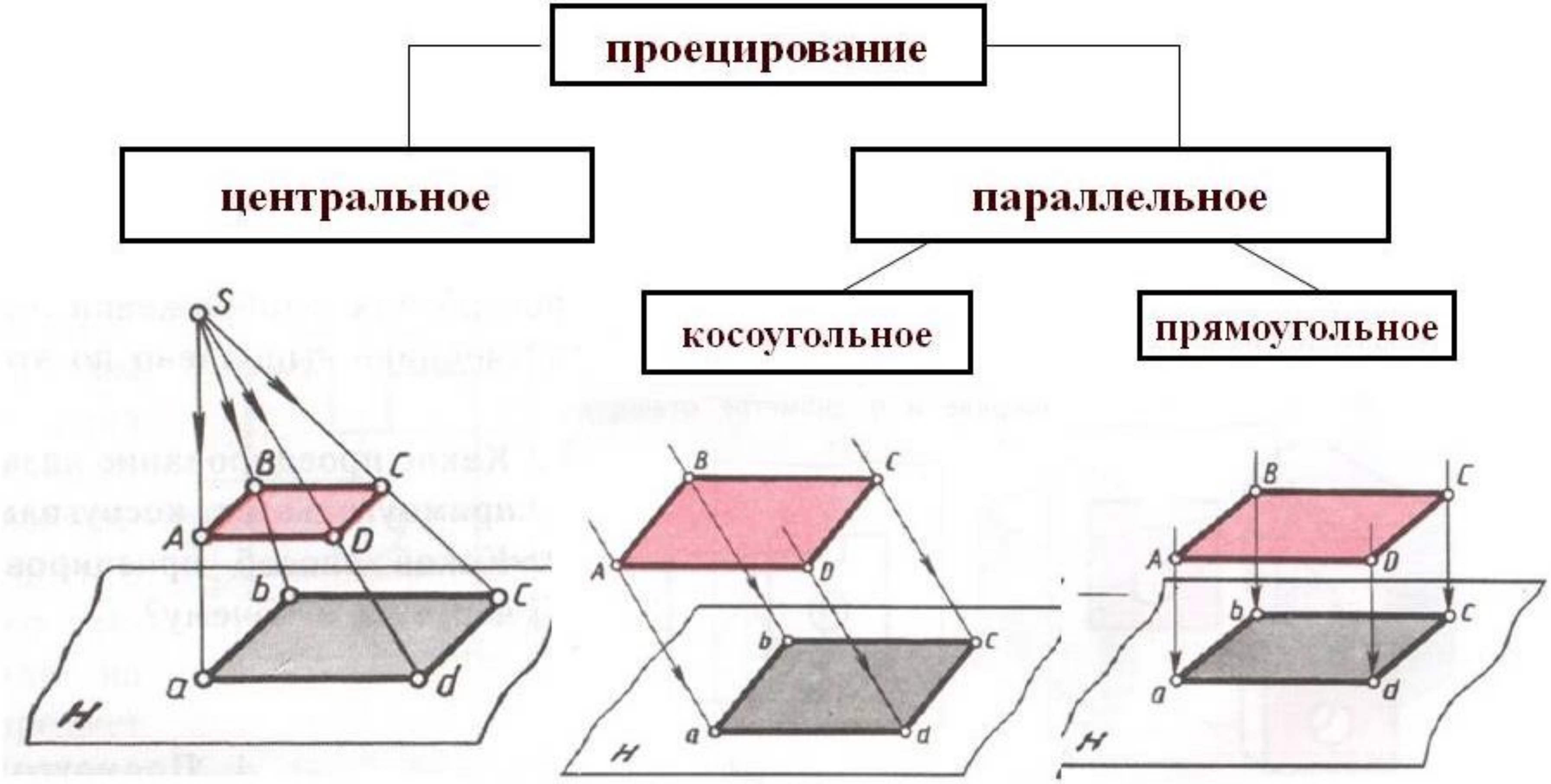
- (x,y,z) → (x/z,y/z)
- уменьшение с удалением
- выглядит реалистично
- так работают камеры

Перспективное преобразование

ПП – это преобразование одного трёхмерного пространства в другое, при котором:

