

# Фракталы



в компьютерной графике

# Бенуа Мандельброт



1975 год

*"Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"*

для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур

**fractus** в переводе означает **состоящий из фрагментов**

# Фрактальная геометрия

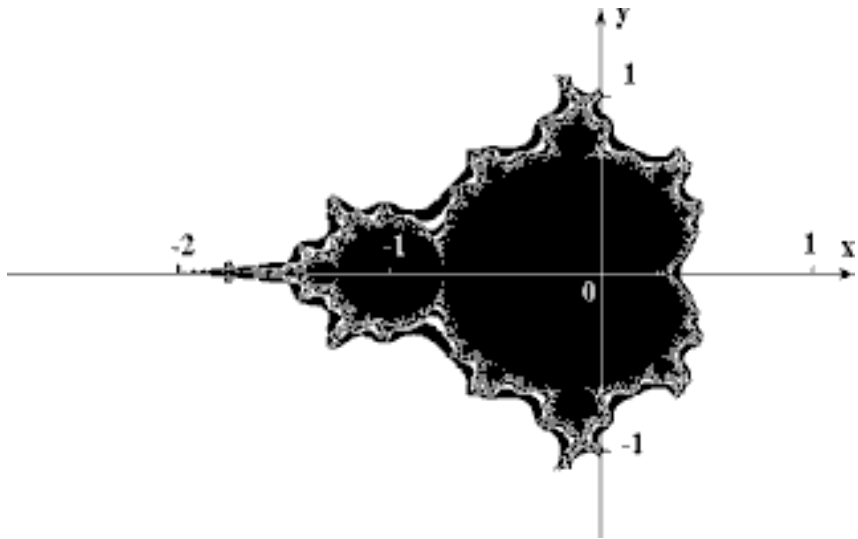
1977 год – книга Мандельброта

**The Fractal Geometry of Nature**

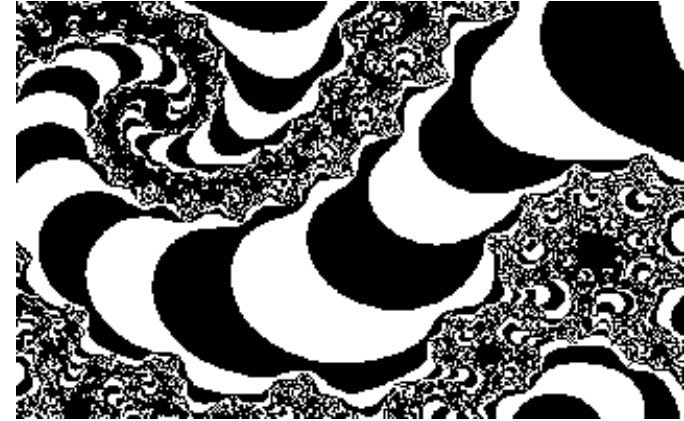
1875-1925 г.г. – Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф

Впервые множество Мандельброта было описано в [1905 году](#)  
[Пьером Фату](#) (Pierre Fatou), французским математиком,

