

# Алгоритмы на графах

## Лекция 1.

### Основные понятия теории графов. Представления графов.

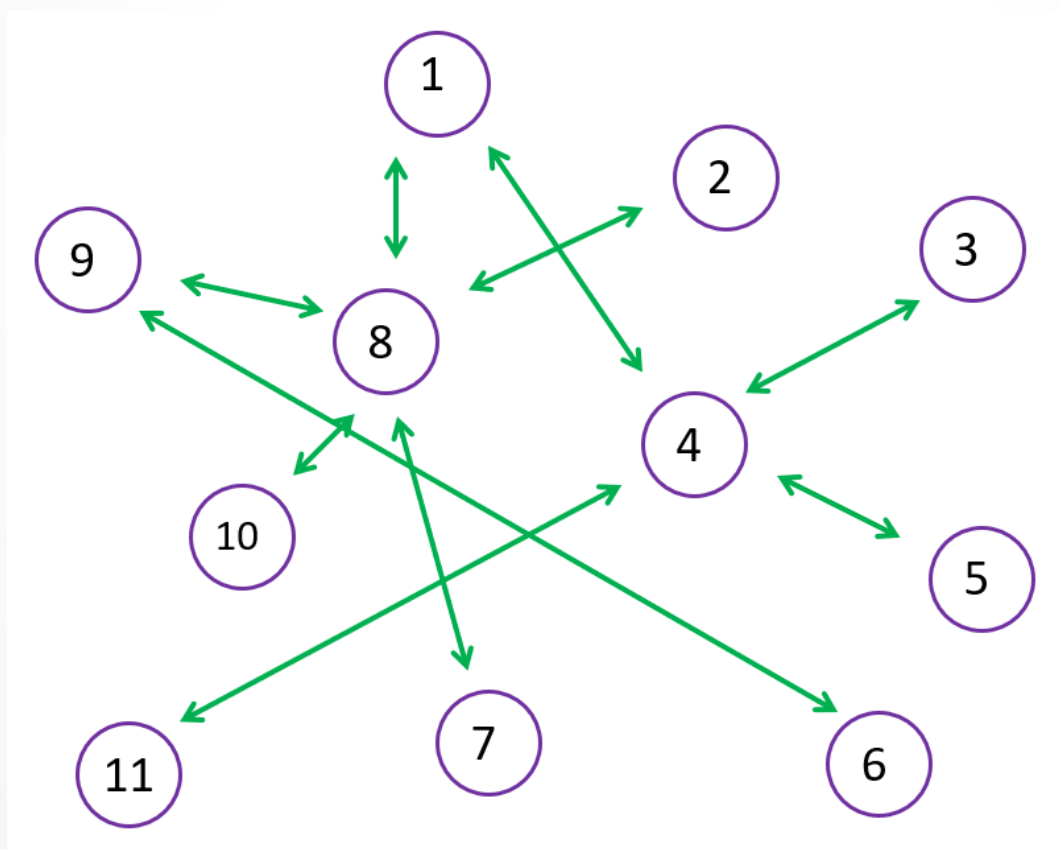
Адигеев Михаил Георгиевич

2022

# Основные понятия

# Графы

**Граф** – это абстрактная структура, представляющая *объекты* и *отношения* между ними.



# Графы

Граф  $G=(V,E)$

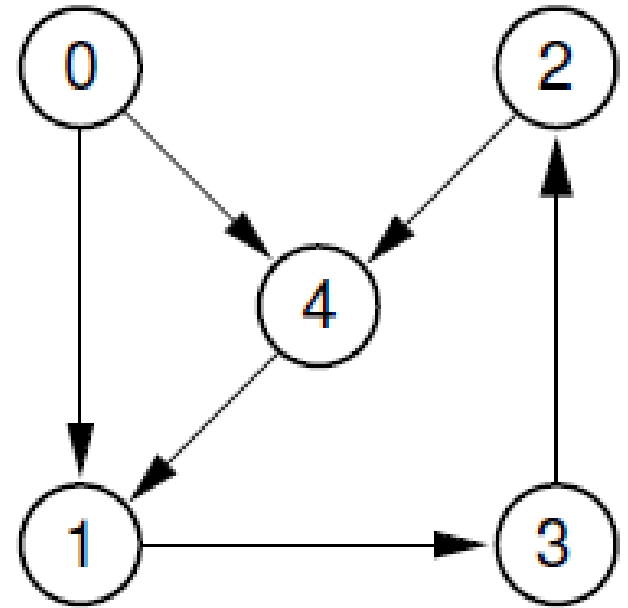
$V$  – множество **вершин** (узлов).  $|V|=n$ .

