Аффинные преобразования и проецирование в 3D

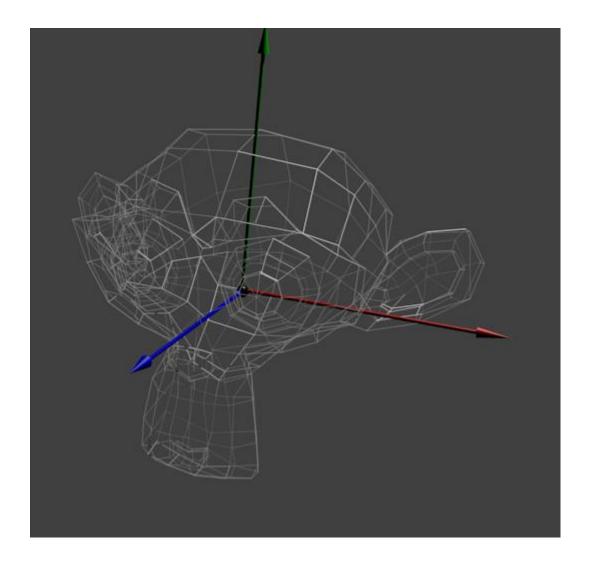
Компьютерная графика

Вопрос

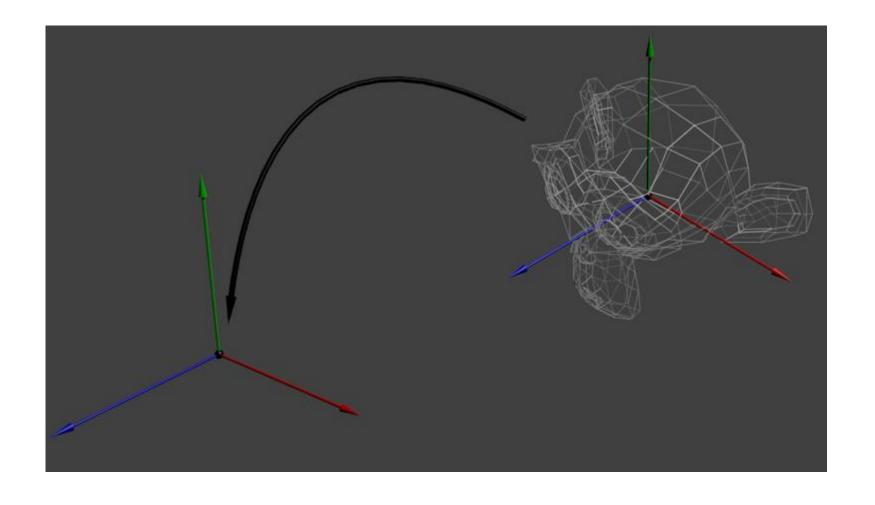
Как 3D объект нарисовать на 2D экране?

Модель в объектных координатах

Модель задается множеством вершин, координаты которых заданы относительно центра объекта, т. е. вершина с координатами (0, 0, 0) будет находиться в центре объекта.

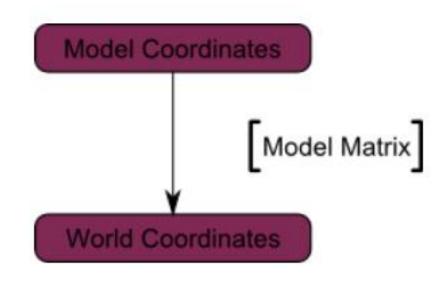


Преобразования к мировым координатам – мировая матрица

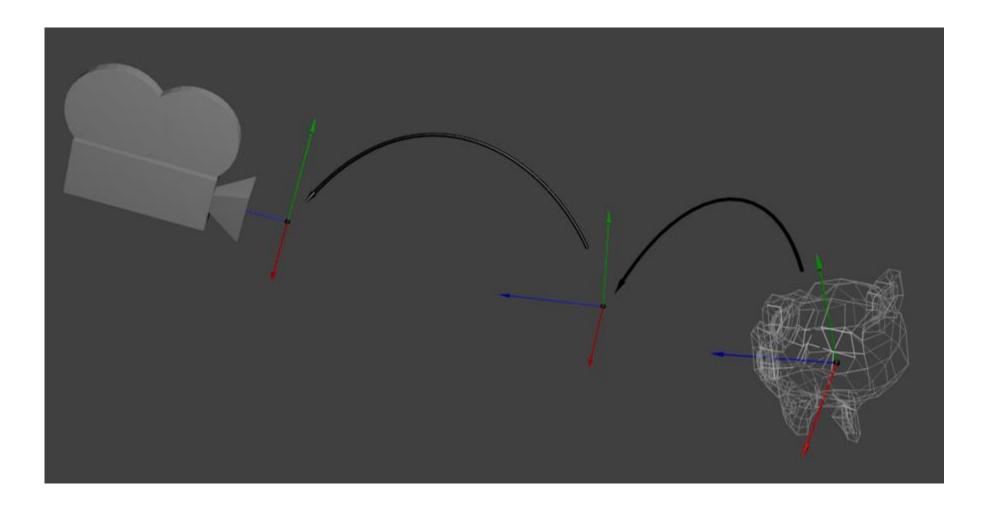


Преобразования к мировым координатам – мировая матрица

Мы перешли из пространства объекта (все вершины заданы относительно центра объекта) к мировому пространству (все вершины заданы относительно центра мира)