# Множество Мандельброта



$$Z[i+1]=Z[i]*Z[i]+C$$

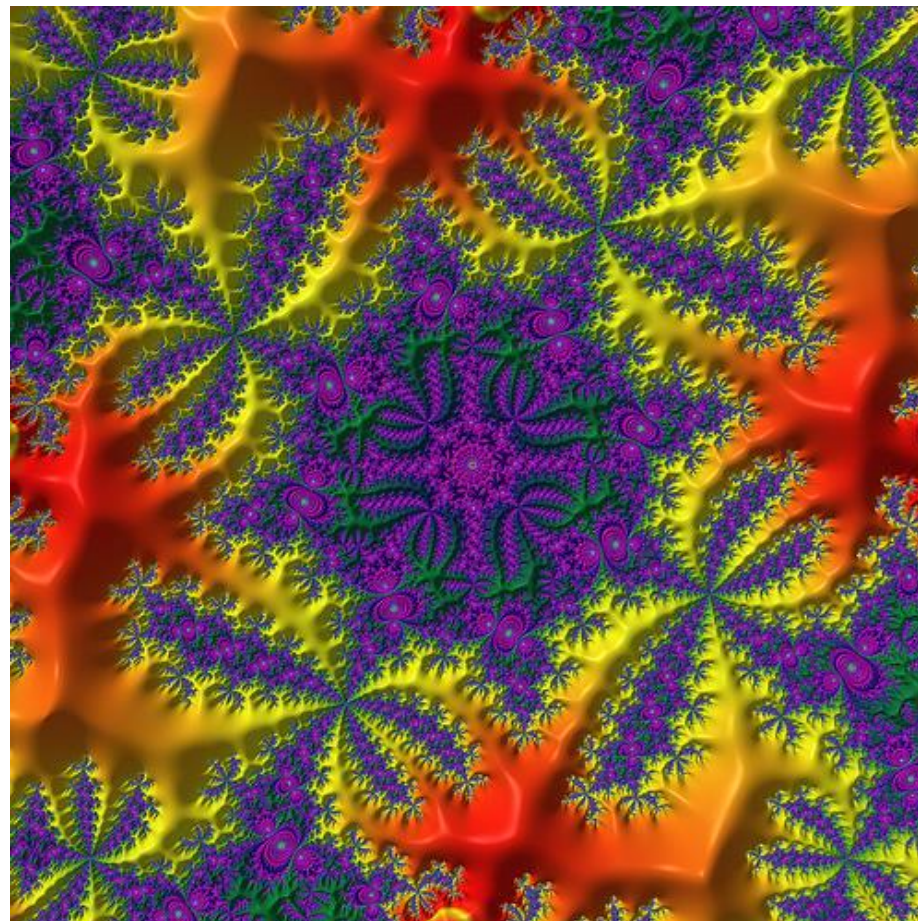


# Классификация фракталов

- Геометрические фракталы
- Алгебраические фракталы
- Стохастические фракталы



# Примеры фракталов



# Береговая линия





# Построение береговой линии





# Болота



# Горная система





# Капуста



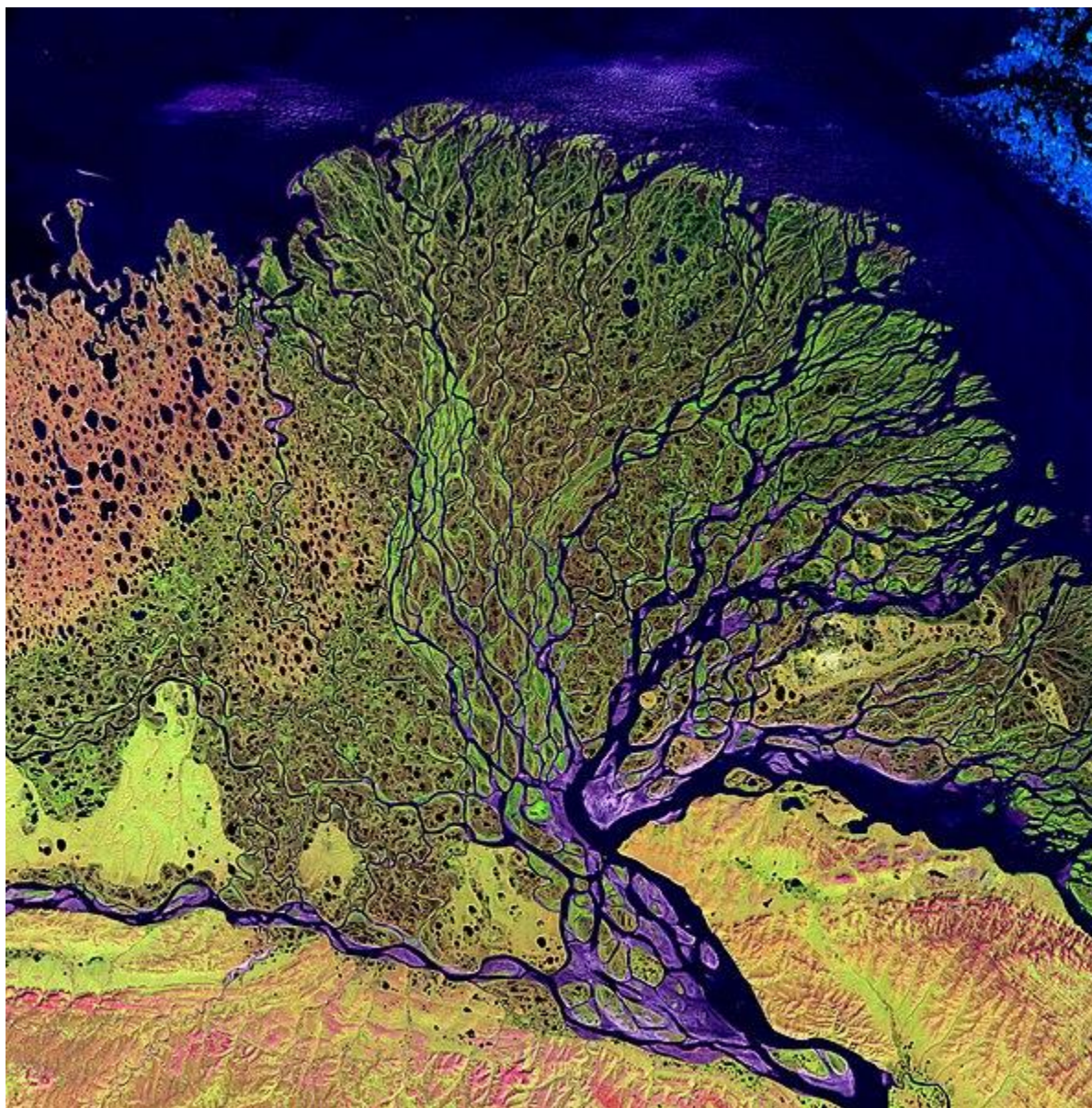


Листья



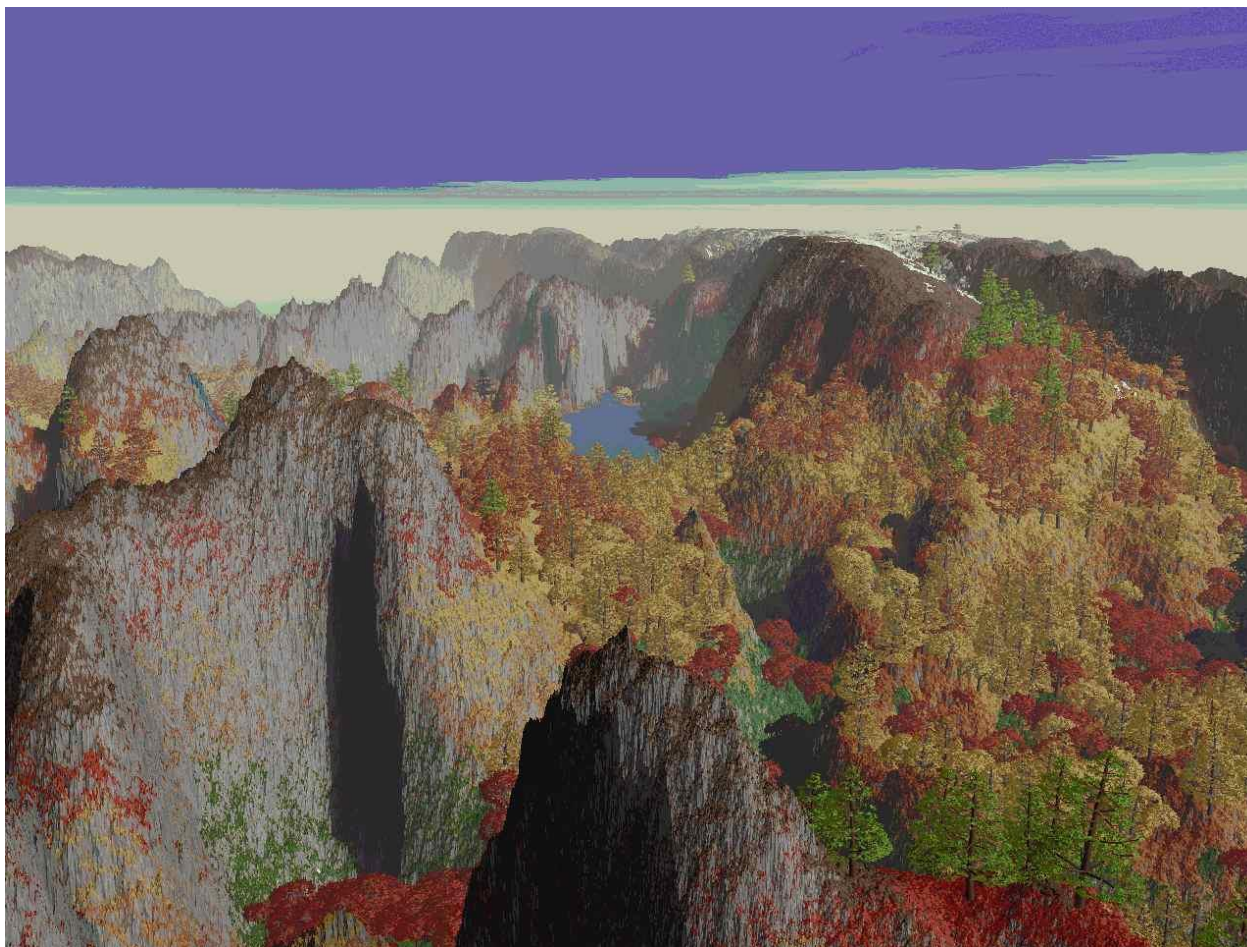


# Дельта реки Лена

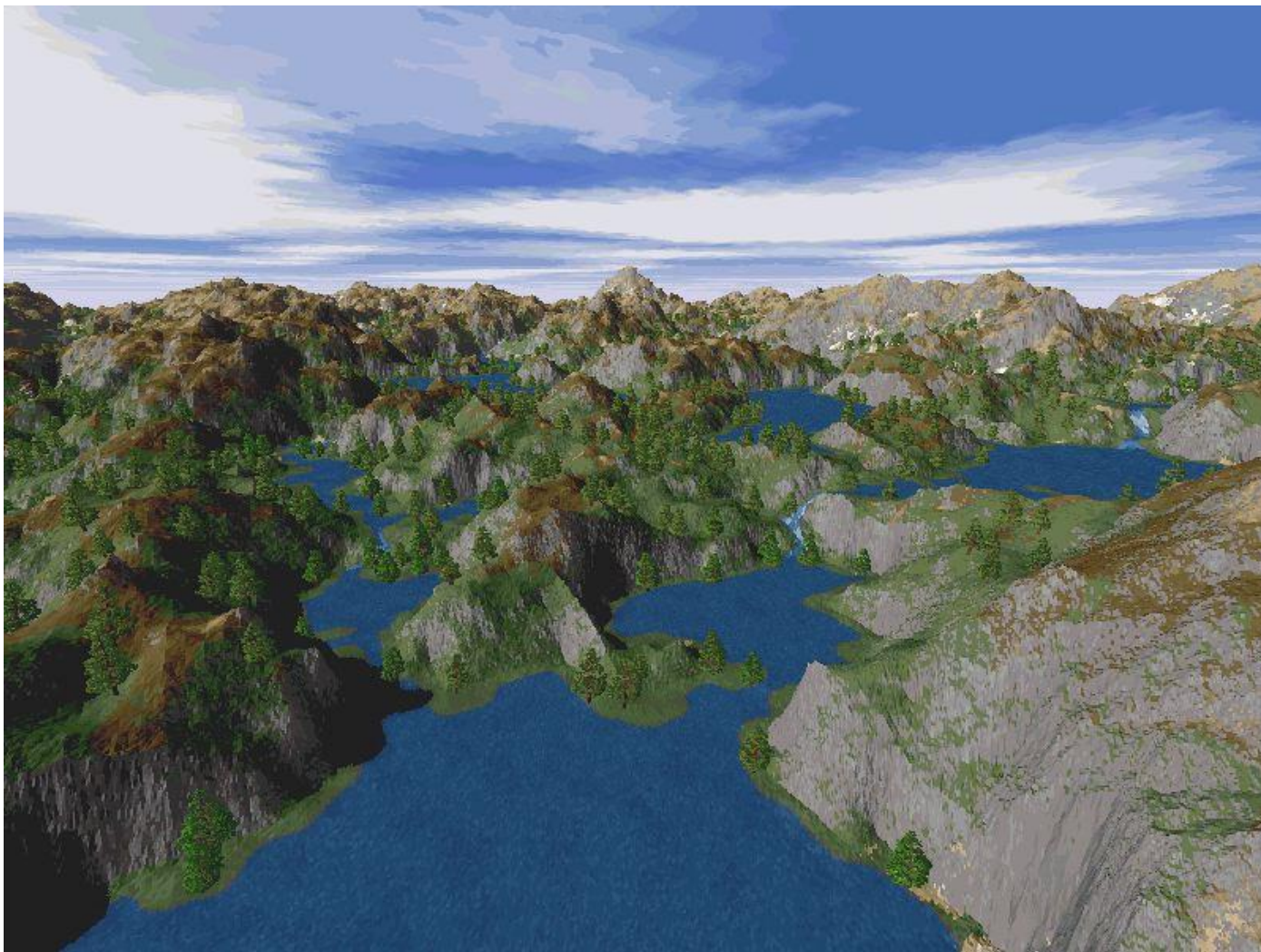




# 3D-пейзаж



## 3D-пейзаж

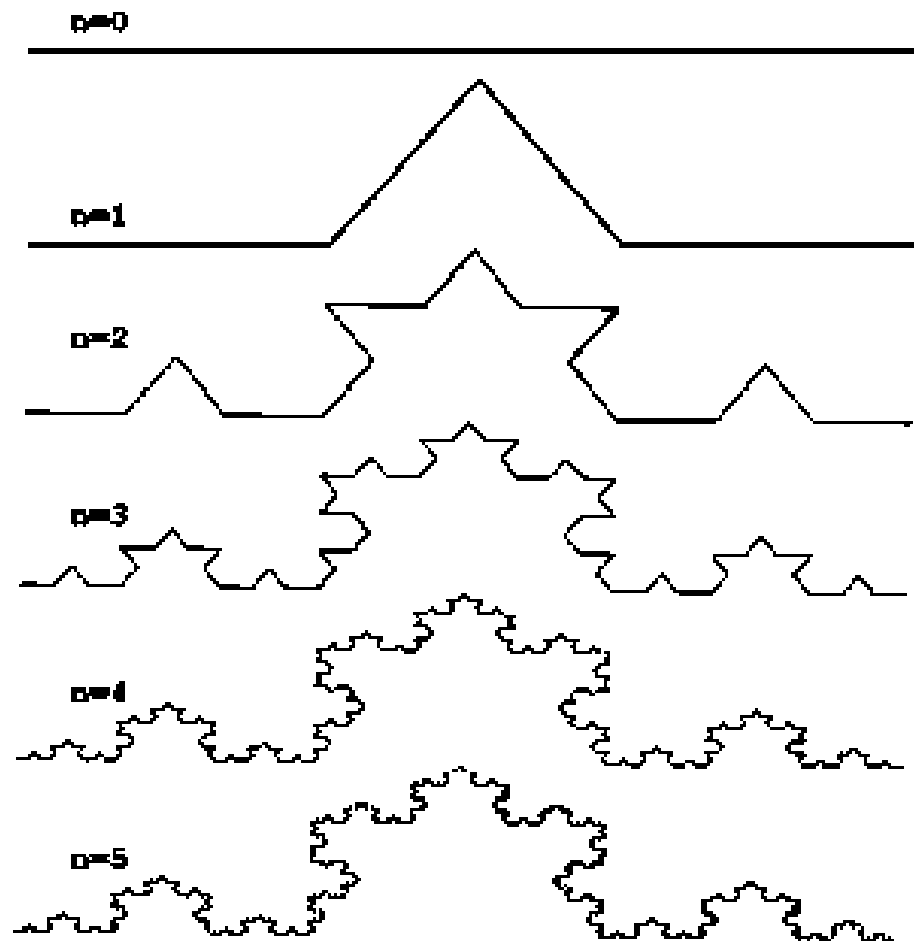




# 3D-пейзаж



# Построение триадной кривой Коха





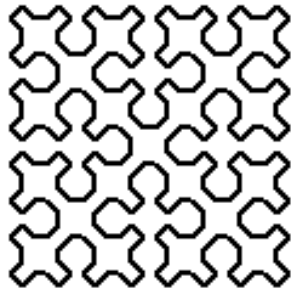
# Ковер Серпинского



$S_1$  – «Ковер Серпинского» первого порядка

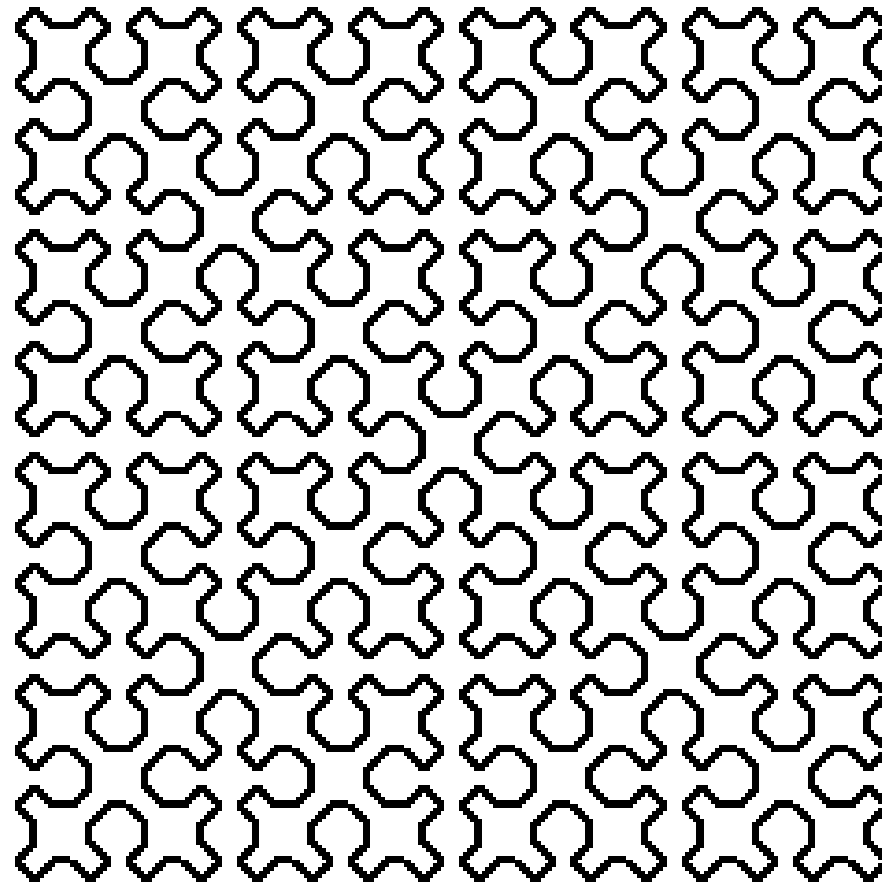


$S_2$  – «Ковер Серпинского» второго порядка



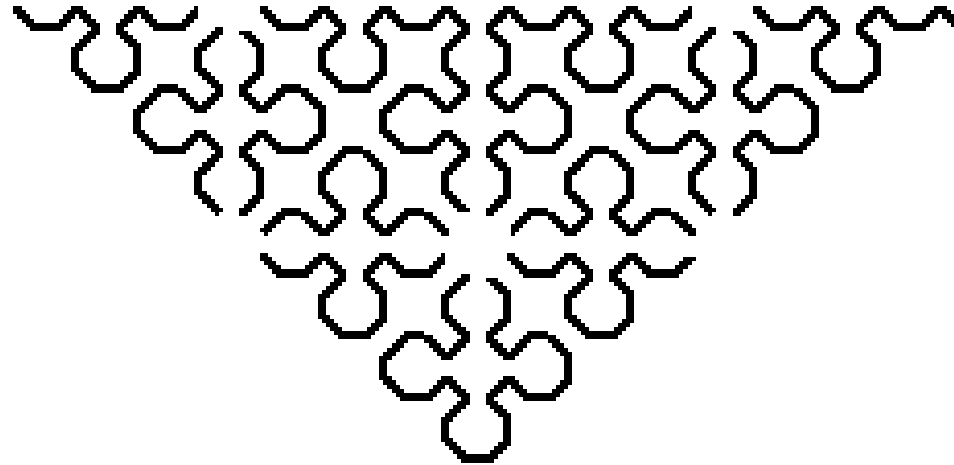
$S_3$  – «Ковер Серпинского» третьего порядка

## S4 – «Ковер Серпинского» четвертого порядка





## Составляющая A четвертого порядка



# Рекуррентные соотношения

$S_0$ : A ↘ B ↙ C ↗ D ↗ .

$S_i$ : для  $i > 0$  A, B, C, D строятся следующим образом:

A: A ↘ B → D ↗ A

B: B ↙ C ↓ A ↘ B

C: C ↗ D ← B ↙ C

D: D ↗ A ↑ C ↗ D

```
var a, b, x, y, n: integer;
```

```
procedure lrel (dx,dy: integer);
```

```
begin
```

```
  x:=x+dx; y:=y+dy;
```

```
  LineTo(x,y)
```

```
end;
```

```
procedure BB(k: integer);
```

```
procedure CC(k: integer);
```

```
procedure DD(k: integer);
```



```
procedure AA(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      AA(k-1); lrel(a,b);  
      BB(k-1); lrel(a,0);  
      DD(k-1); lrel(a,-b);  
      AA(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
procedure BB(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      BB(k-1); lrel(-a,b);  
      CC(k-1); lrel(0,b);  
      AA(k-1); lrel(a,b);  
      BB(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
procedure CC(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      CC(k-1); lrel(-a,-b);  
      DD(k-1); lrel(-a,0);  
      BB(k-1); lrel(-a,b);  