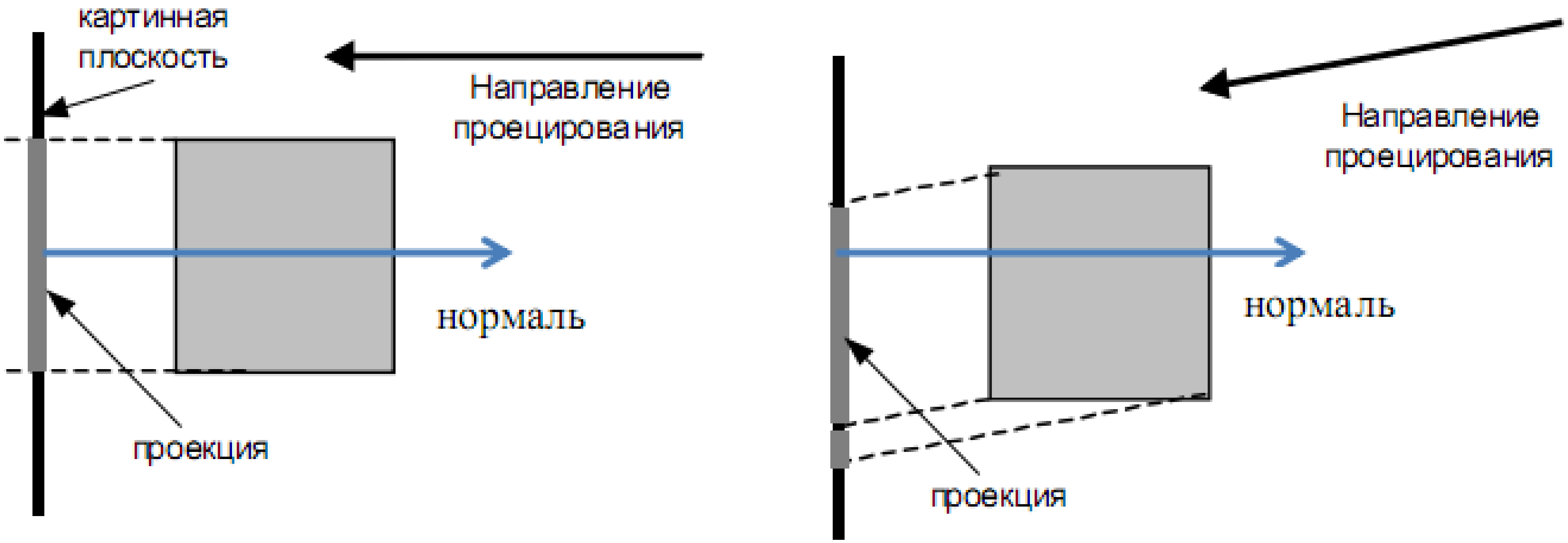
- параллельные прямые сходятся,
- размер объекта уменьшается с увеличением расстояния до центра наблюдения,
- и происходит неоднородное искажение линий объекта, зависящее от ориентации и расстояния от объекта до центра проекции.

Это помогает нашему восприятию глубины, но не сохраняет форму объекта.

