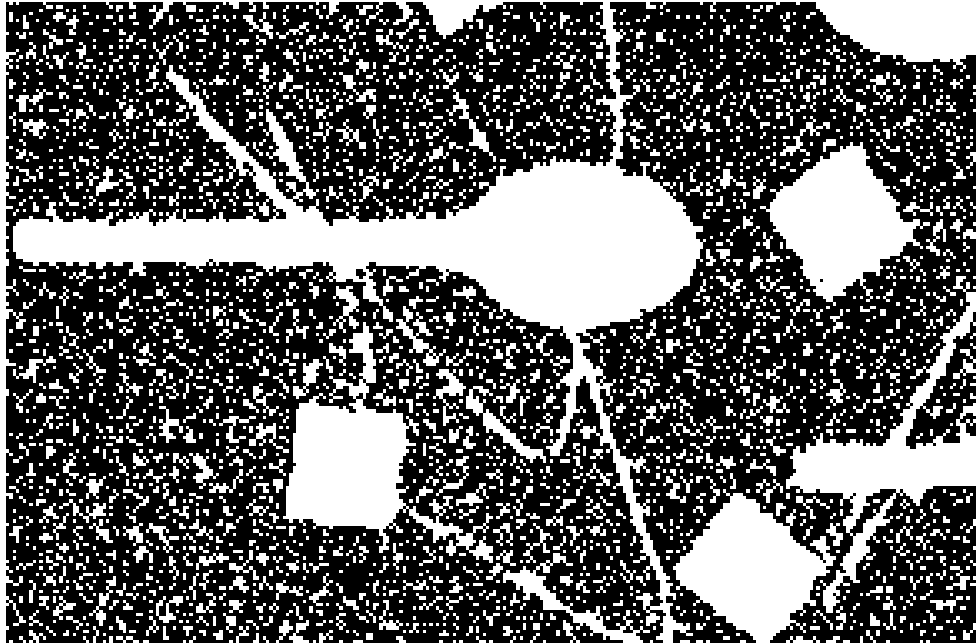


# Морфология

## Лекция 4

# Плохие входные данные



Пример бинарного изображению с сильным шумом

# Шум или объект?

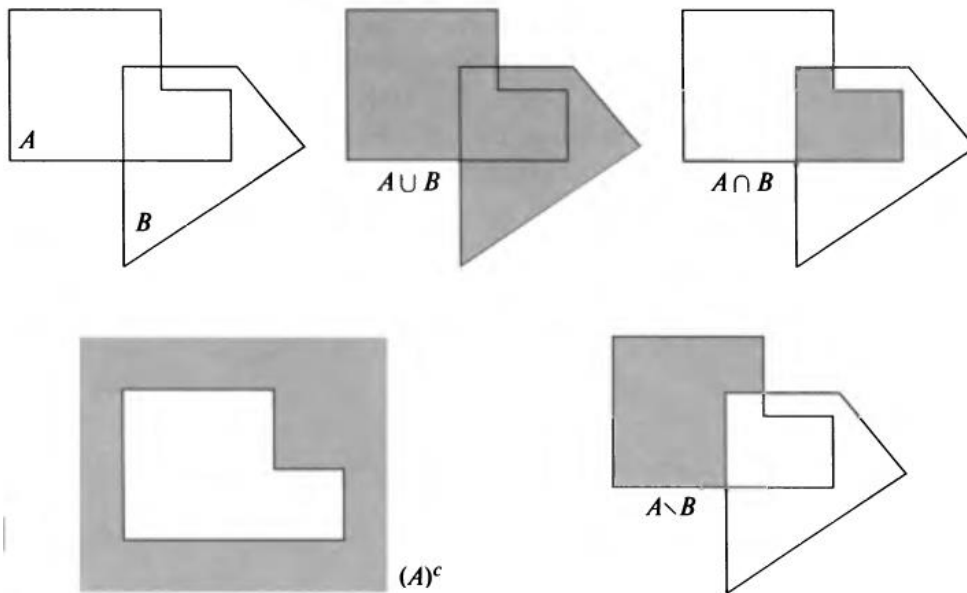


По одному пикселю невозможно определить – шум или объект?  
Нужно рассматривать окрестность пикселя!