$E$  – множество **рёбер** (дуг).  $|E|=m$

Графы бывают *ориентированные* или *неориентированные*.

# Графы

Ориентированный граф:

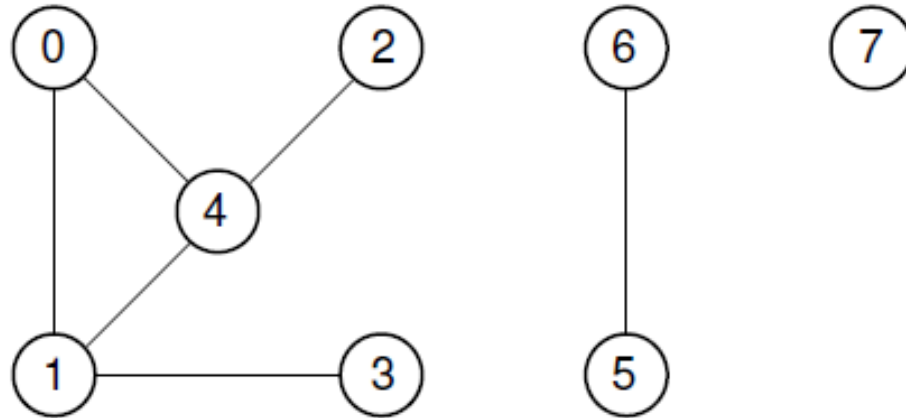


Ориентированные рёбра будем также называть *дугами*.

Дуга(ориентированное ребро) – это *упорядоченная* пара вершин:  $e'=(u,v)$  и  $e''=(v,u)$  – разные дуги.

# Графы

Неориентированный граф:



(Неориентированное) ребро – это *неупорядоченная* пара вершин:  $e'=(u,v)$  и  $e''=(v,u)$  – одно и то же ребро.

Или два разных ребра...

# Графы

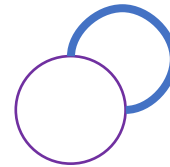
На графах могут быть *кратные* рёбра/дуги (граф тогда называется *мультиграфом*).



Для мультиграфов нужно изменить определение графа  $G=(V,E)$ . Теперь  $E$  – мультимножество, т.е. может содержать некоторые элементы более одного раза.

# Графы

Также для некоторых задач на графах допускается наличие *петель*.

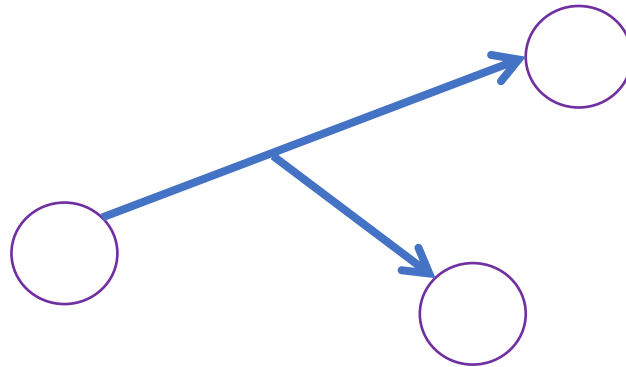


Для неориентированных петель также необходимо модифицировать определение: ребро - это неупорядоченная пара вершин, причём вершины могут совпадать.



# Графы

Для очень специфических задач могут быть и более необычные ситуации (квазиграфы), но мы их не рассматриваем.



# Локальные характеристики

Рассмотрим дугу (ориентированное ребро)  $e=(u,v)$ .