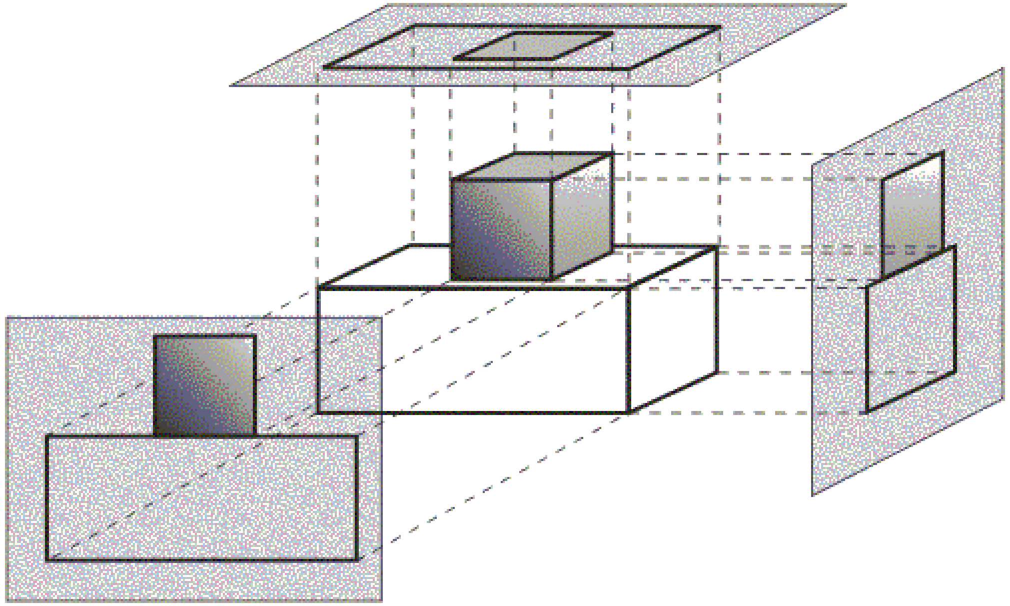

проецирование
центральное
параллельное
косоугольное
прямоугольное

Классификация параллельных проекций

Ортографические, аксонометрические и косоугольные проекции



Ортографические проекции



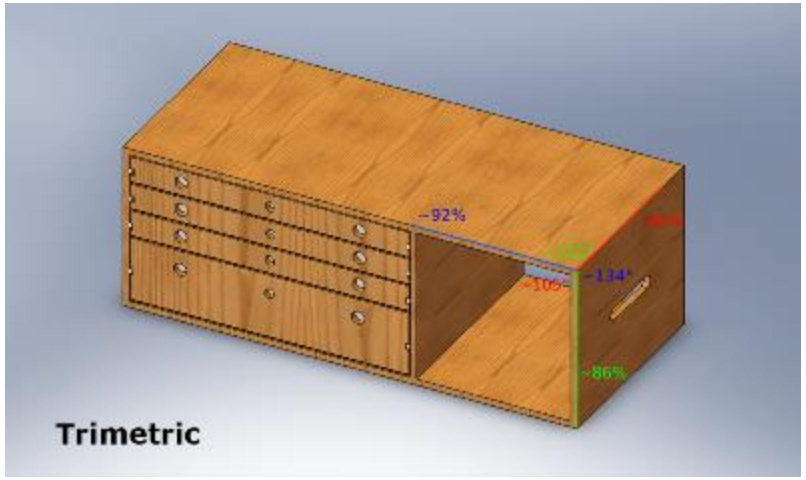
Ортографические проекции

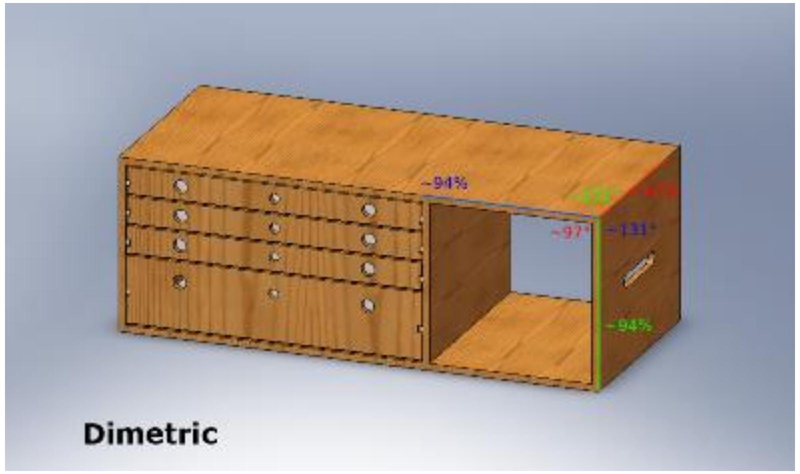
$$[P_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

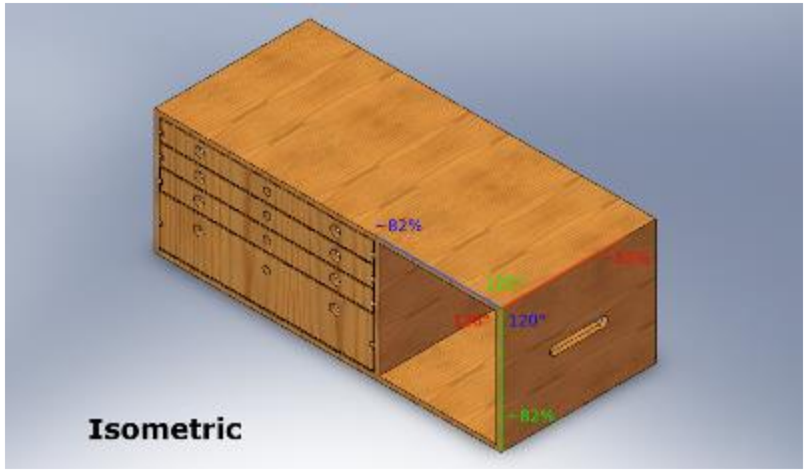
$$[P_x] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix}$$