# Подавление и устранение шума

Один из способов устранения шума — с помощью операций математической морфологии

# На чем основана морфология?



- Два множества A и B
- Объединение множеств A и B
- Пересечение множеств A и B
- Дополнение множеств A и B
- Разность множеств A и B

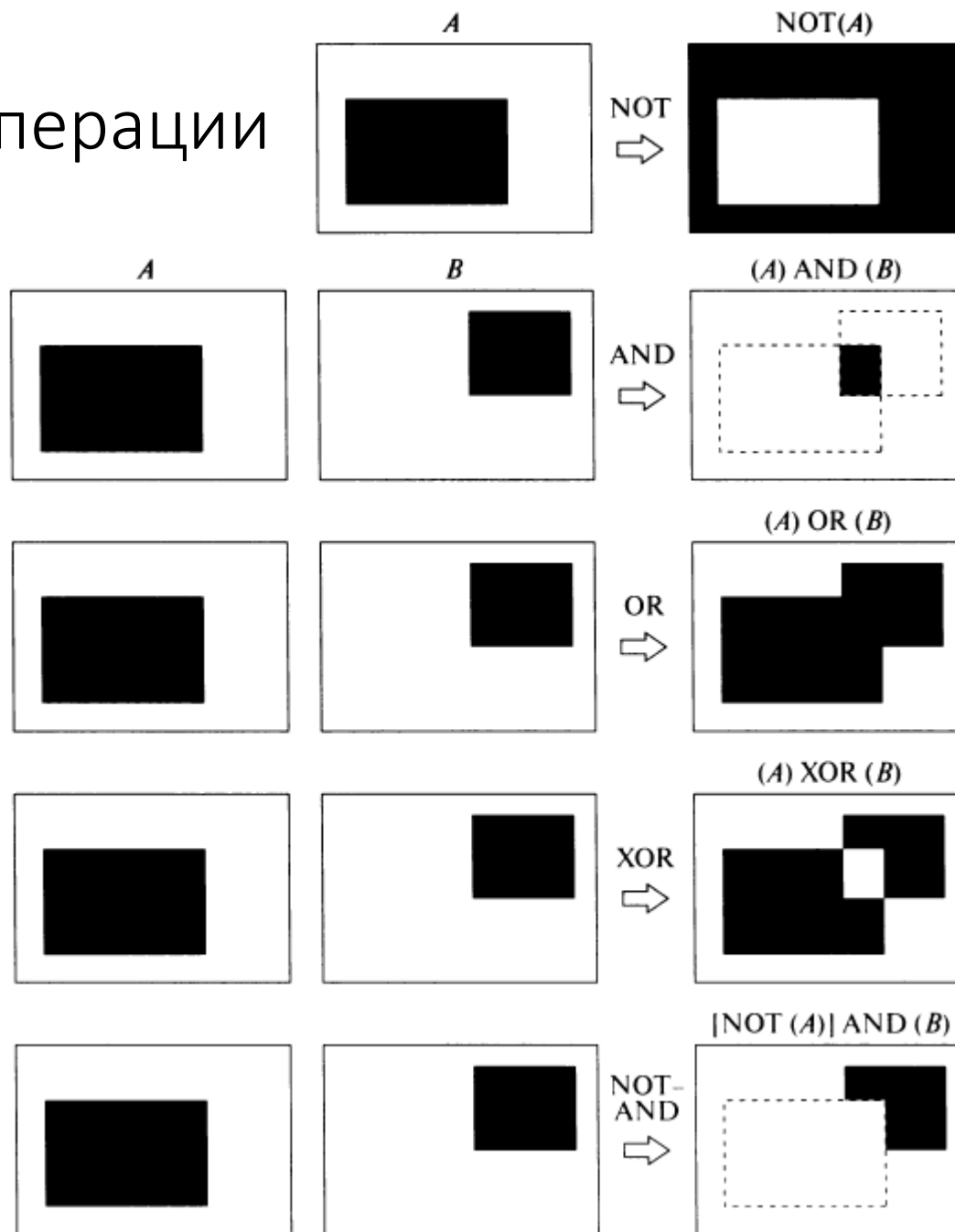
Центральное отражение

$$\hat{B} = \{w \mid w = -b, b \in B\}$$

Параллельный перенос

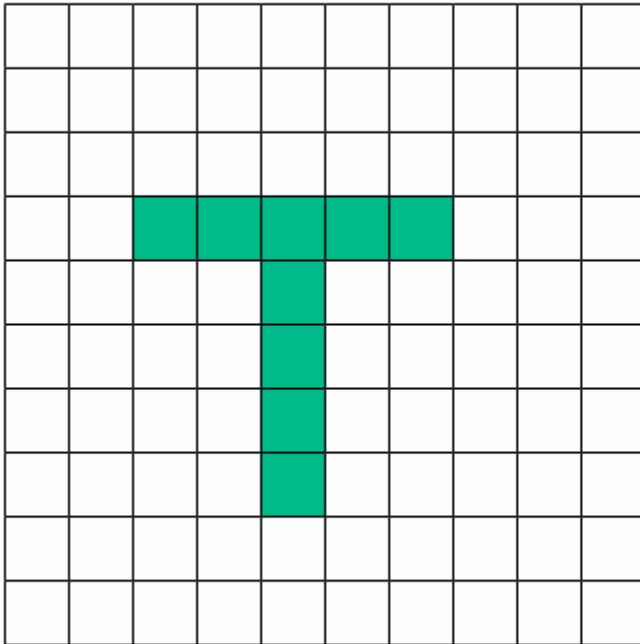
$$(A)_z = \{c \mid c = a + z, a \in A\}$$

# И логические операции



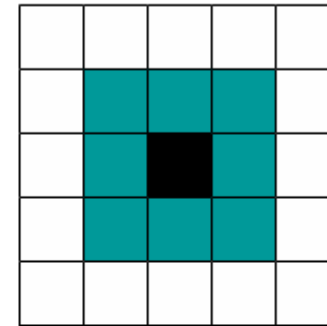
# Основные действующие лица

**A**



Объект обработки

**B**



Структурный элемент – инструмент

# Примеры структурирующих элементов

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

a) BOX(3,5)

	1	1	1	
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
	1	1	1	

b) DISK(5)

	1	1	1	
1				1
1				1
1				1
	1	1	1	

c) RING(5)

1	1		
1	1		
1	1	1	1
1	1	1	1

d)

1	1	1	1	1	1
1		1	1		1
1		1	1		1
1		1	1		1

e)

1
1
1
1

f)