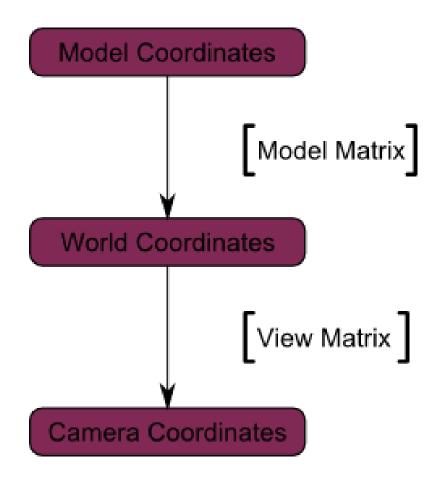


Переход к системе координат камеры – видовая матрица

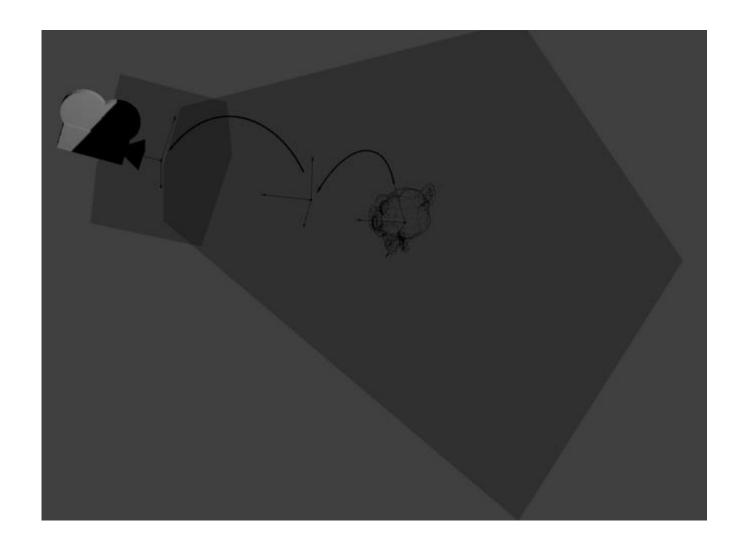


Преобразования к системе координат камеры – видовая матрица

Мы перешли из мировой системы координат (все вершины заданы относительно центра мировой системы) к системе координат камеры (все вершины заданы относительно камеры)

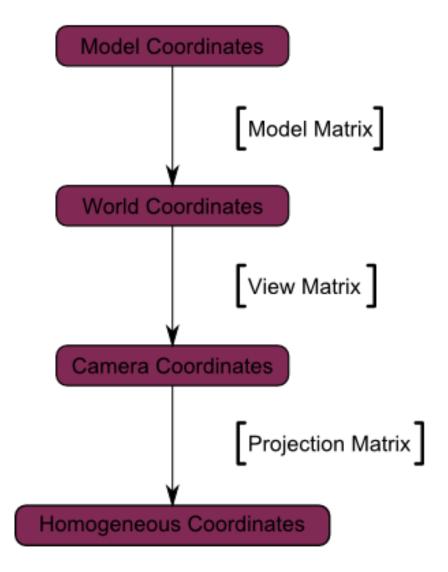


Переход из пространства камеры в однородное пространство



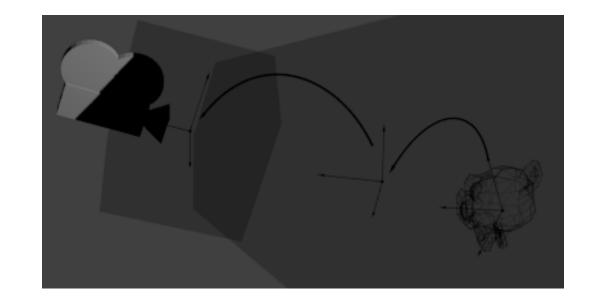
Преобразования к однородным координатам

Мы перешли из пространства камеры (все вершины заданы относительно камеры) в однородное пространство (все вершины находятся в небольшом кубе. Все, что находится внутри куба - выводится на экран).