      CC(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
procedure DD(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      DD(k-1); lrel(a,-b);  
      AA(k-1); lrel(0,-b);  
      CC(k-1); lrel(-a,-b);  
      DD(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
begin
  n:=6;           {порядок кривой}
  a:=3; b:=a;     {длины сторон}
  x:=10; y:=10;   {координаты начальной точки}
  SetWindowCaption('Ковер Серпинского');
  SetWindowSize(590,590);
  MoveTo(x,y);
  AA(N); lrel(a,b);
  BB(N); lrel(-a,b);
  CC(N); lrel(-a,-b);
  DD(N); lrel(a,-b)
end.
```



# Системы построения фрактальных изображений

- Iterated function systems (IFS) — Системы итерируемых функций, итерированных функций, повторяющихся функций
- L-системы

# Метод IFS

середина 80-х годов

Наиболее простая версия IFS состоит из аффинных преобразований плоскости:

$$X1=A*X+B*Y+C$$

$$Y1=D*X+E*Y+F$$

Также для построения IFS применяют

проективные:

$$X1=(A1*X+B1*Y+C1)/(D1*X+E1*Y+F1)$$

$$Y1=(A2*X+B2*Y+C2)/(D2*X+E2*Y+F2)$$

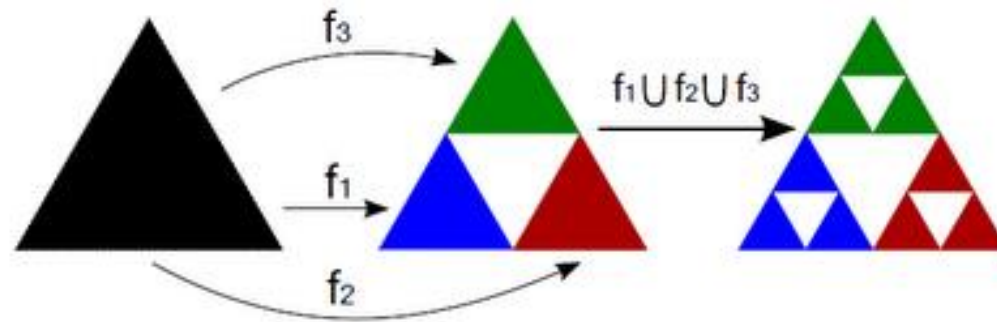
или квадратичные:

$$X1=A1*X*X+B1*X*Y+C1*Y*Y+D1*X+E1*Y+F1$$

$$Y1=A2*X*X+B2*X*Y+C2*Y*Y+D2*X+E2*Y+F2$$

преобразования на плоскости.

# Пример построения треугольника Серпинского с помощью IFS



$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ f_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ f_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# L-системы (Lindenmayer System)

В 1968г. Венгерский биолог и ботаник Аристид Линденмайер



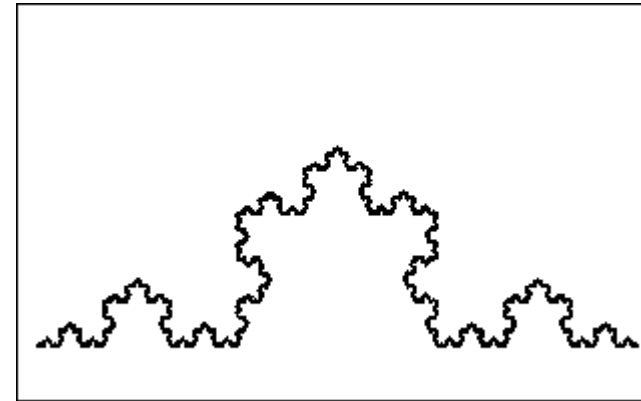
**Простейшие L-системы**  
**Растения и ветвящиеся структуры**  
**Стохастические L-системы**  
**Контекстно-зависимые L-системы**  
**Параметрические L-системы**

# Детерминированная контекстнезависимая L-система

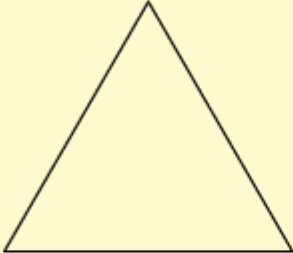
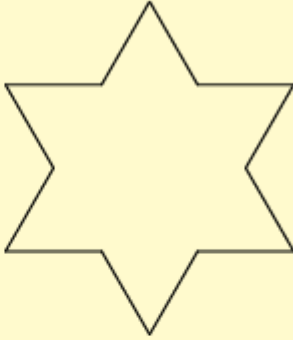
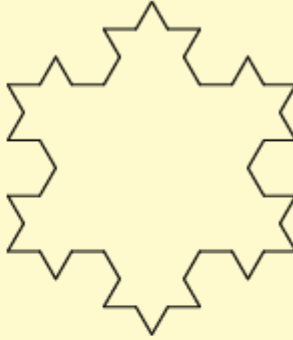
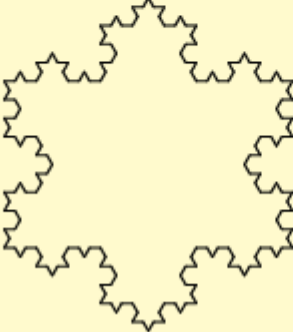
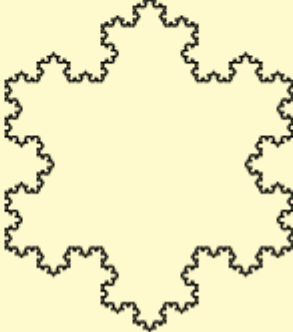
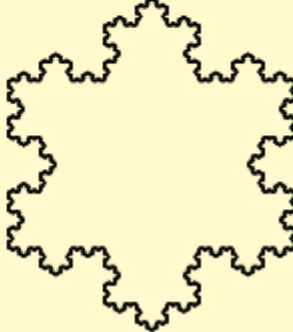
- алфавит, аксиомы и множества правил