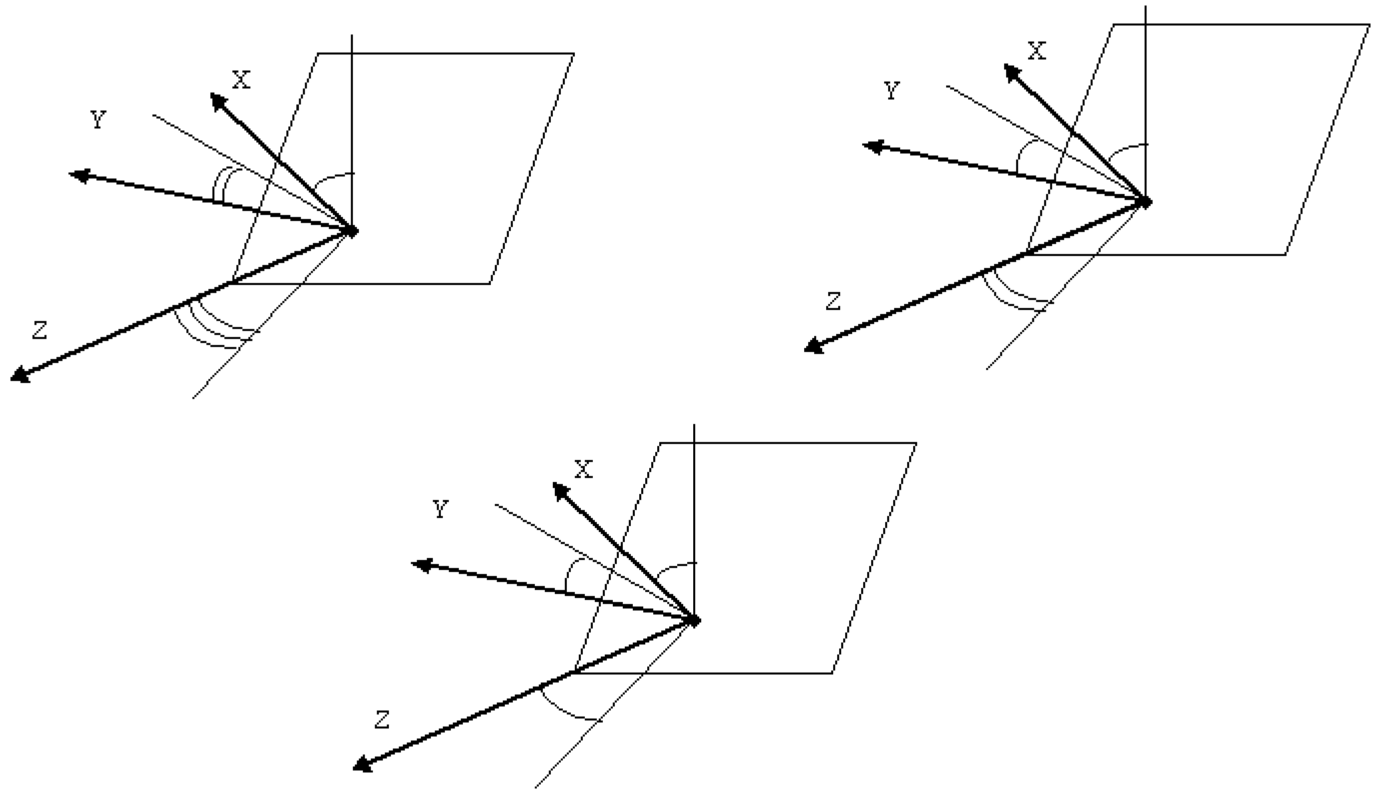
Аксонометрические проекции







Аксонометрические проекции



Аксонометрические проекции

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\phi\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\ \sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

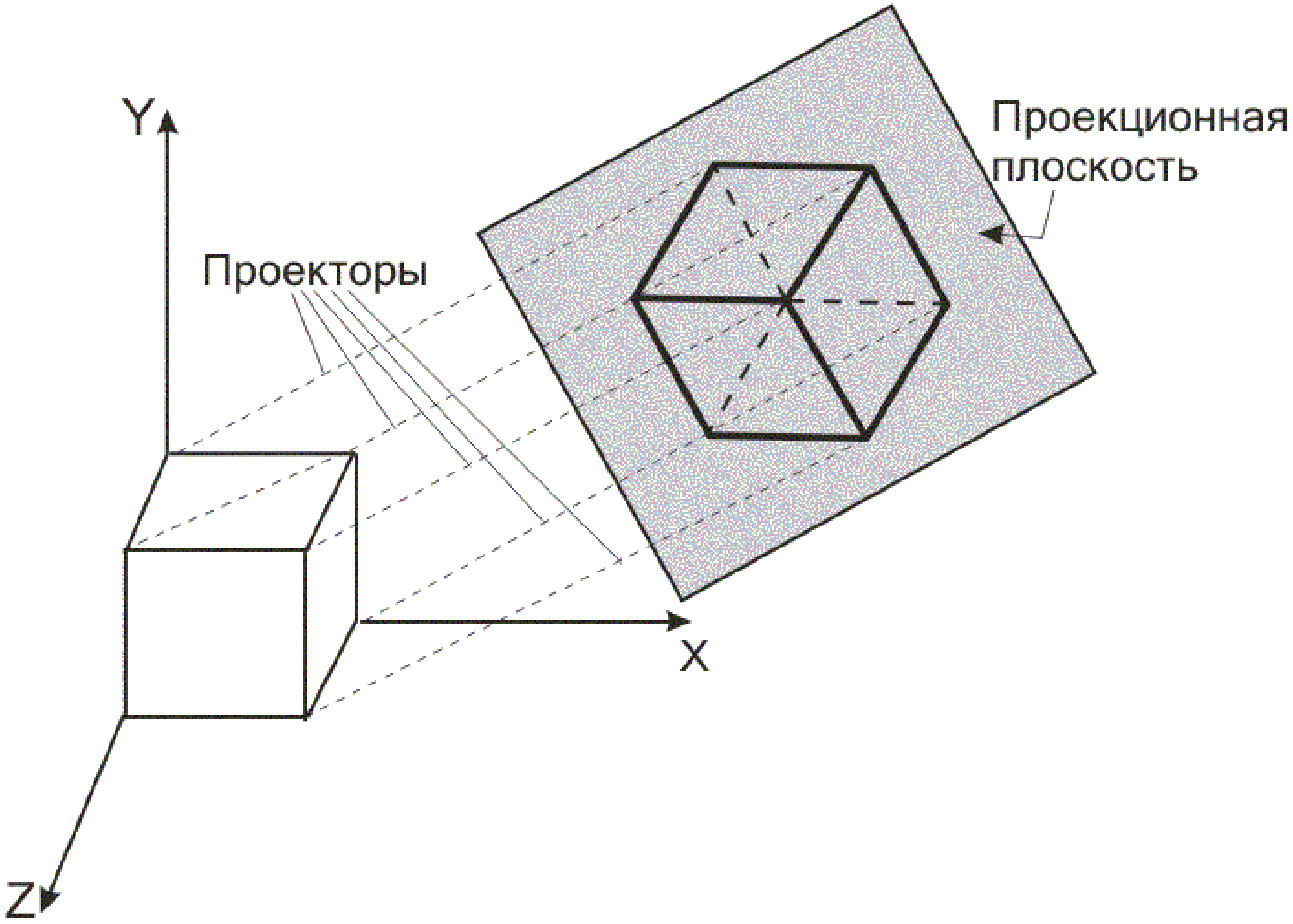
Преобразование единичных орт координатных осей