Вершина  $u$  – **начало** дуги  $e$ .

Вершина  $v$  – **конец** дуги  $e$ .

Вершины  $u$  и  $v$  **инцидентны** дуге  $e$ .

Дуга  $e$  также инцидентна каждой из вершин  $u$  и  $v$ .

Вершины  $u$  и  $v$  **смежны**. Это соседние вершины.

Также вершину  $u$  называют **родителем**  $v$ , а  $v$  – **дочерней** вершиной для  $u$ .

# Локальные характеристики

В неориентированном случае всё очень похоже.  
Для ребра  $e=(u,v)$ .



Вершины  $u$  и  $v$  – **концы** ребра  $e$ .

Вершины  $u$  и  $v$  **инцидентны** дуге  $e$ .

Дуга  $e$  также инцидентна каждой из вершин  $u$  и  $v$ .

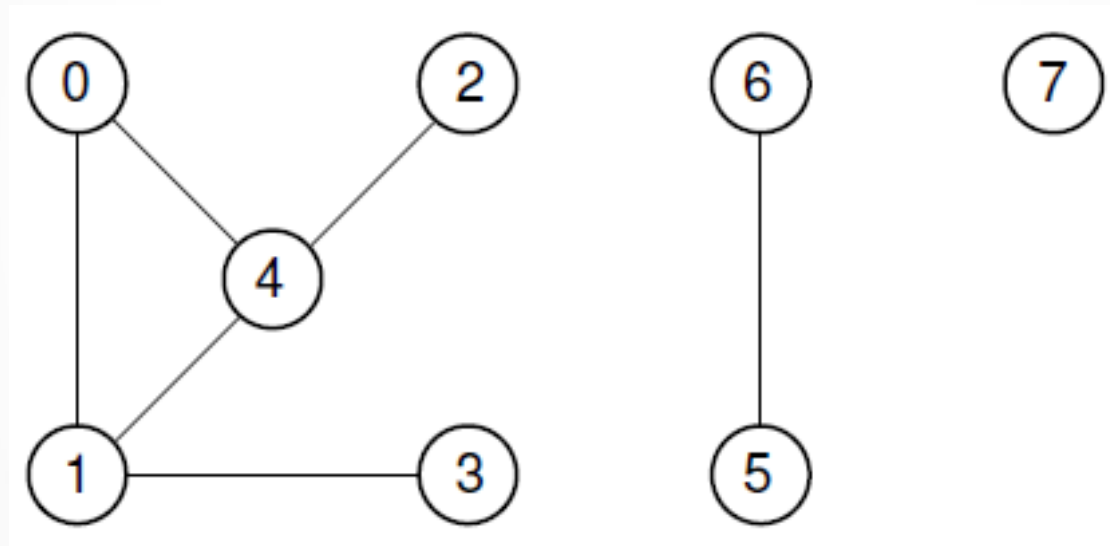
Вершины  $u$  и  $v$  **смежны**. Это соседние вершины.

~~Также вершину  $u$  называют **родителем**  $v$ , а  $v$  – **дочерней** вершиной для  $u$ .~~

# Степени вершин

Для неориентированного графа  $G(V, E)$  и вершины  $v \in V$ .

