Лабораторная работа №1

П. С. Углич

кафедра теории упругости

22 сентября 2023 г.

Оглавление

Механические системы с одной степенью свободы описываются автономными системами дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \qquad (1)$$

Плоскость переменных x, y называется фазовой. Точка (x, y) называетя изображающей, кривая, которая описывает изображающая точка с течением времени, называется фазовой кривой. Полная совокупность различных фазовых траекторий называется фазовым портретом.
Особыми точками называются точки, в которых

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

Предположим, что x_0, y_0 — особая точка системы (1).

Произведём линеаризацию системы в окрестности особой точки

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta + \ldots, \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta + \ldots \end{cases} \qquad (2)$$

В системе (2) введены следующие обозначения:

$$\xi = x - x_0,\ \eta = y - y_0,$$

$$a_{11} = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},\ a_{12} = \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},$$
$$a_{21} = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, y=y_0},\ a_{22} = \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{x=x_0,\, y=y_0}.$$

Характер особых точек определяется характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

- если корни уравнения (3) — вещественные одного знака, то точка называется узлом, если корни положительные — неустойчивым узлом, если корни отрицательные — устойчивым;
- если корни уравнения (3) — вещественные разных знаков, точка называется седловой;
- если корни уравнения (3) — комплексно сопряженные вида $\alpha \pm i\beta$, точка называется устойчивым фокусом, если $\alpha < 0$ и неустойчивым, если $\alpha > 0$;
- если корни уравнения (3) — чисто мнимые вида $\pm i\beta$, точка называется центром;

При анализе свободных колебаний интерес представляют особые точки типа центра.

Рассмотрим уравнения колебаний математического маятника (материальная точка на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, $\omega = \sqrt{g/l}$, g — ускорение свободного падения, l — длина нити. Вводим обозначения:

$$x = \varphi,\ y = \dot{\varphi}$$

Уравнение приобретает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin\varphi \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) имеет следующие особые точки:

$$y = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(-1)^n\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Если n — чётное, то уравнение (6) имеет два чисто мнимых корня $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ и особая точка является центром. Ей соответствует нижнее положение маятника.
Если n — нечётное, то уравнение (6) имеет два вещественных корня $\lambda_{1,2} = \pm\omega$ и особая точка является седловой. Ей соответствует верхнее положение маятника.

Содержание задания:

- найти особые точки систем;
- произвести их классификацию;
- построить фазовые портреты в окрестностях особых точек;

1. (Загребаева) $(l - a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$
2. (Максимов) $\frac{4}{3}a^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}\omega^2 a^2 \sin\theta\cos\theta - ga\sin\theta = 0$
3. (Недилько) $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$
4. (Петров) $\ddot{x} + x = -\varepsilon\dot{x}x^2$
5. (Соцкий) $\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}^2 x$
6. (Старков) $\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\dot{x}\left(\omega^2 x^2 - \dot{x}^2\right)$

Литература I

- В. В. Степанов.
  Курс дифференциальных уравенений.
  М.:Наука, 1950.
- И. М. Бабаков.
  Теория колебаний.
  М.:Наука, 1968.
- Я. Г. Пановко.
  Введение в теорию механических колебаний.
  М.:Наука, 1971.
- В. Л. Бидерман.
  Прикладная теория механических колебаний.
  Высшая школа, 1972.