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)*[M] = (\cos\psi \quad \sin\varphi\sin\psi \quad 0 \quad 1)$$

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)*[M] = (0 \quad \cos\varphi \quad 0 \quad 1)$$

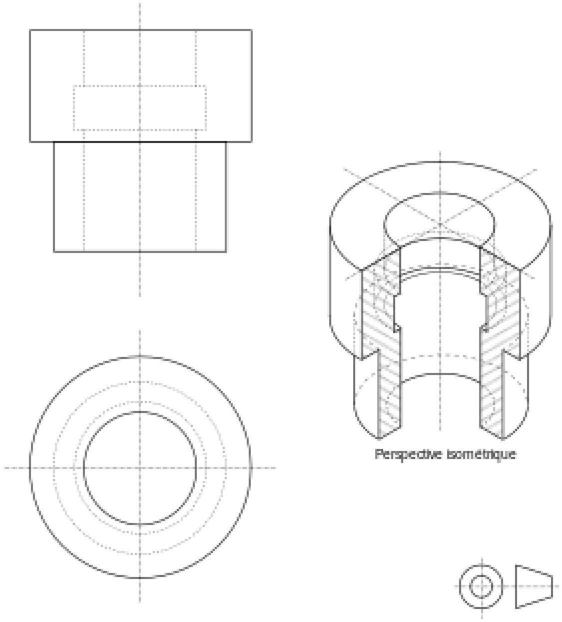
$$(0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)*[M] = (\sin\psi \quad -\sin\varphi\cos\psi \quad 0 \quad 1)$$