**Степень** вершины  $v$ :  $\deg(v)$  – это количество рёбер графа, инцидентных данной вершине.



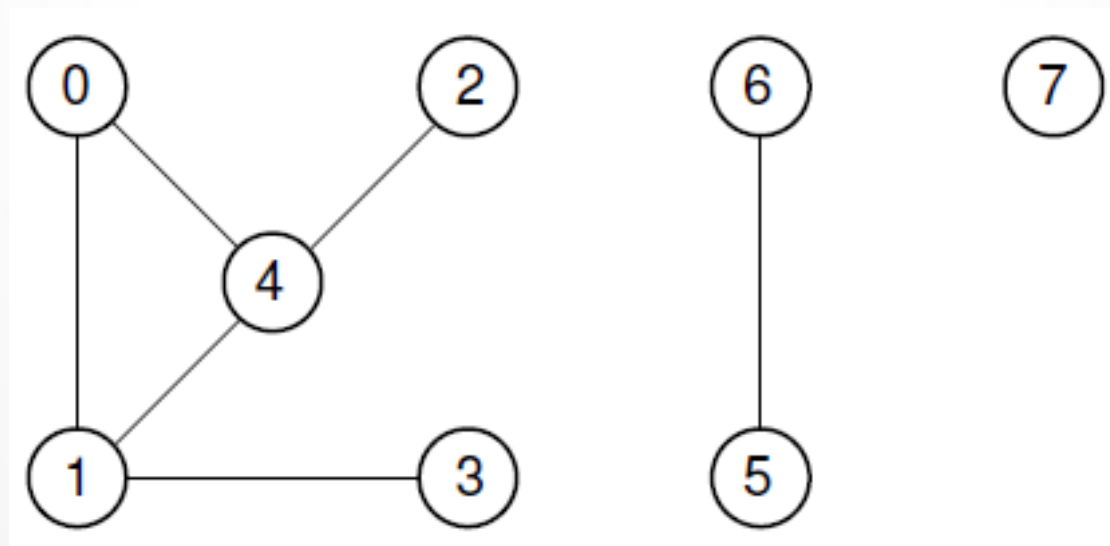
Вершина  $v \in V$  называется **изолированной**, если  $\deg(v) = 0$ , и она называется **висячей**, если  $\deg(v) = 1$ .

# Степени вершин

**Теорема** (о рукопожатиях).

В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$



# Степени вершин

Для ориентированного графа  $G(V, E)$  и вершины  $v \in V$ .

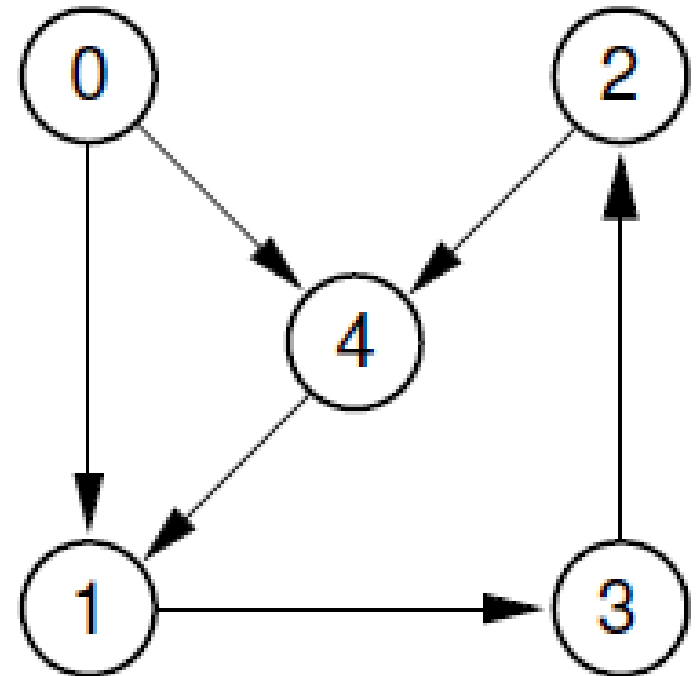
**Степень** вершины  $v$ :  $\deg(v)$  – это количество рёбер/дуг графа, инцидентных данной вершине.

**Полустепень захода** вершины  $v$ :  $\text{indeg}(v)$  – это количество дуг графа, заходящих в данную вершину.

**Полустепень исхода** вершины  $v$ :  $\text{outdeg}(v)$  – это количество дуг графа, исходящих из данной вершины.

Очевидно:

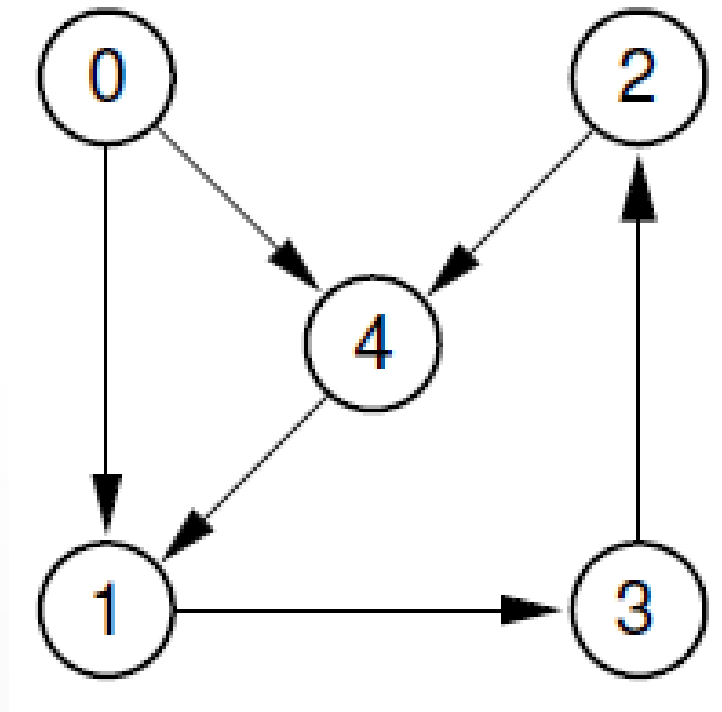
$$\deg(v) = \text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v)$$



# Степени вершин

**Источником** называется вершина  $v$ :  $\text{outdeg}(v) = 0$ .

**Сток** – вершина, для которой  $\text{indeg}(v) = 0$



# Представления графов



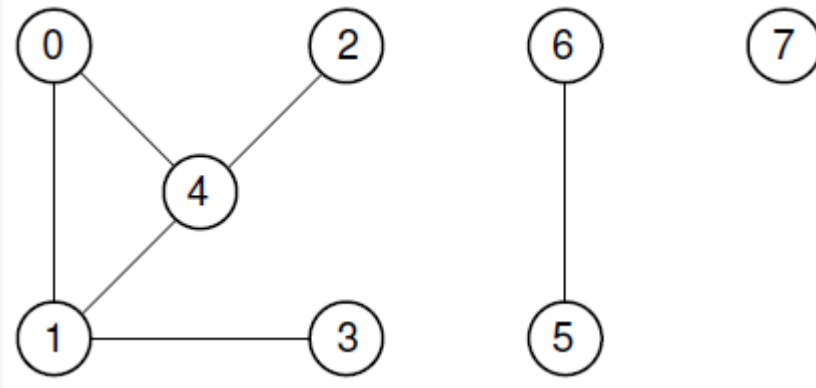
# Список дуг

Граф  $G(V,E)$  можно представить в виде двух списков:

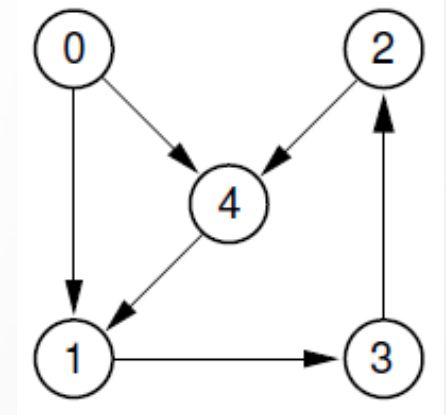
$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_1 = (u_1, v_1), \dots, e_m = (u_m, v_m)\}$$

0 1  
0 4  
1 3  
1 4  
2 4  
5 6



0 1  
0 4  
1 3  
4 1  
2 4  
3 2

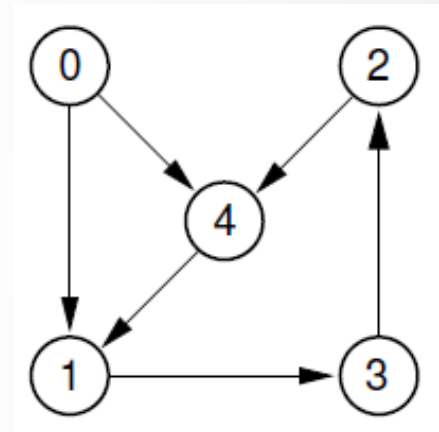


# Список дуг

$$E = \{e_1 = (u_1, v_1), \dots, e_m = (u_m, v_m)\}$$

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(m)$
in-deg(v)	$O(m)$
deg(v)	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(m)$
is_source(v)	$O(m)$
is_sink(v)	$O(m)$