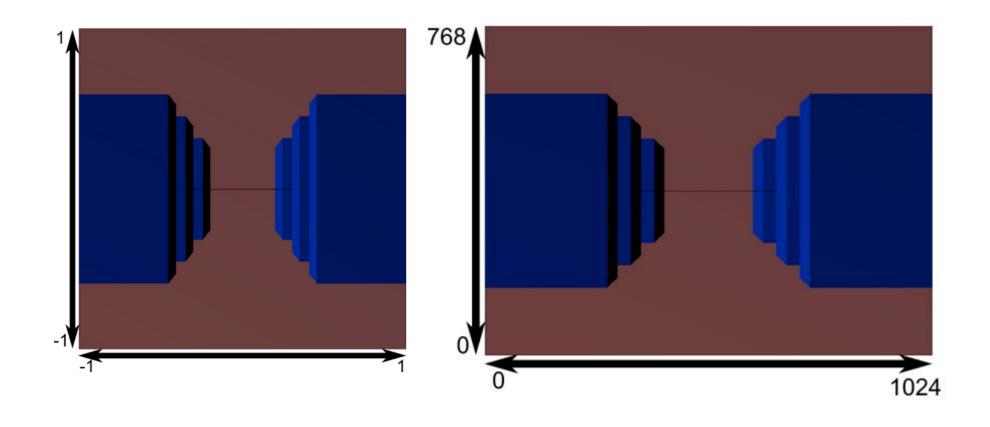


Перспективная проекция

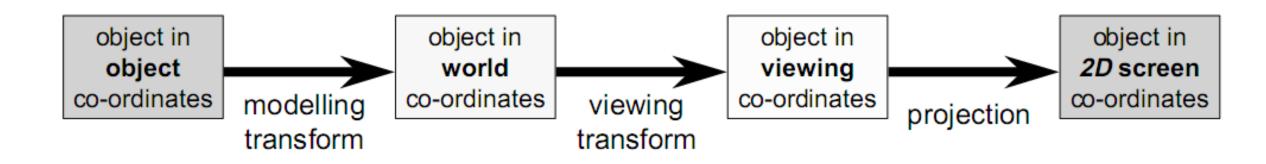
Вершина, которая получит координаты x == 0 и y == 0 будет отображаться по центру экрана. Однако, при отображении объекта огромную роль играет также дистанция до камеры (z). Для двух вершин, с одинаковыми x и y, вершина имеющая большее значение по z будет отображаться ближе, чем другая.



Последний шаг



Разнообразие преобразований — мировая, видовая и проекционная матрицы



- модельно-видовая как одна матрица (мировая х видовая)
- как мировая, так и видовая могут быть единичными

Аффинные преобразования в 3D

- аналогичны аффинным преобразования в 2D
- однородные координаты $(x, y, z, w) \rightarrow (x/w, y/w, z/w)$
- базовые преобразования
 - повороты вокруг осей
 - смещения
 - растяжения
 - отражения

Базовые аффинные преобразования

translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

identity

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about x-axis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

scale

$$\begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

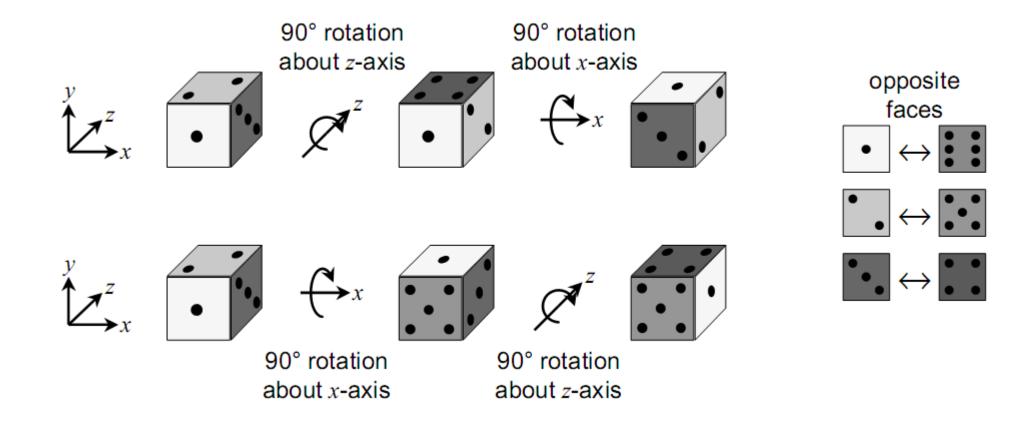
rotation about z-axis

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about *y*-axis

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 - \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Преобразования некоммутативны



Задача

- Повернуть объект вокруг произвольной прямой L в пространстве на заданный угол.
- Объект задаётся списком вершин и списком рёбер.
- Прямая задаётся точкой A (a,b,c), через которую она проходит, и единичным вектором (l,m,n).

Результирующая матрица

$$\begin{cases} l^2 + \cos \varphi (1 - l^2) & l(1 - \cos \varphi) m + n \sin \varphi & l(1 - \cos \varphi) n - m \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi) m - n \sin \varphi & m^2 + \cos \varphi (1 - m^2) & m(1 - \cos \varphi) n + l \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi) n + m \sin \varphi & m(1 - \cos \varphi) n - l \sin \varphi & n^2 + \cos \varphi (1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases}$$

План

- 1. Перенести прямую L в центр координат на –A (-a,-b,-c)
- 2. Совместить прямую L с одной из координатных осей
- 3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
- 4. Выполнить преобразования 1 и 2 в обратной последовательности

Решение

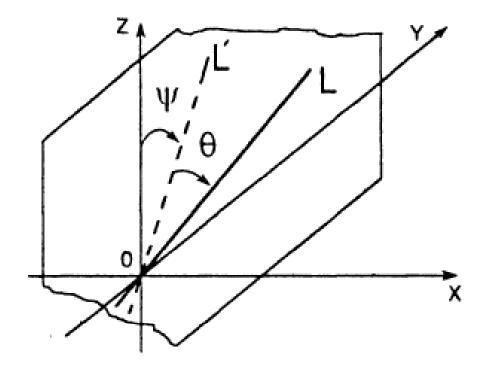
- 1. Перенести прямую L в центр координат на –A (-a,-b,-c)
- 2. Совместить прямую L с одной из координатных осей, например, Z
 - Повернуть прямую L вокруг Ох
 - Повернуть прямую L вокруг Оу
- 3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
- 4. Выполнить повороты 2 в обратной последовательности на обратные углы
- 5. Выполнить перенос на A (a, b, c)