## КРИВАЯ КОХА

- F
- $F \rightarrow F-F++F-F$
- $60^\circ$



# Поколения снежинки Коха

| поколения | изображения                                                                         |                                                                                      |                                                                                      |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 0, 1, 2   |   |   |   |
| 3, 4, 5   |  |  |  |

| аксиома            | правило                                    |
|--------------------|--------------------------------------------|
| $\text{「F++F++F」}$ | $\text{「F」} \rightarrow \text{「F-F++F-F」}$ |

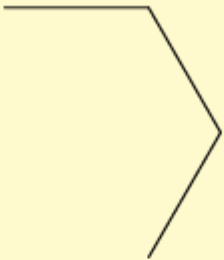
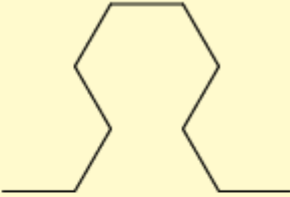
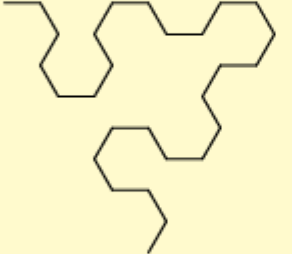
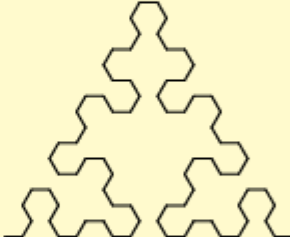
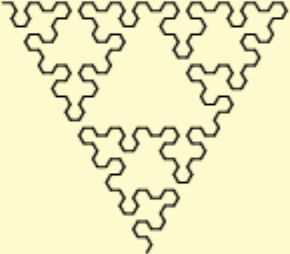
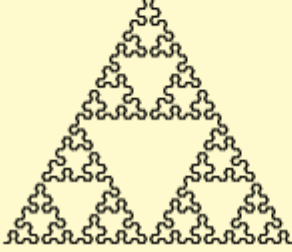
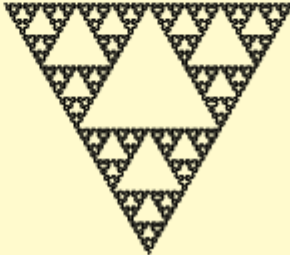
# Квадратный остров Коха

- $F + F + F + F$
- $F \rightarrow F + F - F - F \quad F + F + F - F$
- $90^\circ$



# Ковер Серпинского

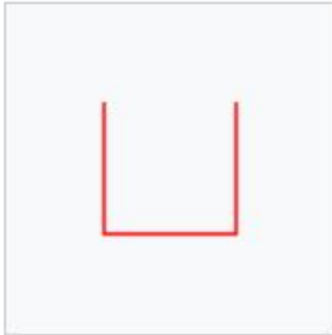
- $FXF--FF--FF$
- $F \rightarrow FF$
- $X \rightarrow --FXF++FXF++FXF--$
- $60^\circ$

| поколения | изображение                                                                          |                                                                                      |                                                                                      |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 0, 1, 2   |   |   |   |
| 3, 4, 5   |   |   |   |
| 6, 7, 8   |  |  |  |

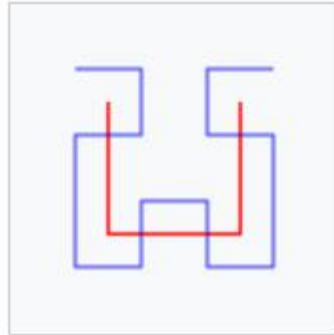
# Наконечник Серпинского

- $YF$
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow YF + XF + Y$
- $Y \rightarrow XF - YF - X$
- $60^\circ$

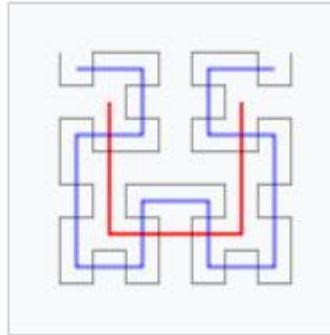
# Кривая Гильберта



Кривая Гильберта,  
первый шаг



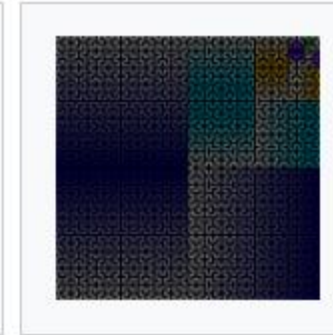
Кривые Гильберта,  
первый и второй шаги



Кривые Гильберта, с  
первого по третий шаги



Ниточная графика



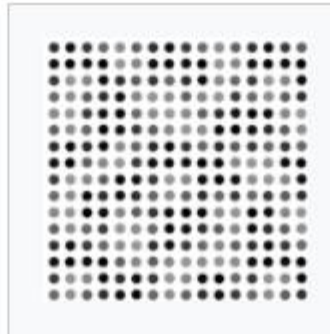
Кривая Гильберта в  
цвете



Трёхмерная кривая  
Гильберта



Трёхмерная кривая  
Гильберта в цвете,  
указывающем  
последовательность

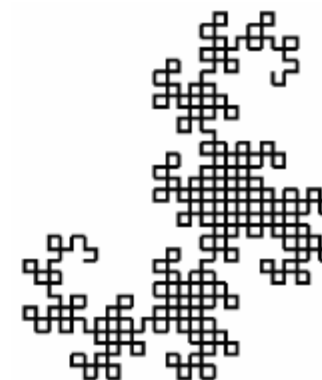
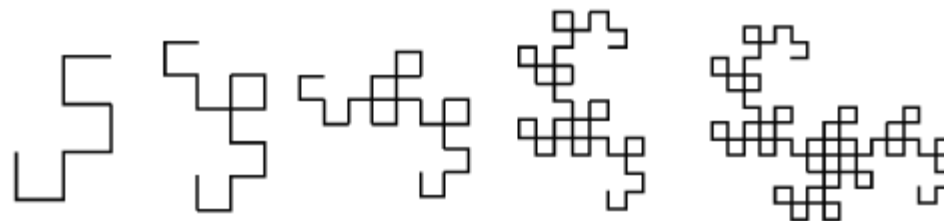
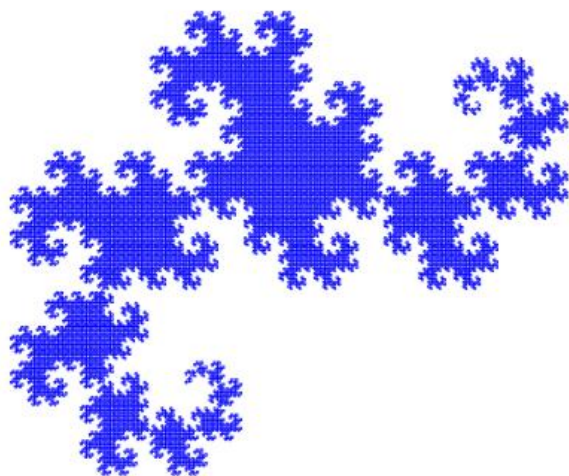
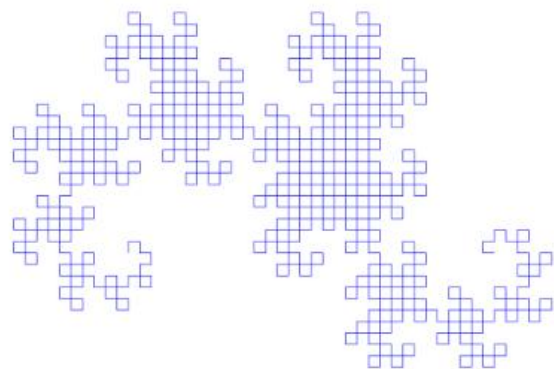


Анимационная  
иллюстрация,  
показывающая  
прохождение кружков  
по кривой.

- X
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow -YF + XFX + FY -$
- $Y \rightarrow +XF - YFY - FX +$
- $90^\circ$

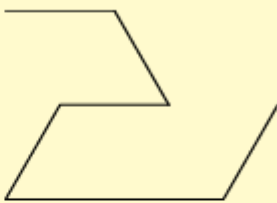
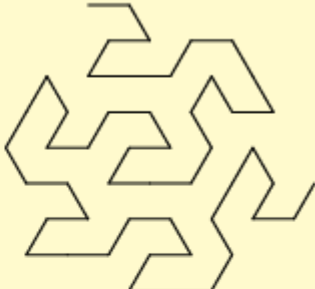
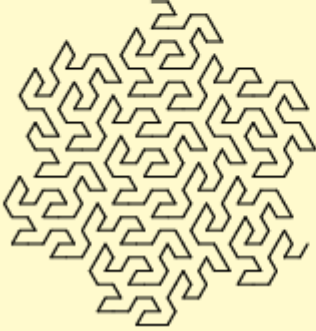
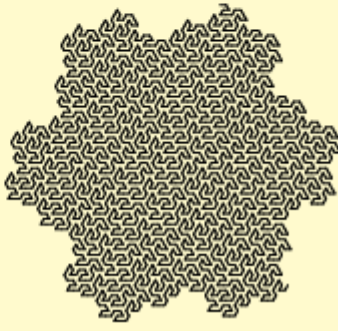
# Кривая дракона Хартера-Хейтуэя

- $X$
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow X + YF +$
- $Y \rightarrow -FX - Y$
- $90^\circ$