0 1  
0 4  
1 3  
4 1  
2 4  
3 1

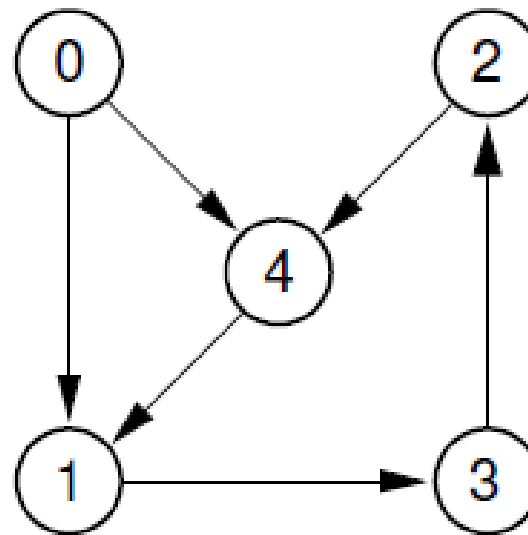


# Матрица смежности

Ориентированный граф  $G(V,E)$  можно представить в виде матрицы:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n: a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

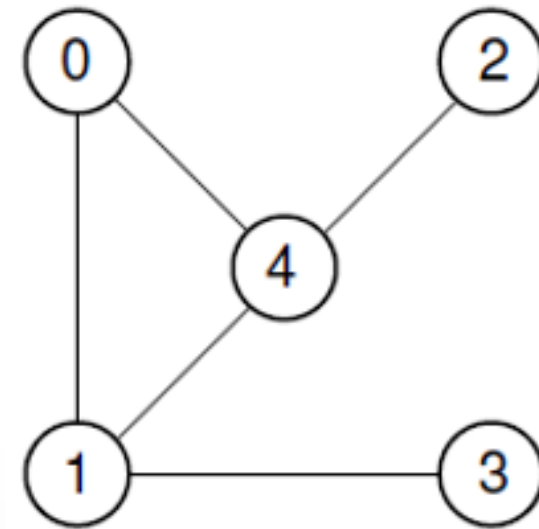


# Матрица смежности

Неориентированный граф  $G(V,E)$  также можно представить в виде матрицы:

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n; a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
2	0	0	0	0	1
3	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0



# Матрица смежности

Матрица  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  содержит  $O(n^2)$

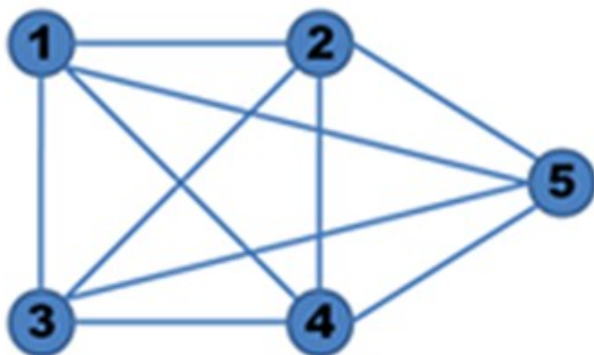
элементов. Эффективно ли такое представление (по памяти)?

- Эффективно для плотных графов ( $m \sim O(n^2)$ ).
- Неэффективно для разряженных графов ( $m \sim O(n)$ ).