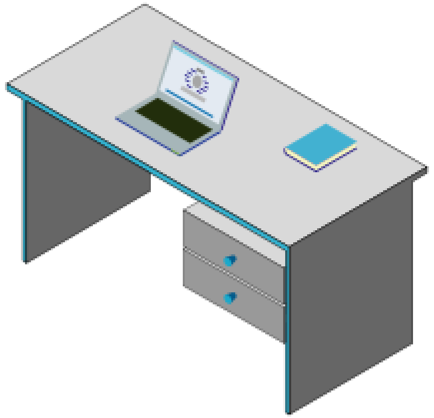
Изометрическая проекция

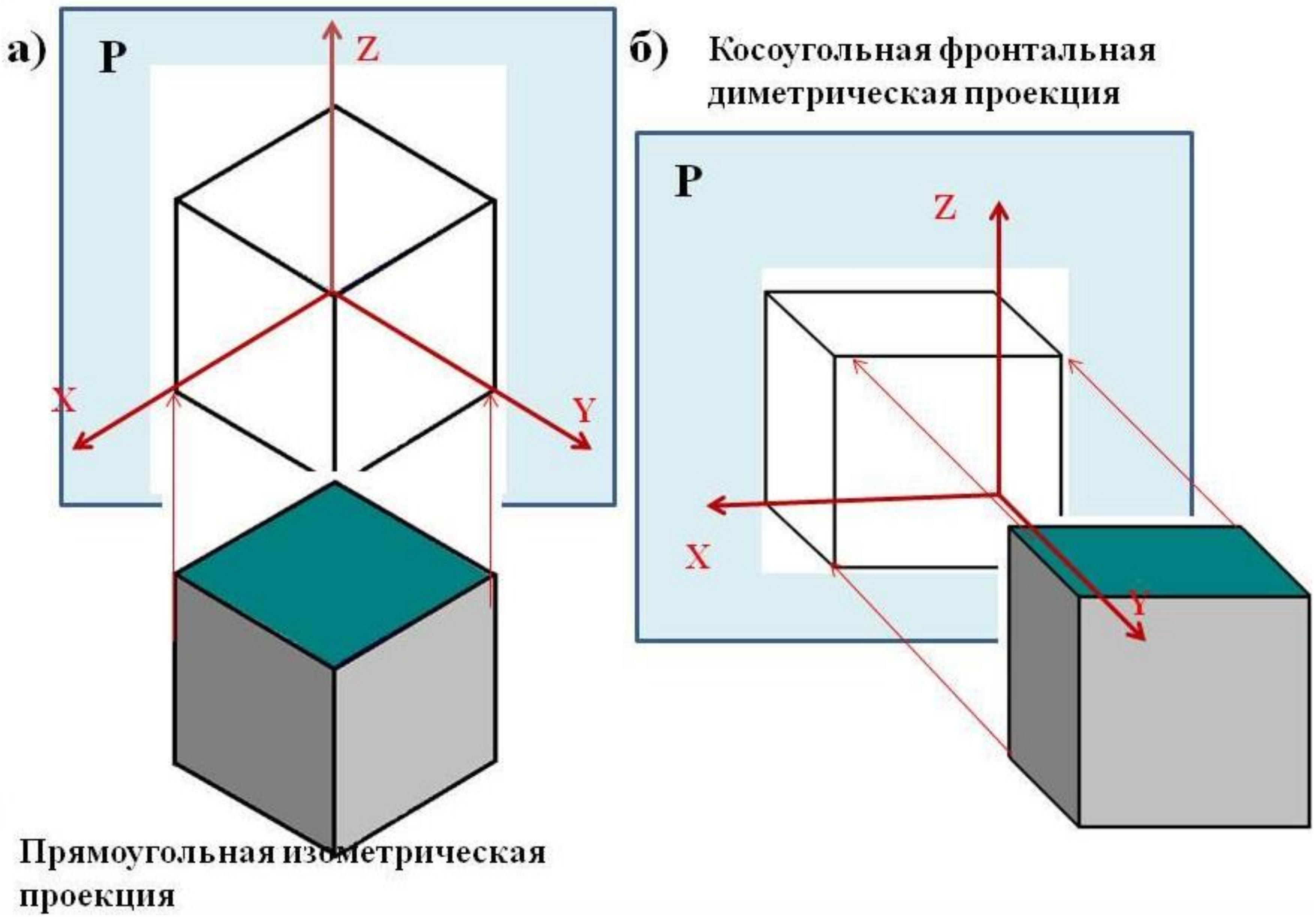


Изометрическая проекция

- Используется
  - в машиностроительном черчении и САПР для построения наглядного изображения детали на чертеже,
  - а также в компьютерных играх для трёхмерных объектов и панорам.

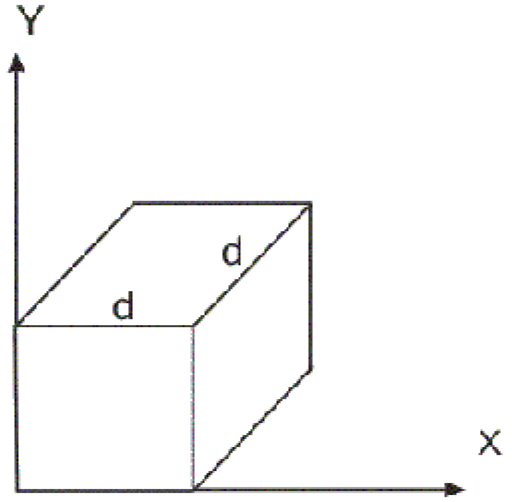




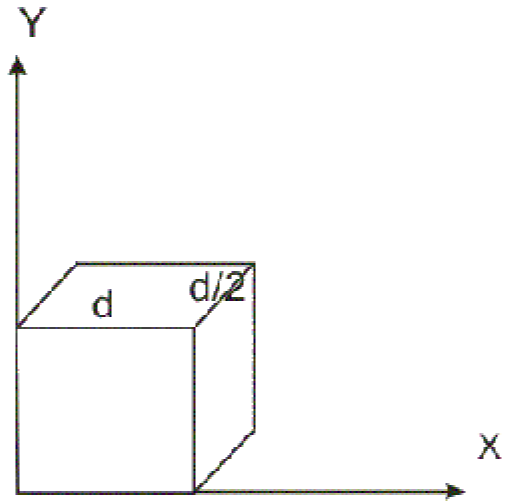

а)
P
Z
X
Y
Прямоугольная изометрическая проекция
б)
Косоугольная фронтальная диметрическая проекция
P
Z
X
Y

Проекции: кавалье (cavalier) и кабине (cabinet)

a)



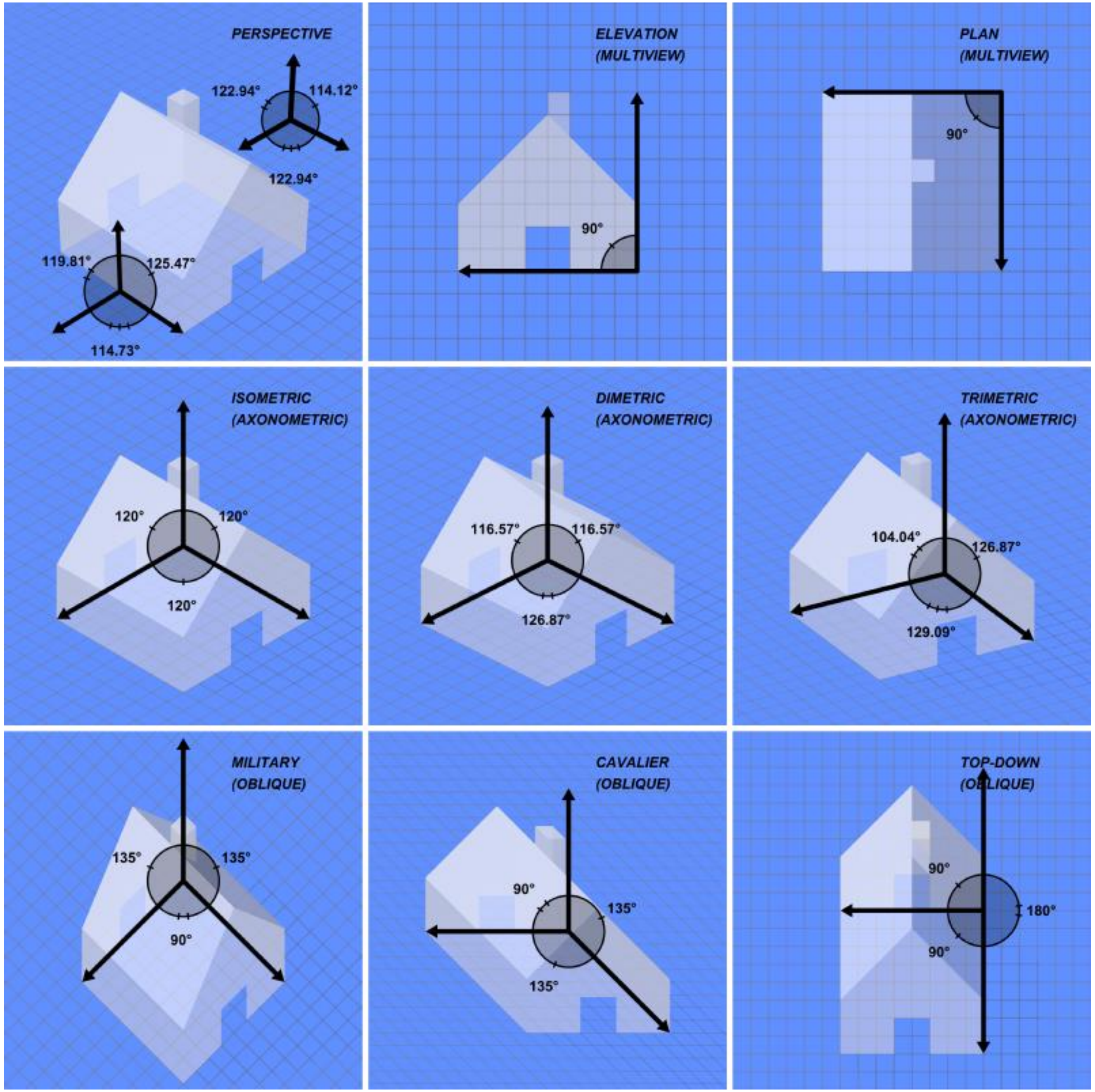
b)