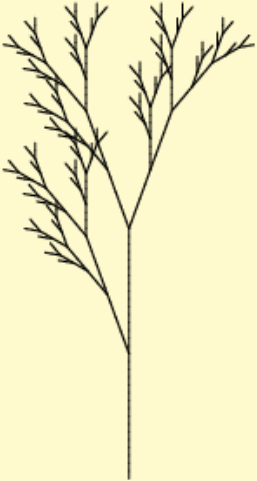
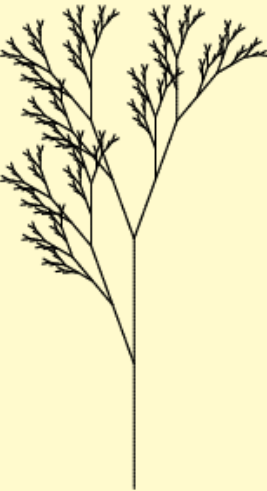
# Шестиугольная кривая Госпера

- $XF$
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow X+YF++YF-FX--FXFX-YF+$
- $Y \rightarrow -FX+YFYF++YF+FX--FX-Y$
- $60^\circ$

| поколения | изображение                                                                          |                                                                                      |                                                                                      |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 0, 1, 2   |   |   |   |
| 3, 4, 5   |  |  |  |



# Скобочные L-системы и деревья

| поколения  | изображение                                                                         |                                                                                      |                                                                                      |                                                                                      |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 0, 1, 2, 3 |                                                                                     |   |   |   |
| 4, 5, 6, 7 |  |  |  |  |

# Скобочные L-системы и деревья

| аксиома      | правила                                                                                | интерпретация                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{'X'}$ | $\text{'F'} \rightarrow \text{'FF'}$<br>$\text{'X'} \rightarrow \text{'F[+X]F[-X]+X'}$ | $\text{'F'} \rightarrow \langle \text{FORWARD } 1 \rangle$<br>$\text{'+'} \rightarrow \langle \text{ROTATE } 20 \rangle$<br>$\text{'-'} \rightarrow \langle \text{ROTATE } -20 \rangle$<br>$\text{'['} \rightarrow \langle \text{SAVE} \rangle$<br>$\text{']'} \rightarrow \langle \text{RESTORE} \rangle$ |

## Куст 1

- F
- $F \rightarrow FF - [-F + F + F] + [+F - F - F]$
- 22°

## Куст 2

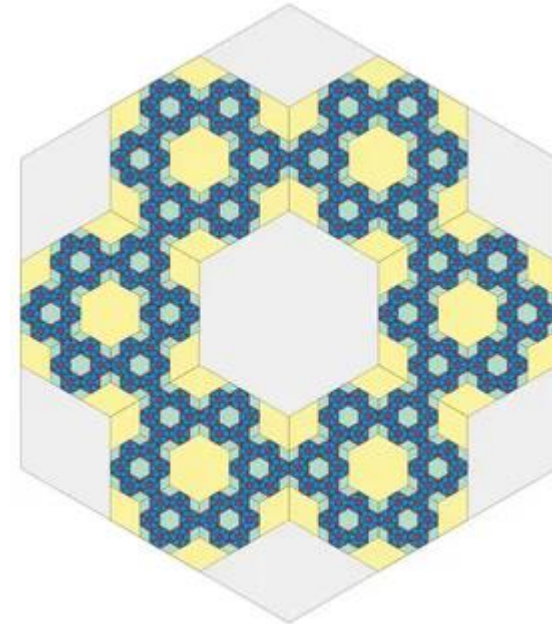
- X
- $F \rightarrow FF$
- $X \rightarrow F[+X]F[-X] + X$
- 20°

## Куст 3

- X
- $F \rightarrow FF$
- $X \rightarrow F - [[X] + X] + F[+FX] - X$
- 22.5°

# Шестиугольная мозаика

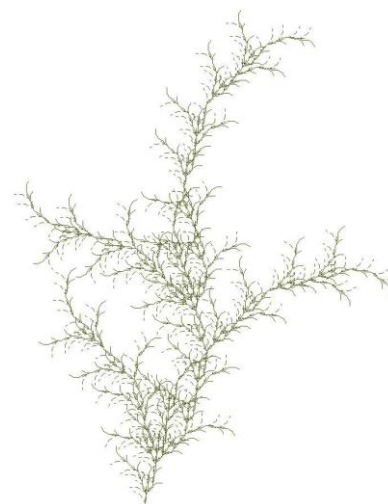
- X
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow [-F + F[Y] + F][+F - F[X] - F]$
- $Y \rightarrow [-F + F[Y] + F][+F - F - F]$
- $60^\circ$

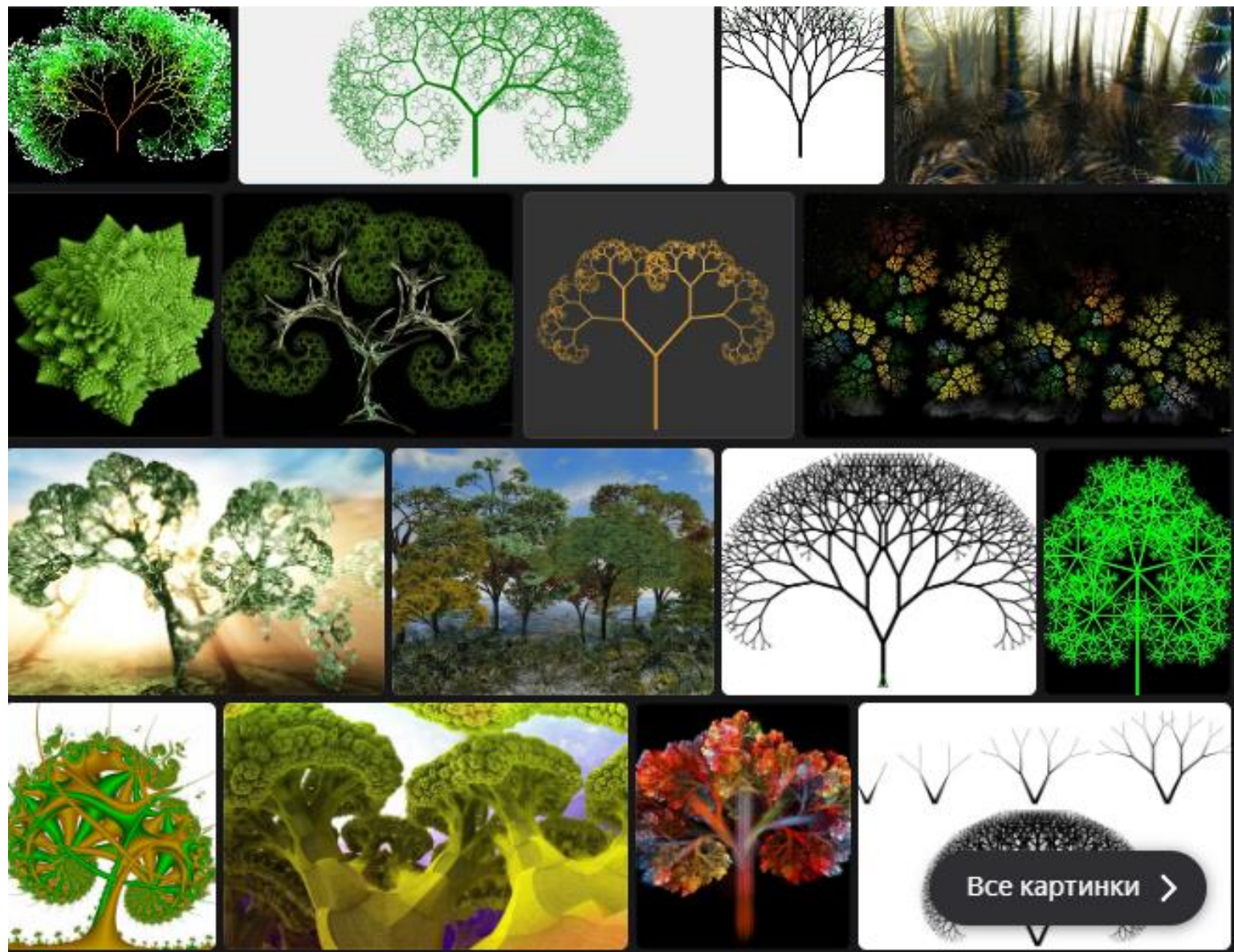


# L-системы образуют реальные модели растений

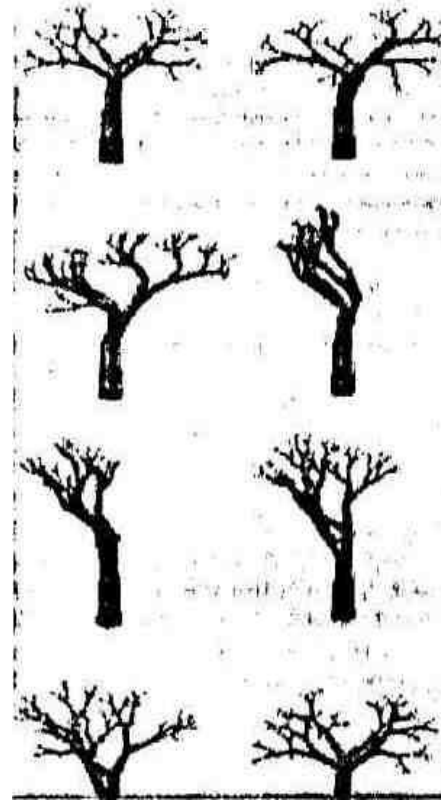
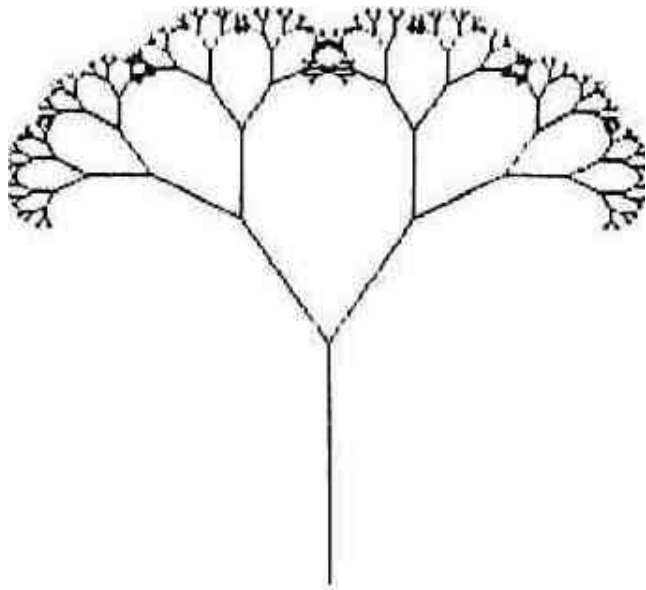