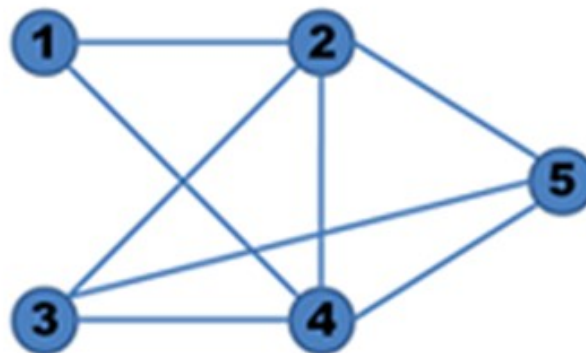
# Матрица смежности

**Полным** графом называется граф, в котором все вершины попарно смежны.

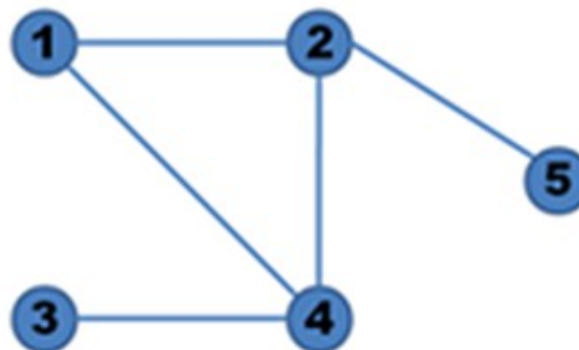
Полный граф



Плотный граф

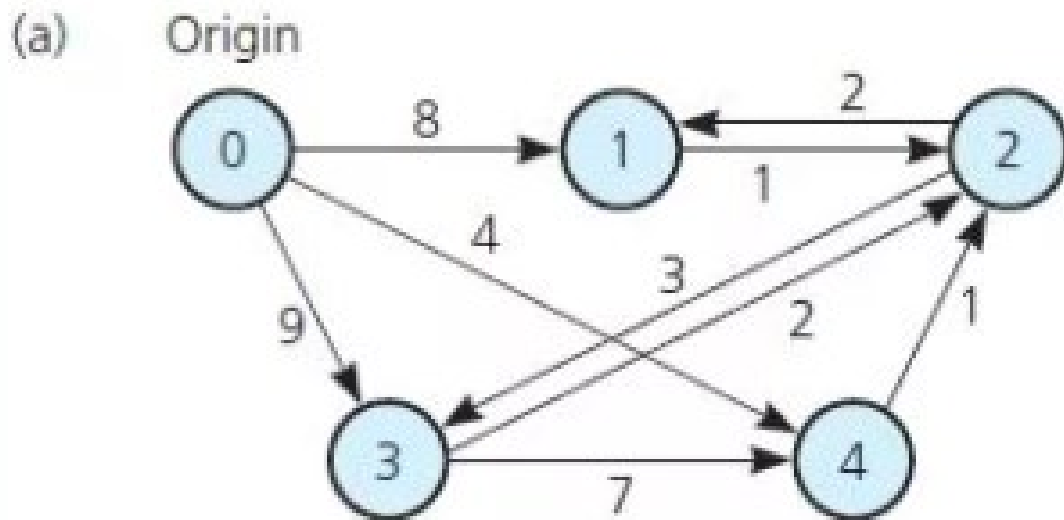


Разряженный граф



# Матрица смежности

Матрица смежности может нести дополнительную информацию – например, представлять матрицу расстояний:



(b)

	0	1	2	3	4
0	∞	8	∞	9	4
1	∞	∞	1	∞	∞
2	∞	2	∞	3	∞
3	∞	∞	2	∞	7
4	∞	∞	1	∞	∞

# Матрица смежности

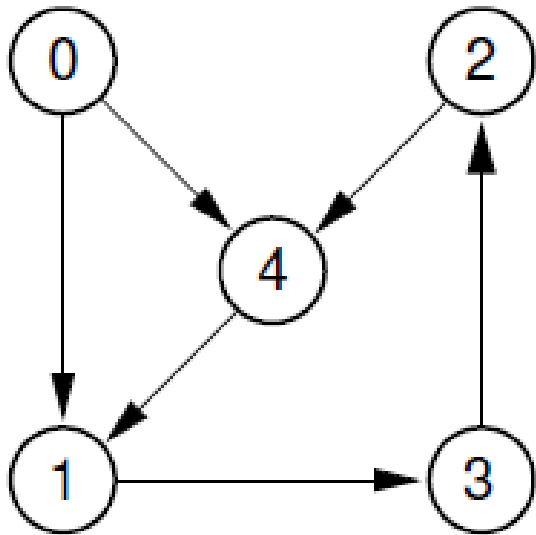
Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(n)$
in-deg(v)	$O(n)$
deg(v)	$O(n)$
has_edge(v,w)	$O(1)$
is_source(v)	$O(n)$
is_sink(v)	$O(n)$