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \beta = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}$$

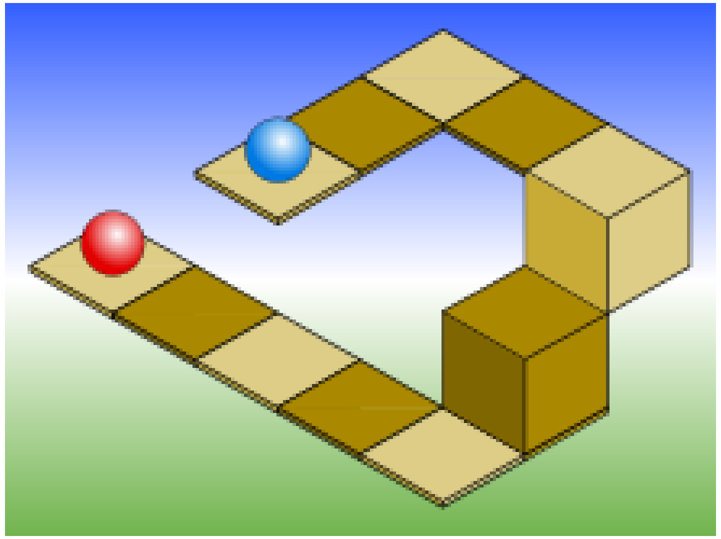

PERSPECTIVE
122.94°
114.12°
122.94°
119.81°
125.47°
114.73°
ELEVATION
(MULTIVIEW)
90°
PLAN
(MULTIVIEW)
90°
ISOMETRIC
(AXONOMETRIC)
120°
120°
120°
DIMETRIC
(AXONOMETRIC)
116.57°
116.57°
126.87°
TRIMETRIC
(AXONOMETRIC)
104.04°
126.87°
129.09°
MILITARY
(OBLIQUE)
135°
135°
90°
CAVALIER
(OBLIQUE)
90°
135°
135°
TOP-DOWN
(OBLIQUE)
90°
180°
90°

Ограничения аксонометрической проекции

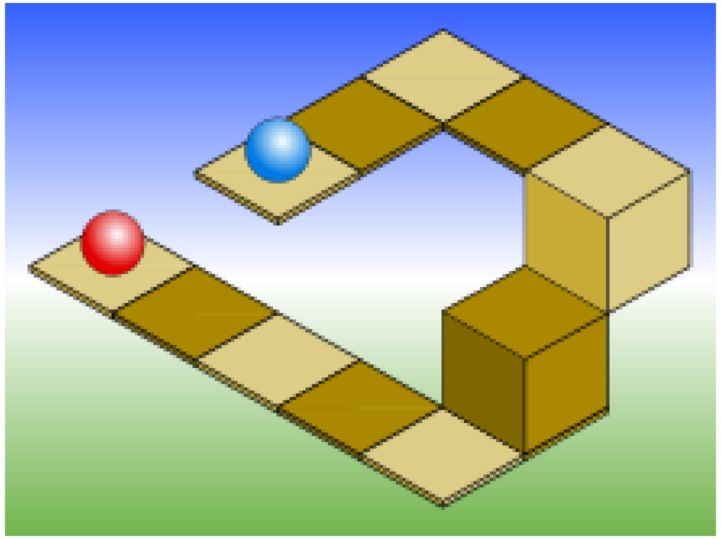
Как и в других видах параллельных проекций, объекты в аксонометрической проекции не выглядят больше или меньше при приближении или удалении от наблюдателя.

Это удобно в спрайто-ориентированных компьютерных играх, но, в отличие от перспективной проекции, приводит к ощущению искривления, поскольку человеческий глаз работает иначе.