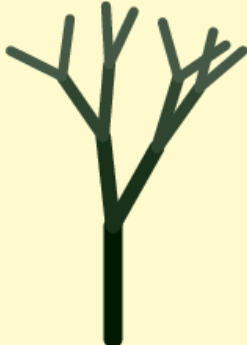


# Пример построения дерева с помощью L – системы

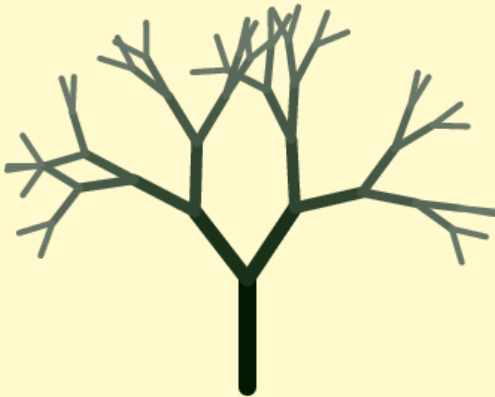


## Добавим случайность в дерево

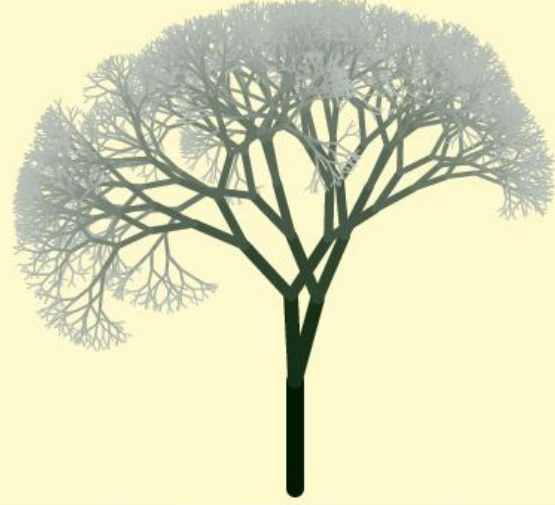
| аксиома      | правило                                     | интерпретация                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{'X'}$ | $\text{'X'} \rightarrow \text{'F[@[-X]+X]}$ | $\text{'F'} \rightarrow \langle \text{FORWARD } 1 \rangle$<br>$\text{'X'} \rightarrow \langle \text{FORWARD } 1 \rangle$<br>$\text{'+'} \rightarrow \langle \text{ROTATE RANDOM } 45 \rangle$<br>$\text{'-'} \rightarrow \langle \text{ROTATE -RANDOM } 45 \rangle$<br>$\text{'['} \rightarrow \langle \text{SAVE} \rangle$<br>$\text{']'} \rightarrow \langle \text{RESTORE} \rangle$<br>$\text{'@'} \rightarrow \langle \dots \rangle$ |

| поколения | изображение                                                                          |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 0         |   |
| 1         |   |
| 2         |   |
| 3         |  |

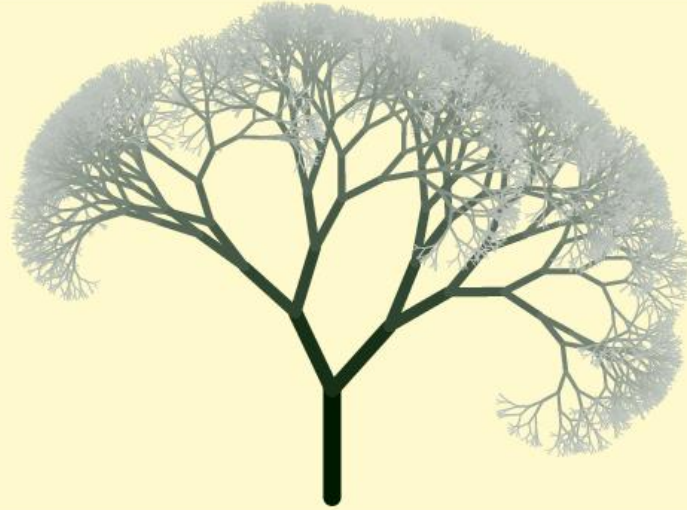


|   |                                                                                      |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 |   |
| 5 |   |
| 6 |  |

12



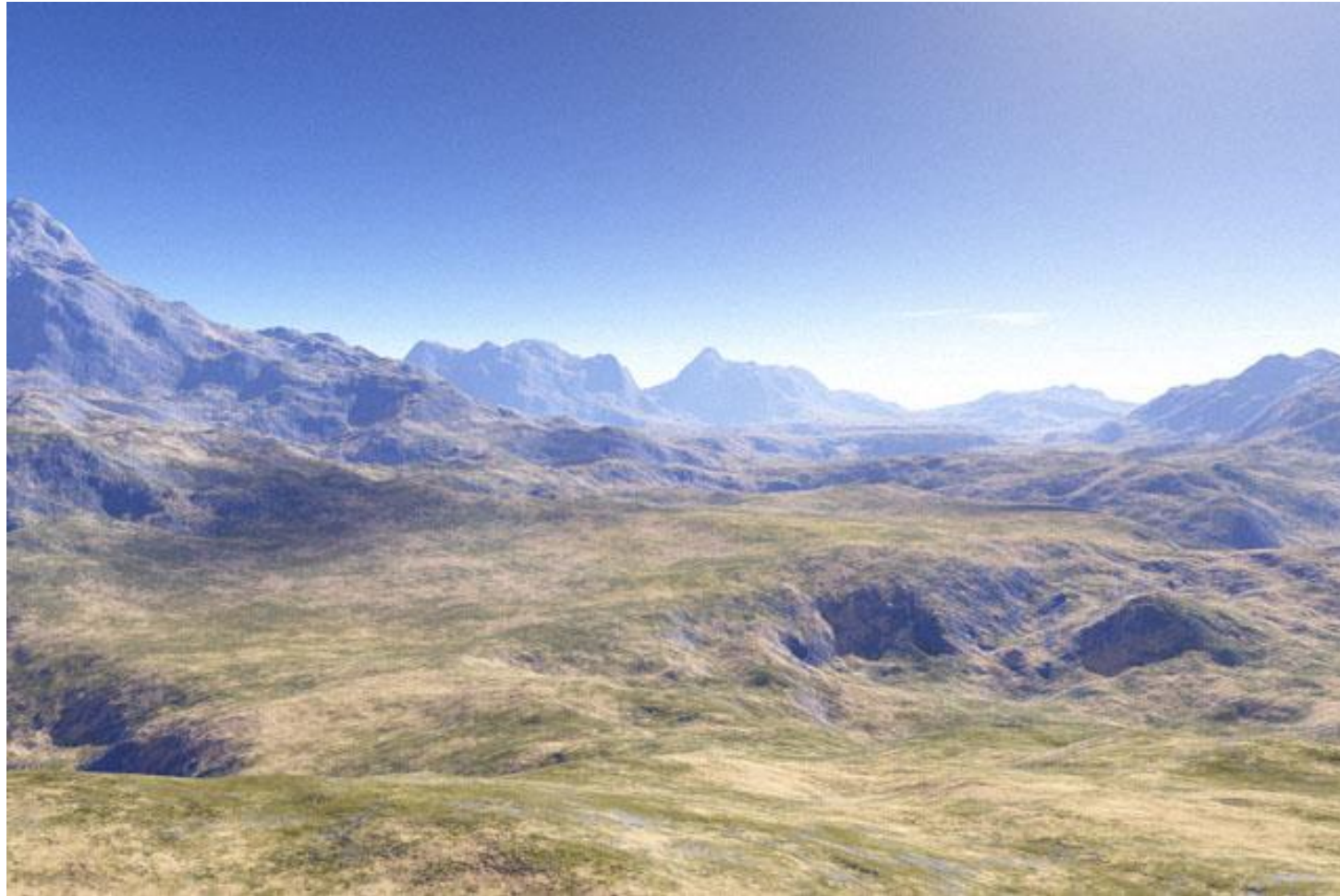
13



# Фракталы в природе повсюду



# Сгенерированная компьютером фрактальная поверхность





И это тоже сгенерировано компьютером





# Фрактальная поверхность (Fractal landscape)

- Поверхность, сгенерированная с использованием стохастического алгоритма, предназначенного для создания фрактального объекта, который имитирует внешний вид природной местности.
- Иными словами, фрактальная поверхность появляется не в результате жестко заданной процедуры, а, является, скорее, случайным объектом, обладающим свойствами фрактала.

Википедия

# Использование в киноиндустрии

- Первым использованием в киносъёмках пейзажа, сгенерированного компьютером, стал фильм 1982 года Звёздный путь 2: Гнев Хана.
- Американский исследователь компьютерной графики Лорен Карпентер использовал усовершенствованные методы Мандельброта для моделирования инопланетного ландшафта