Перенос на –А (-а,-b,-с)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

Совмещение прямой L с осью Z

- Повернуть прямую L вокруг Ох на угол ψ
- Повернуть прямую L вокруг Оу на угол θ

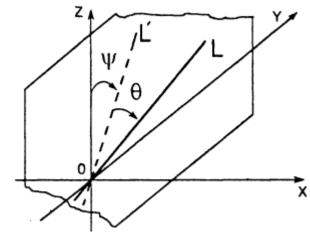


Поворот прямой L вокруг Ох на угол ф

Рассмотрим L' – проекцию на YZ – (0,m,n)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} & \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}} & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}} & \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(l, m, n, l)[R_x] = (l, 0, d, l)$$



$$\cos \psi = \frac{n}{d}, \quad \sin \psi = \frac{m}{d},$$

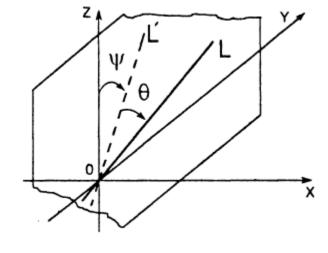
$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Поворот прямой L вокруг Оу на угол θ

$$(l, m, n, l)[R_x] = (l, 0, d, l)$$

$$\cos \theta = l$$
, $\sin \theta = -d$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$d = \sqrt{m^2 + n^2}$$

Поворот объекта вокруг прямой L на угол ф

$$\begin{bmatrix} R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратные преобразования

- Поворот прямой L вокруг Ох на угол θ
- Поворот прямой L вокруг Оу на угол Ф
- Перенос на A (a, b, c)

$$[T][R_x][R_y][R_y][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1}$$

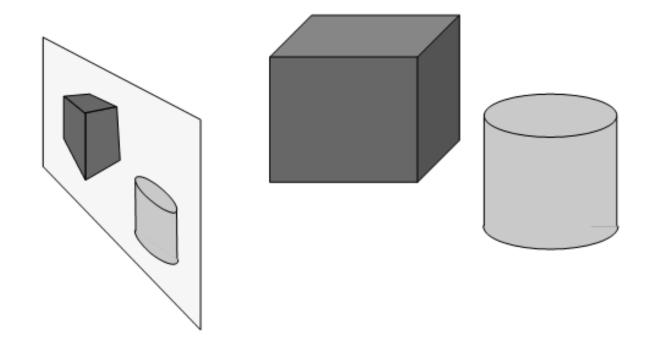
Результирующая матрица

$$\begin{cases} l^2 + \cos \varphi (1 - l^2) & l(1 - \cos \varphi) m + n \sin \varphi & l(1 - \cos \varphi) n - m \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi) m - n \sin \varphi & m^2 + \cos \varphi (1 - m^2) & m(1 - \cos \varphi) n + l \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi) n + m \sin \varphi & m(1 - \cos \varphi) n - l \sin \varphi & n^2 + \cos \varphi (1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases}$$

Для других задач (в общем виде)

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

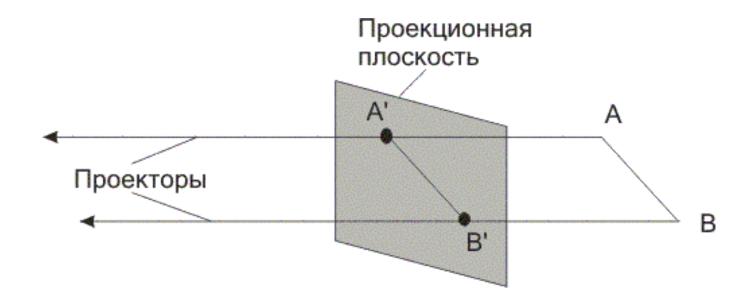
Проецирование



Основные типы проекций

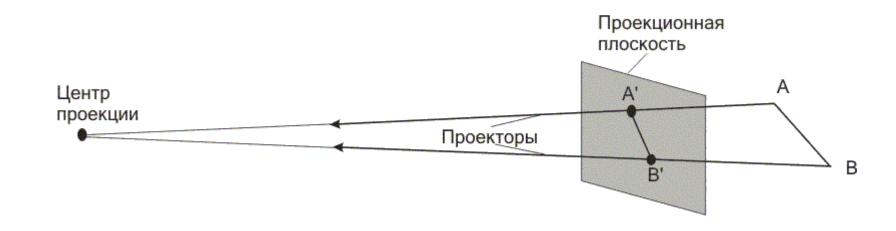
- Параллельная
- Центральная (перспективная)

Параллельная проекция



- $(x,y,z) \rightarrow (x,y)$
- используется в САПР (CAD), архитектуре и т.п.
- выглядит нереалистично