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

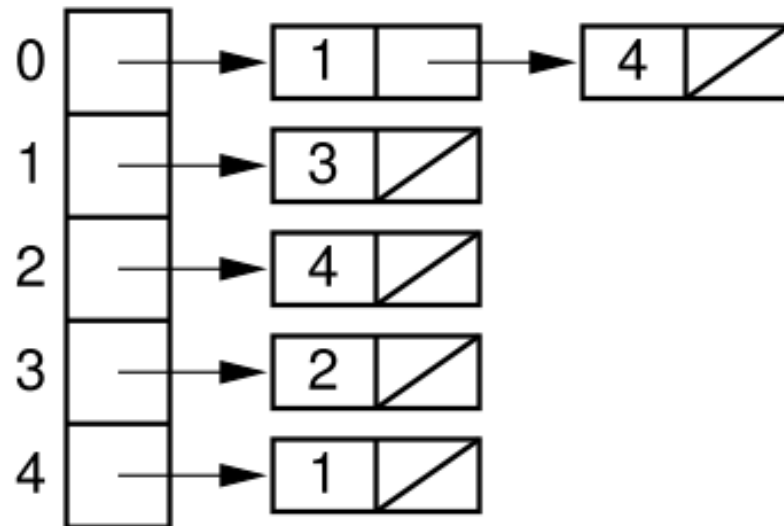


# Список смежности



	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

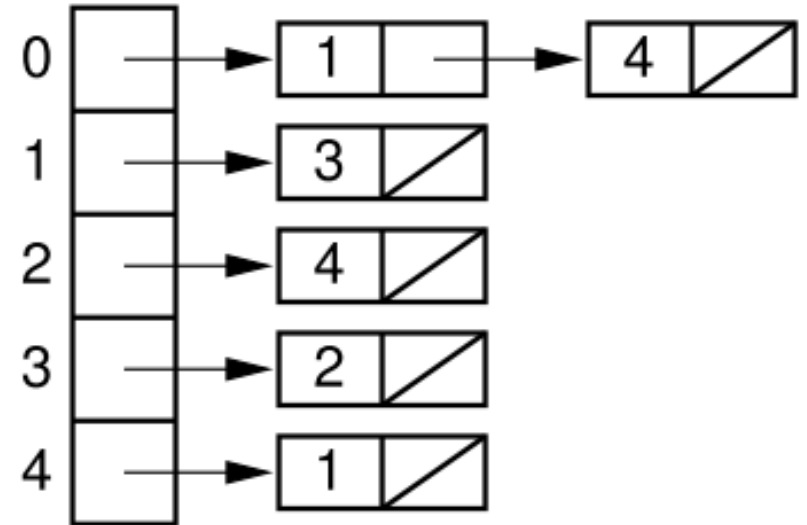
Ёмкостная сложность:  $O(n + m)$



# Список смежности

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Временная сложность
out-deg(v)	$O(\max deg) = O(n)$
in-deg(v)	$O(n + m) = O(m)$
deg(v)	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(\max deg) = O(n)$
is_source(v)	$O(m)$
is_sink(v)	$O(1)$



Ёмкостная сложность:  $O(n + m)$

# Сравнение представлений

Сложность выполнения базовых операций:

Характеристика	Список дуг	Матрица смежности	Список смежности
out-deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(\max deg) = O(n)$
in-deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(n + m) = O(m)$
deg(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(m)$
has_edge(v,w)	$O(m)$	$O(1)$	$O(\max deg) = O(n)$
is_source(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(m)$
is_sink(v)	$O(m)$	$O(n)$	$O(1)$
memory	$O(m)$	$O(n^2)$	$O(n + m)$