Ограничения аксонометрической проекции: что вы видите?



Ограничения аксонометрической проекции: что на самом деле



Голубой шар на два уровня выше красного

«Водопад» — литография голландского художника Эшера (октябрь 1961)

Что видите?

«Водопад» — парадокс

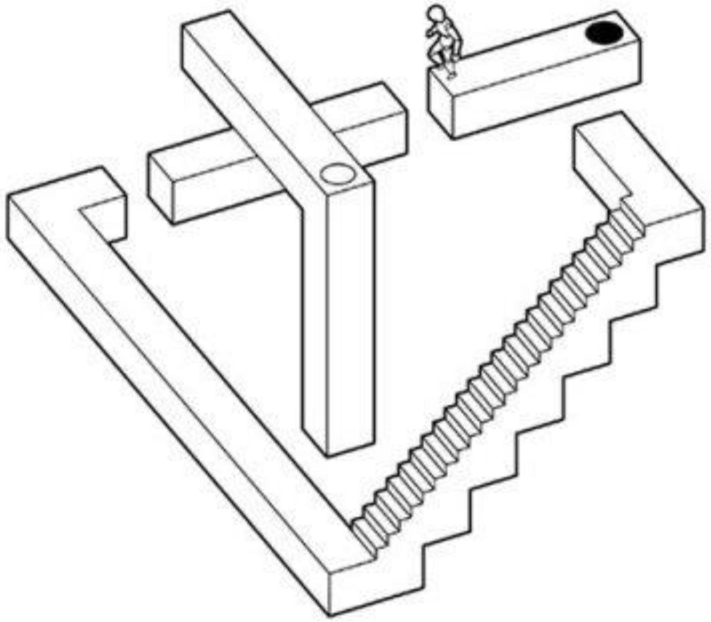
Изображён парадокс — падающая вода водопада управляет колесом, которое направляет воду на вершину водопада. Водопад имеет структуру «невозможного» треугольника Пенроуза: Водопад на литографии работает как вечный двигатель.

Треугольник Пенроуза

Скульптура, кажущийся треугольник, Немецкий технический музей

Та же скульптура при изменении точки просмотра

Кадр из игры «echochrome»



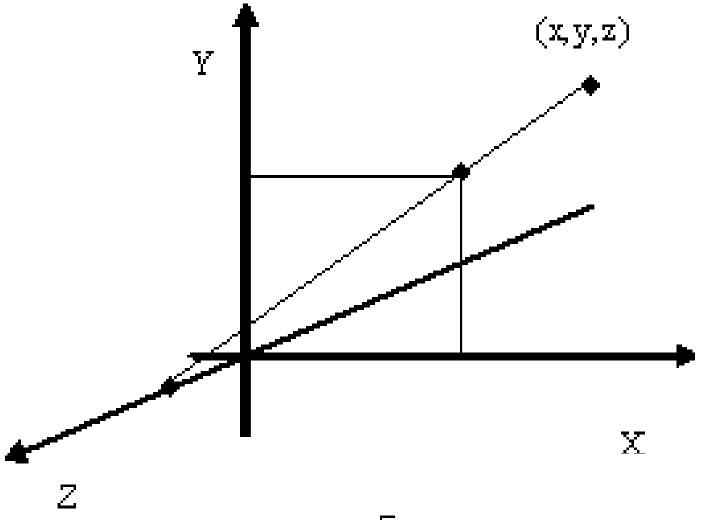
Слоган игры — «В этом мире то, что ты видишь, становится реальностью»

Аркадные игры начала 1980-х

Q*bert (1982) — одна из первых игр с изометрической графикой

Классификация центральных проекций

Центральные проекции

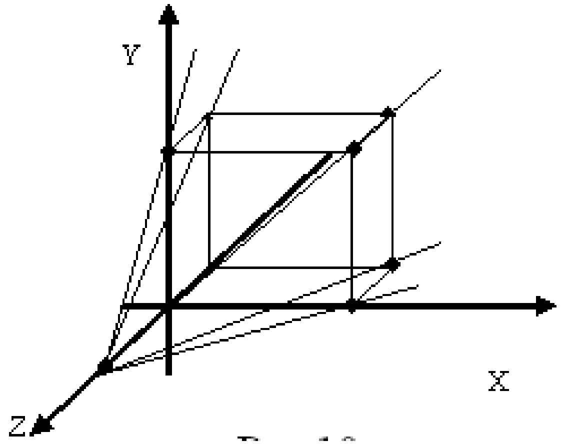


$$X^*=xt,\quad Y^*=yt,\quad Z^*=c+(z-c)t$$

$$X^*=\frac{1}{1-\frac{z}{c}}x,\quad Y^*=\frac{1}{1-\frac{z}{c}}y\quad t^*=\frac{1}{1-\frac{z}{c}}$$

$$(x\ \ y\ \ z\ \ 1)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1/c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(x\ \ y\ \ 0\ \ 1-z/c)\qquad \left(\frac{x}{1-\frac{z}{c}}\quad \frac{y}{1-\frac{z}{c}}\quad 0\quad 1\right)$$

Матрицы перспективных преобразований



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a \\ 0 & 1 & 0 & -1/b \\ 0 & 0 & 1 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Одноточечная, двухточечная и трёхточечная проекции