# Общий план действий

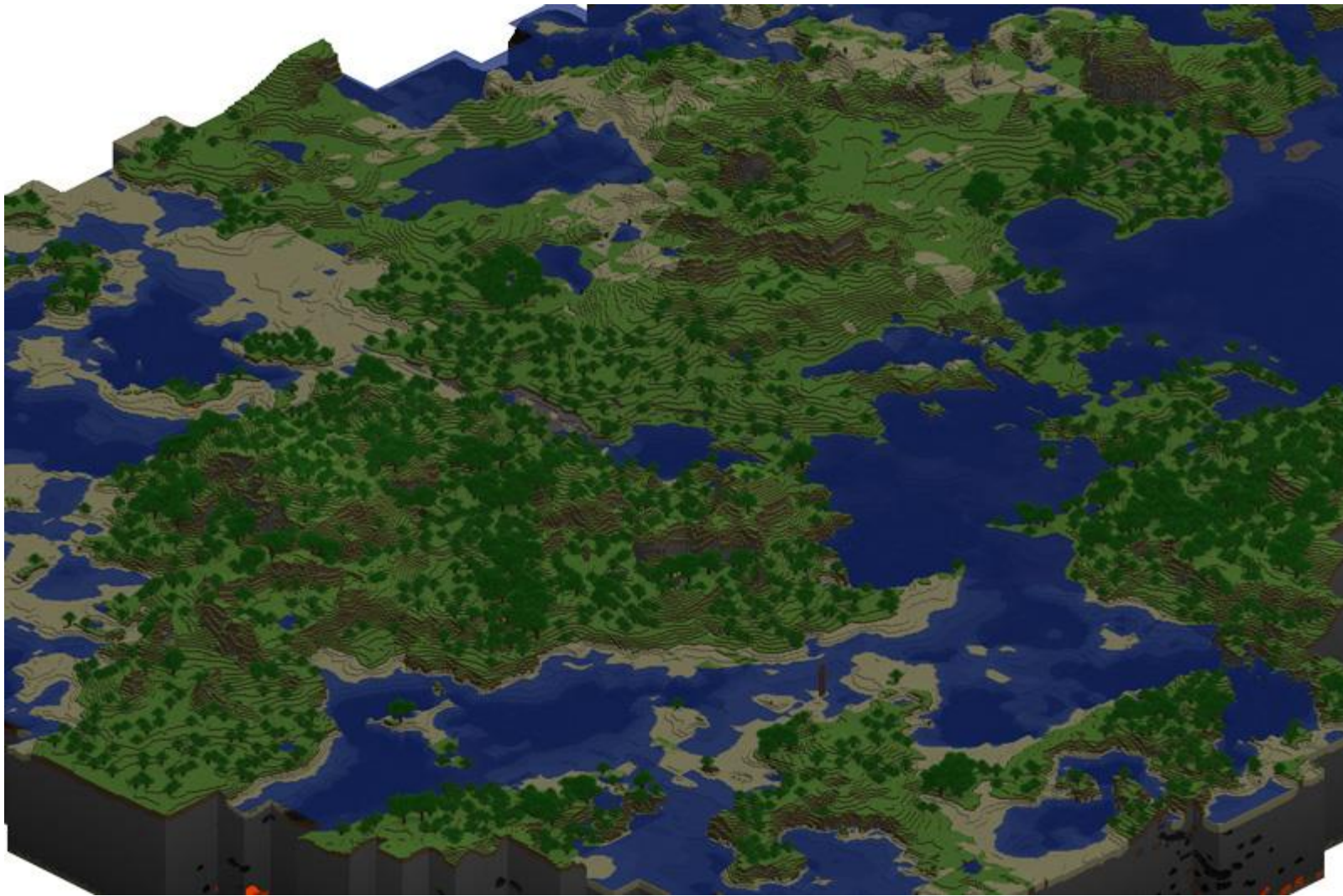
- Создание карты высот
- Распределение биомов
- Запуск водной эрозии
- Дополнительные действия

| Уровень<br>высоты | Влажность                     |                                |                             |        |                   |                           |
|-------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|--------|-------------------|---------------------------|
|                   | 6<br>(влажно)                 | 5                              | 4                           | 3      | 2                 | 1<br>(сухо)               |
| 4<br>(высоко)     | СНЕГ                          |                                |                             | ТУНДРА | ПУСТОШЬ           | СУХАЯ ЗЕМЛЯ               |
| 3                 | ТАЙГА                         |                                | КУСТАРНИКИ                  |        | УМЕРЕННАЯ ПУСТЫНЯ |                           |
| 2                 | УМЕРЕННЫЙ<br>ДОЖДЛИВЫЙ<br>ЛЕС | УМЕРЕННЫЙ<br>ЛИСТВЕННЫЙ<br>ЛЕС |                             | ТРАВА  |                   | УМЕРЕННАЯ<br>ПУСТЫНЯ      |
| 1<br>(низко)      | ТРОПИЧЕСКИЙ<br>ДОЖДЛИВЫЙ ЛЕС  |                                | ТРОПИЧЕСКИЙ<br>СЕЗОННЫЙ ЛЕС |        | ТРАВА             | СУБТРОПИЧЕСКАЯ<br>ПУСТЫНЯ |

# Способы построения карты высот

- Заполнение карты высот случайным образом
- Создание холмов «вручную»
- Алгоритм diamond-square
- Ландшафт на базе диаграммы Вороного

# Ландшафт в Minecraft

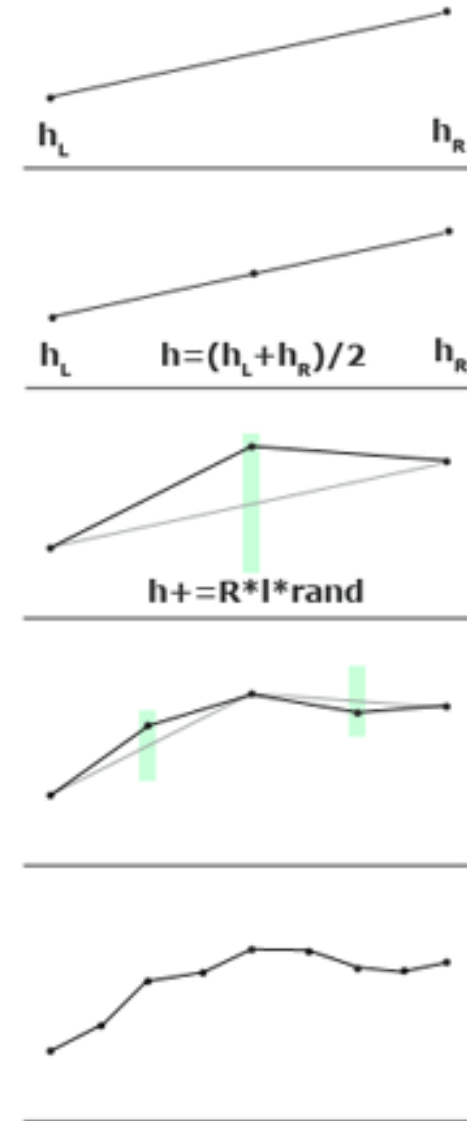




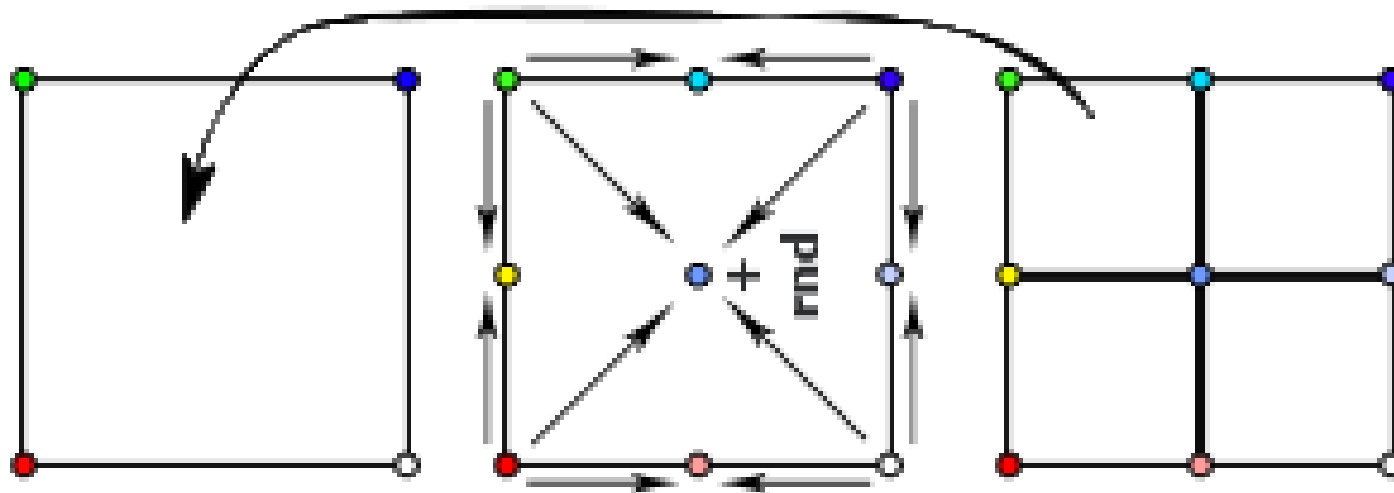
# Алгоритм diamond-square (2D) или midpoint displacement



$$h = (h_L + h_R) / 2 + \text{random}(-R * L, R * L)$$
  
( $h_L$  и  $h_R$  — высоты на левом и правом конце отрезка,  
а константа  $R$  определяет «шероховатость»  
получающейся ломаной,  $L$  — длина разбиваемого  
отрезка)



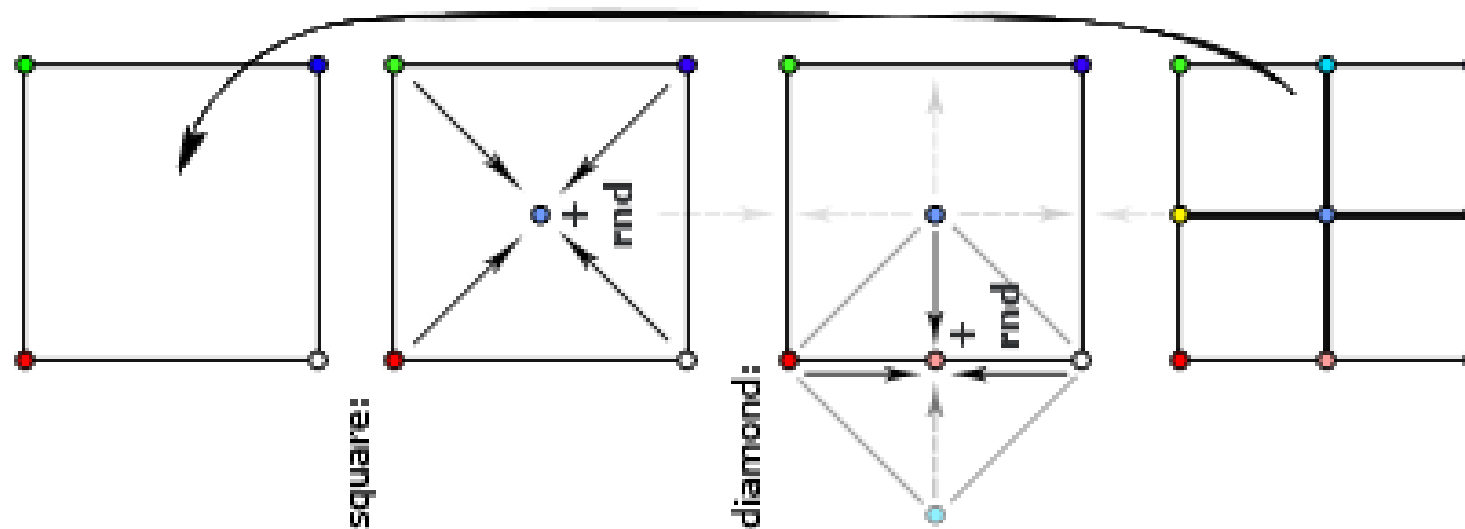
# Алгоритм midpoint displacement



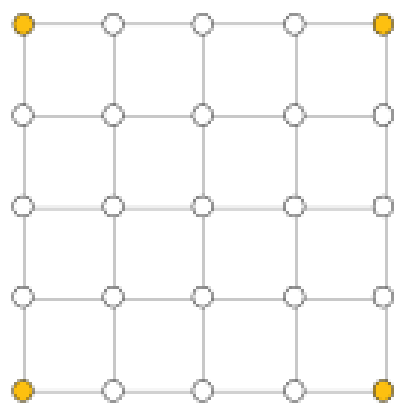
# Недостатки алгоритма midpoint displacement

- Идея была впервые представлена Фурнье, Фусселлом и Карпентером на SIGGRAPH 1982.
- Позднее он был проанализирован Гавином С. П. Миллером в SIGGRAPH 1986, который описал его как ошибочный – алгоритм производит заметные вертикальные и горизонтальные «складки» из-за значительных возмущений, происходящих в прямоугольной сетке.