Центральная (перспективная) проекция



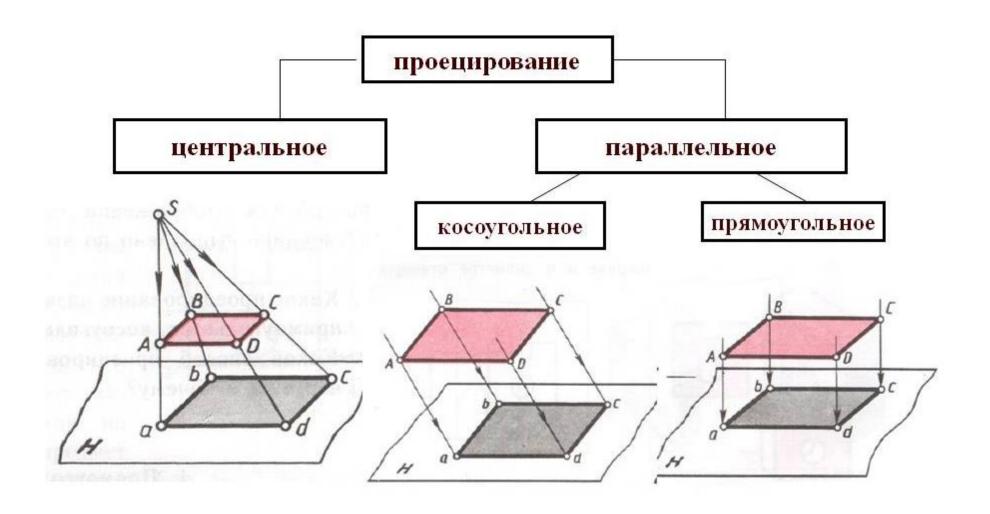
- $(x,y,z) \rightarrow (x/z,y/z)$
- уменьшение с удалением
- выглядит реалистично
- так работают камеры

Перспективное преобразование

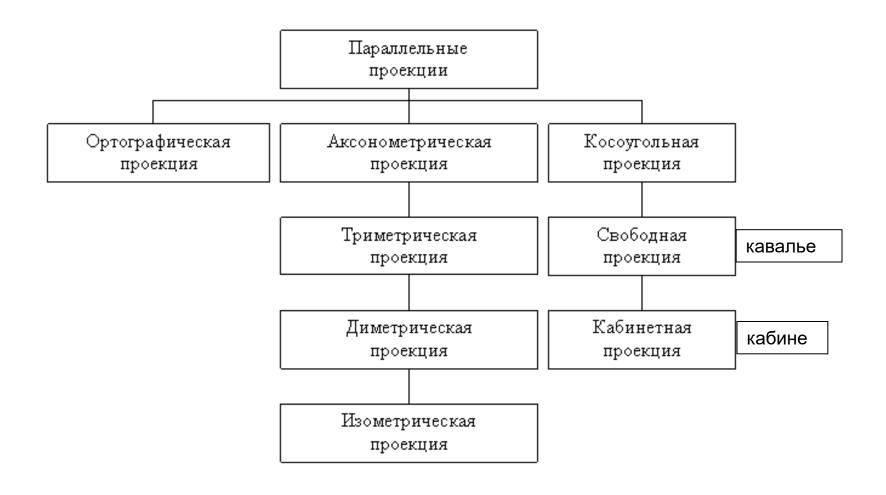
ПП – это преобразование одного трёхмерного пространства в другое, при котором:

- параллельные прямые сходятся,
- размер объекта уменьшается с увеличением расстояния до центра наблюдения,
- и происходит неоднородное искажение линий объекта, зависящее от ориентации и расстояния от объекта до центра проекции.

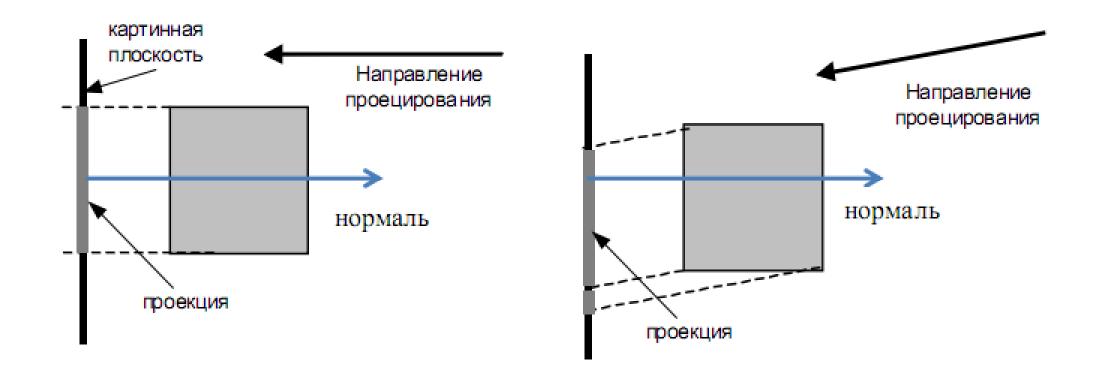
Это помогает нашему восприятию глубины, но не сохраняет форму объекта.