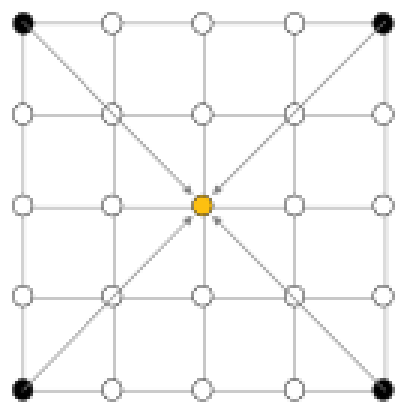
# Алгоритм diamond-square



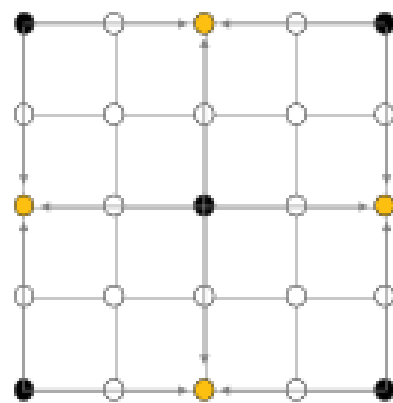
# Алгоритм diamond-square (3D)



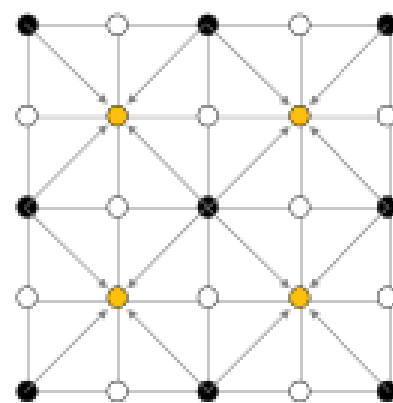
Initialize corner values



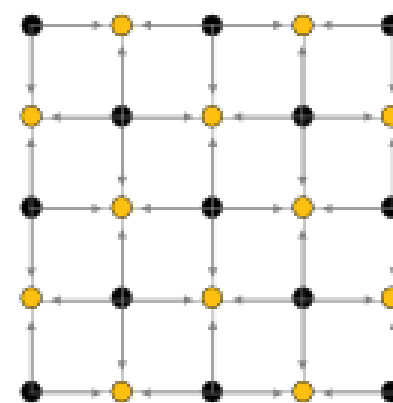
Perform diamond step



Perform square step



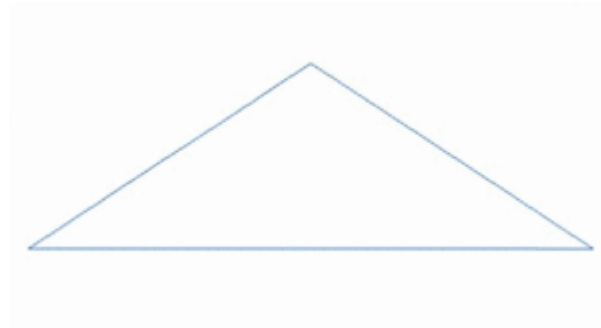
Perform diamond step



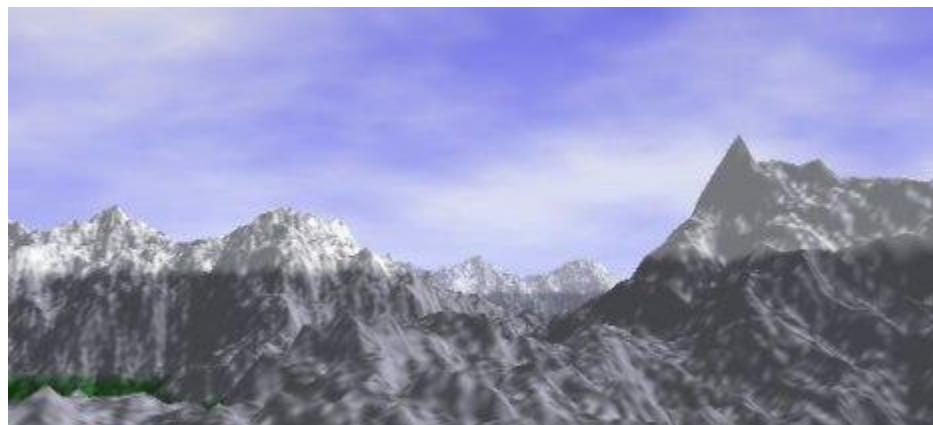
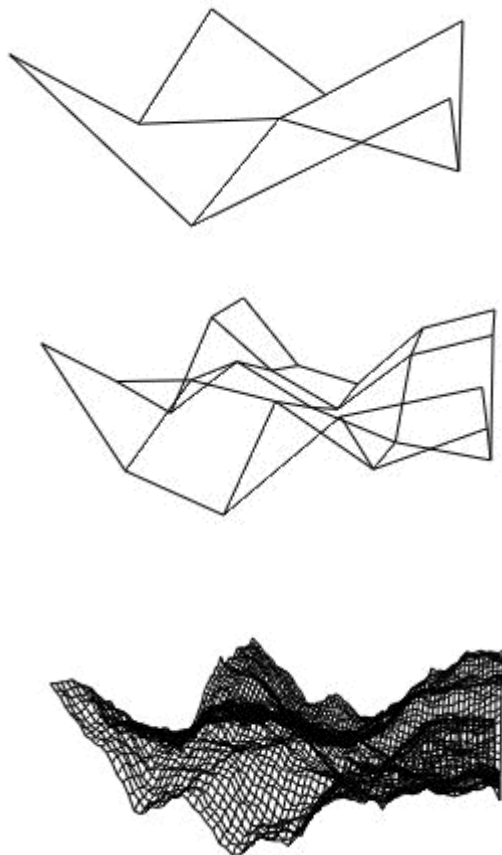
Perform square step



# Модификация алгоритма

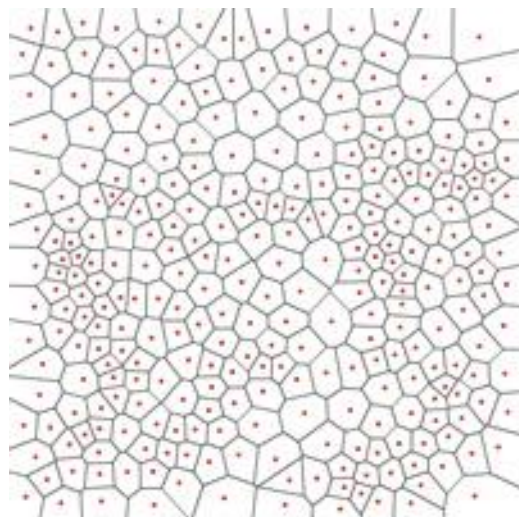


# Алгоритм diamond-square (3D)



Terragen

# Ландшафт на базе диаграммы Вороного

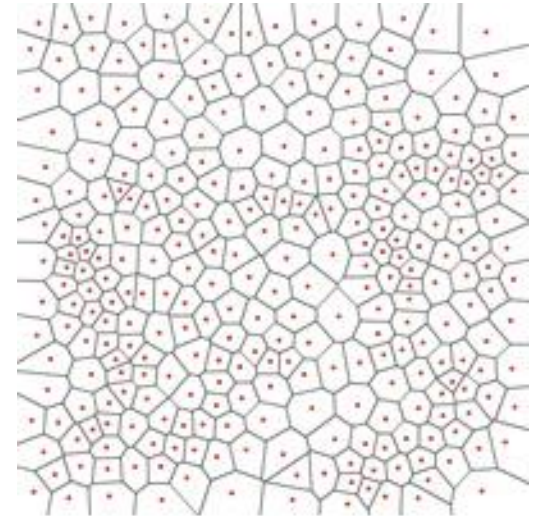


Главное свойство сетки— это её нерегулярность.

Ландшафт не выглядит слишком «квадратным».

# Ландшафт на базе диаграммы Вороного

- Случайное бросание точек на карту.
- Затем по этим точкам строится диаграмма Вороного и/или триангуляция Делоне.
- На ней выполняется несколько итераций релаксации Ллойда, чтобы избавиться от слишком мелких полигонов.



# Диаграмма Вороного



*Георгій Феодосійович Вороний; [1868](#) — [1908](#)*

Названа в честь российского учёного Георгия Феодосьевича Вороного.

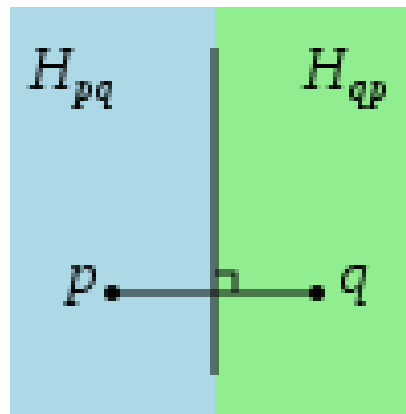
Также известна как:

мозаика Вороного, разбиение Вороного, разбиение Дирихле



# Диаграмма Вороного

- Диаграмма Вороного конечного множества точек  $S$  на плоскости представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества  $S$ , чем к любому другому элементу множества



# Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне