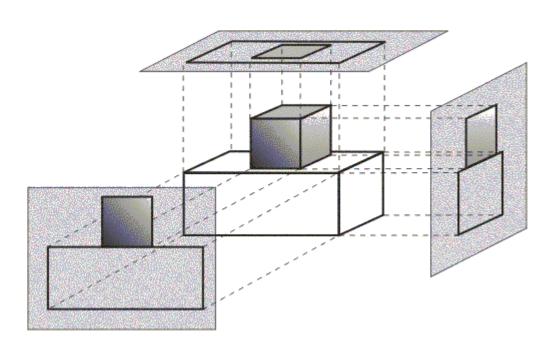
Классификация параллельных проекций



Ортографические, аксонометрические и косоугольные проекции



Ортографические проекции. Где применяются?



$$[P_x] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

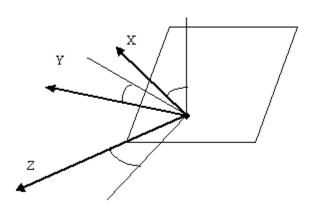
$$\begin{bmatrix} P_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix}$$

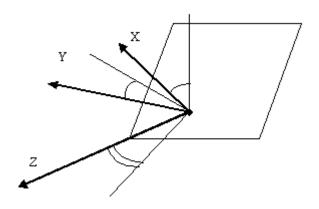
Аксонометрические проекции

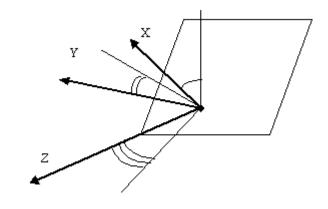
$$\begin{bmatrix} \cos \boldsymbol{\psi} & 0 & -\sin \boldsymbol{\psi} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \boldsymbol{\psi} & 0 & \cos \boldsymbol{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \boldsymbol{\varphi} & \sin \boldsymbol{\varphi} & 0 \\ 0 & -\sin \boldsymbol{\varphi} & \cos \boldsymbol{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

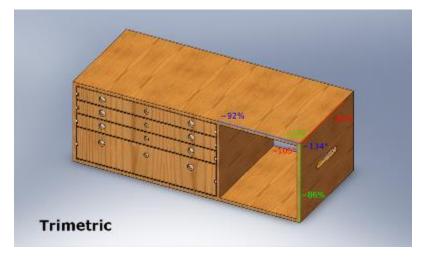
$$[M] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \phi \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

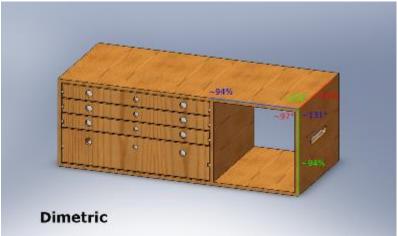
Аксонометрические проекции. Где применяются?

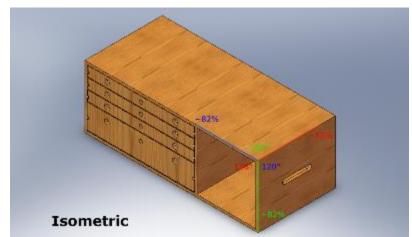






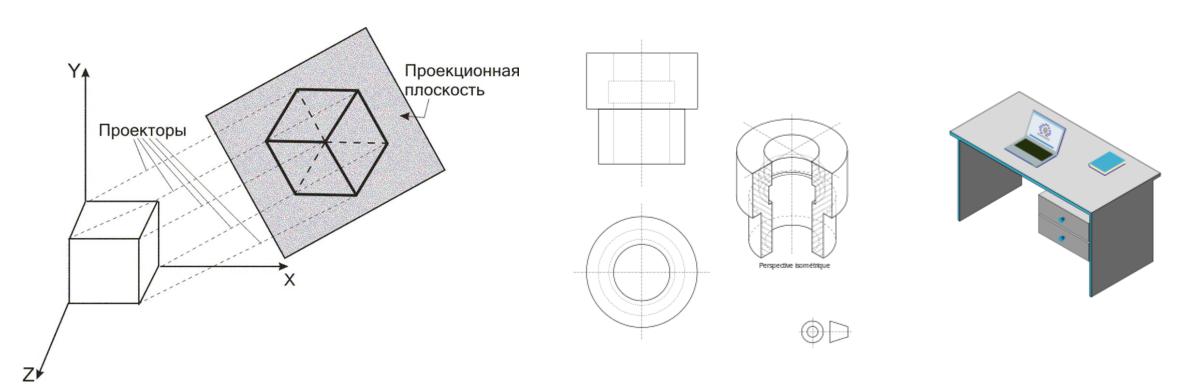


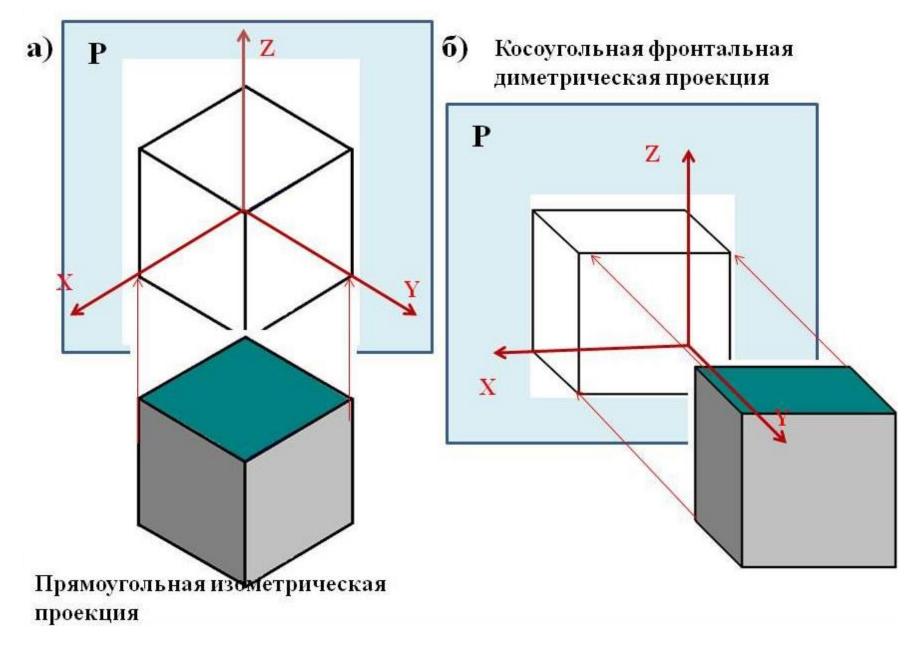




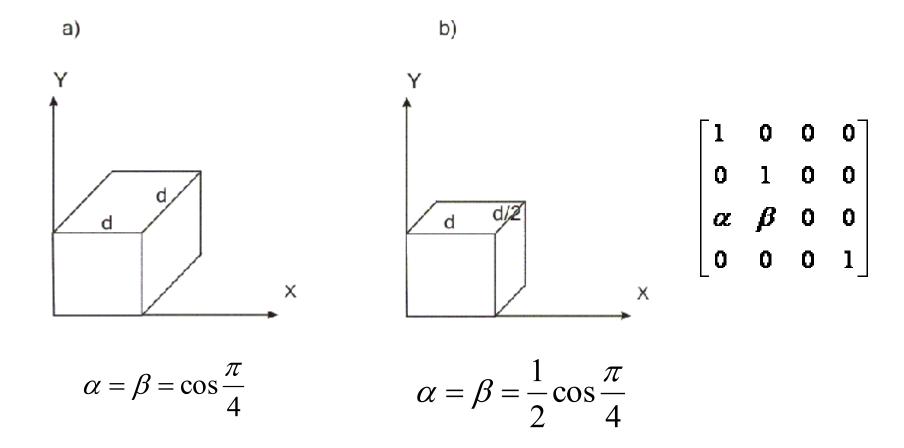
Изометрическая проекция. Применение

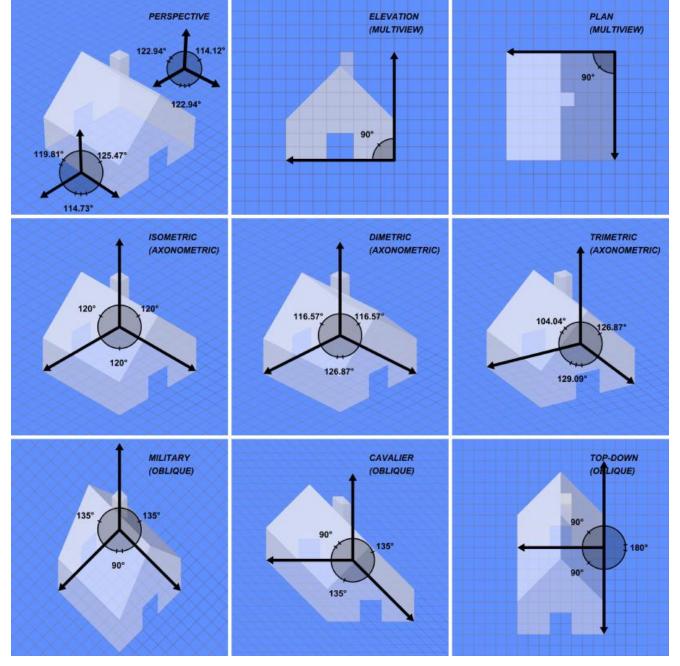
- Используется
 - в машиностроительном черчении и САПР для построения наглядного изображения детали на чертеже,
 - а также в компьютерных играх для трёхмерных объектов и панорам.





Проекции: кавалье (cavalier) и кабине (cabinet)



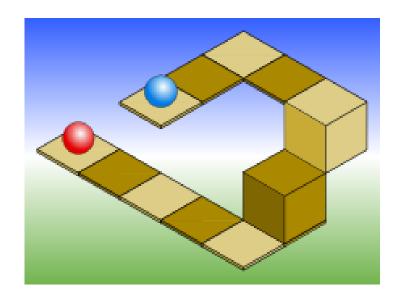


Ограничения аксонометрической проекции

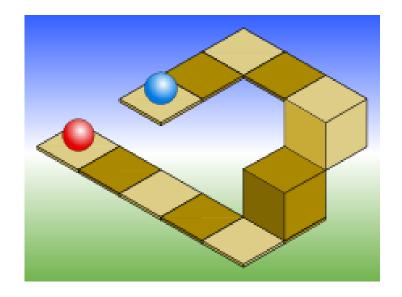
Как и в других видах параллельных проекций, объекты в аксонометрической проекции не выглядят больше или меньше при приближении или удалении от наблюдателя.

Это удобно в спрайто-ориентированных компьютерных играх, но, в отличие от перспективной проекции, приводит к ощущению искривления, поскольку человеческий глаз работает иначе.

Ограничения аксонометрической проекции: что вы видите?



Ограничения аксонометрической проекции: что на самом деле

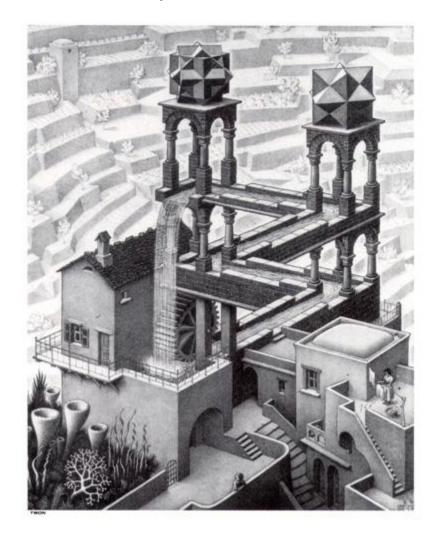


Голубой шар на два уровня выше красного

«Водопад»— литография голландского художника Эшера (октябрь 1961) Что видите?



«Водопад» — парадокс



Изображён парадокс — падающая вода водопада управляет колесом, которое направляет воду на вершину водопада. Водопад имеет структуру «невозможного» треугольника Пенроуза: Водопад на литографии работает как вечный двигатель.

Треугольник Пенроуза

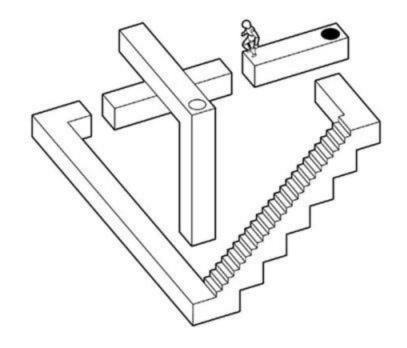




Скульптура, кажущийся треугольник, Немецкий технический музей

Та же скульптура при изменении точки просмотра

Кадр из игры «echochrome»



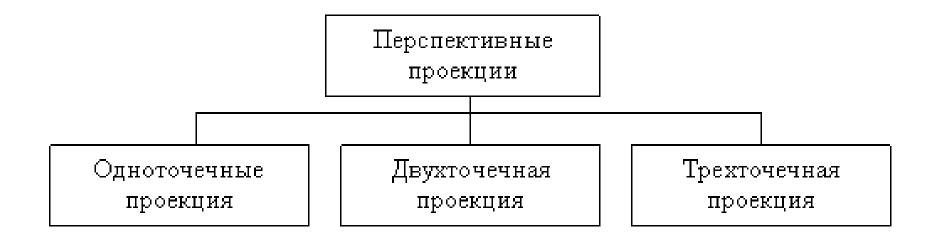
Слоган игры — «В этом мире то, что ты видишь, становится реальностью»

Аркадные игры начала 1980-х

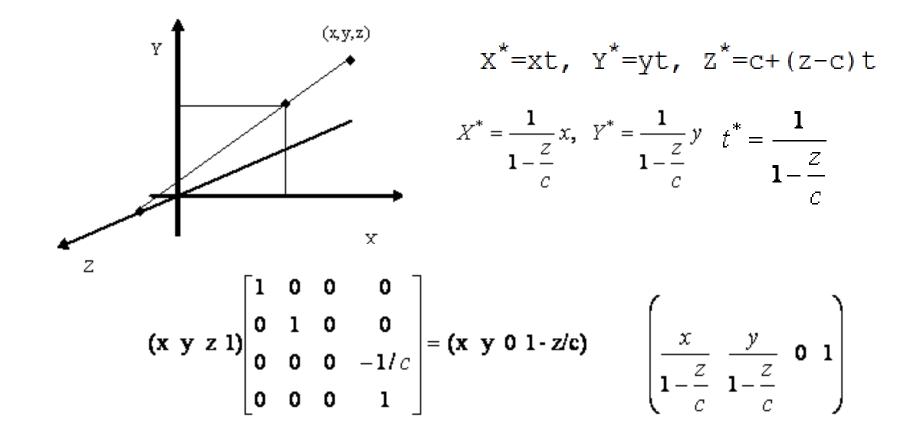


Q*bert (1982) — одна из первых игр с изометрической графикой

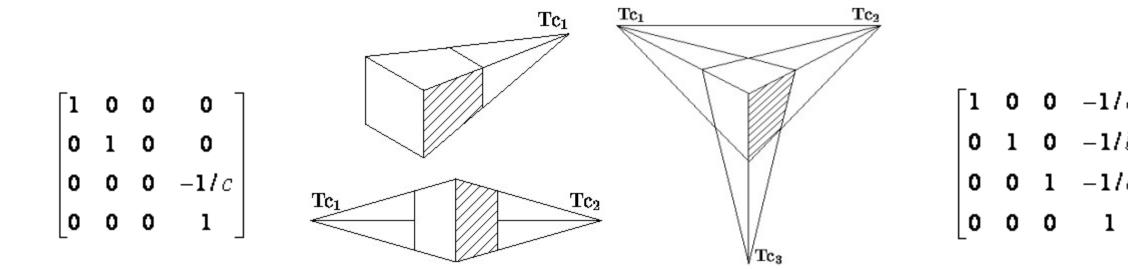
Классификация центральных проекций



Центральные проекции



Одноточечная, двухточечная и трёхточечная проекции



Заключение и выводы

- Аффинные преобразования это язык перемещения, вращения и масштабирования объектов в виртуальном мире.
- Однородные координаты это унифицированный и эффективный способ представить все эти преобразования.
- Перспективное проецирование это «магия», превращающая 3D в 2D, и она целиком основана на хитрой матрице и операции деления.
- Вместе они образуют математический фундамент всего, что движется и отображается в компьютерной графике.