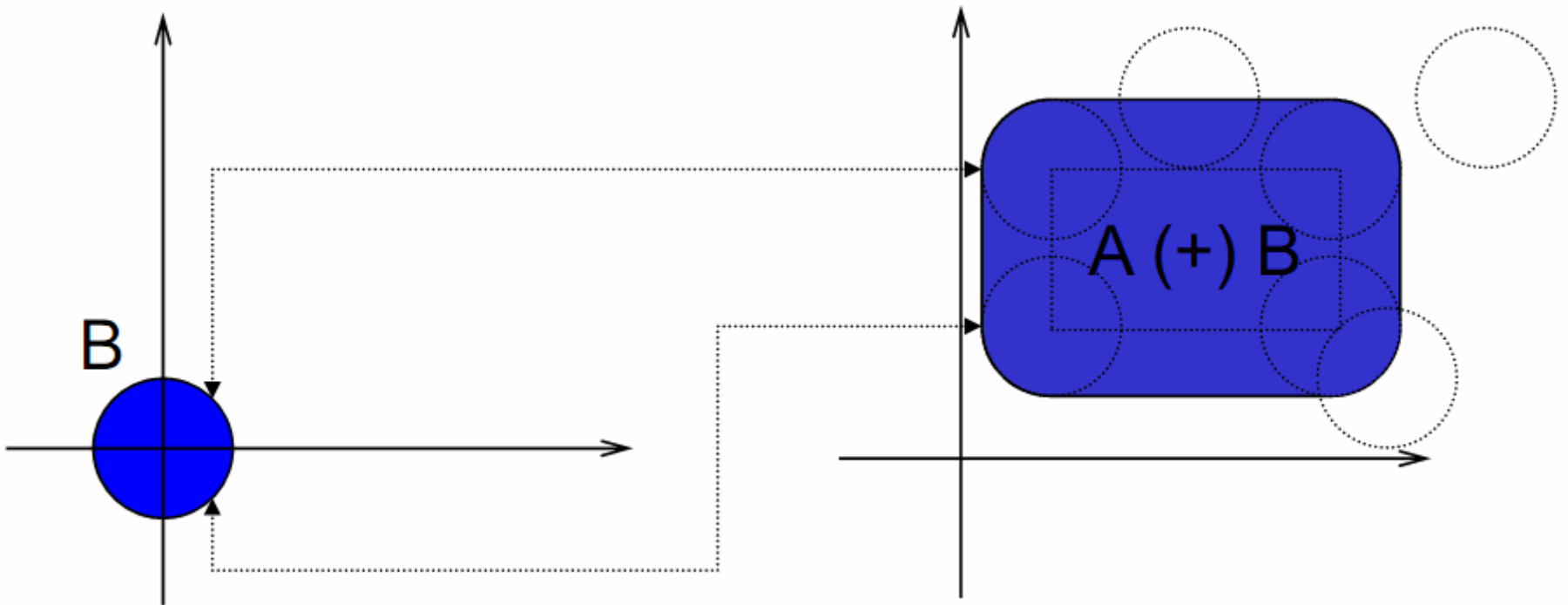


# Базовые операции морфологии

- Расширение или наращивание (Dilation)
- Сужение или эрозия (Erosion)
- Замыкание (closing)
- Размыкание (opening)

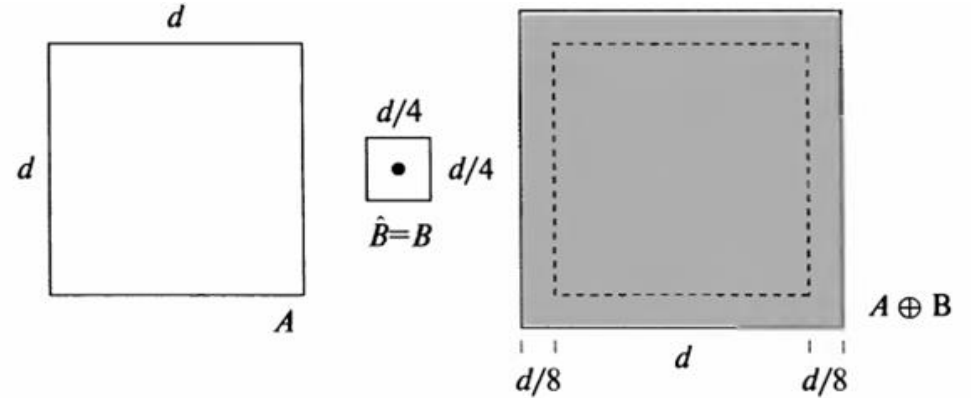
# Дилатация и эрозия

# Расширение или наращивание (Dilation): геометрическая интерпретация

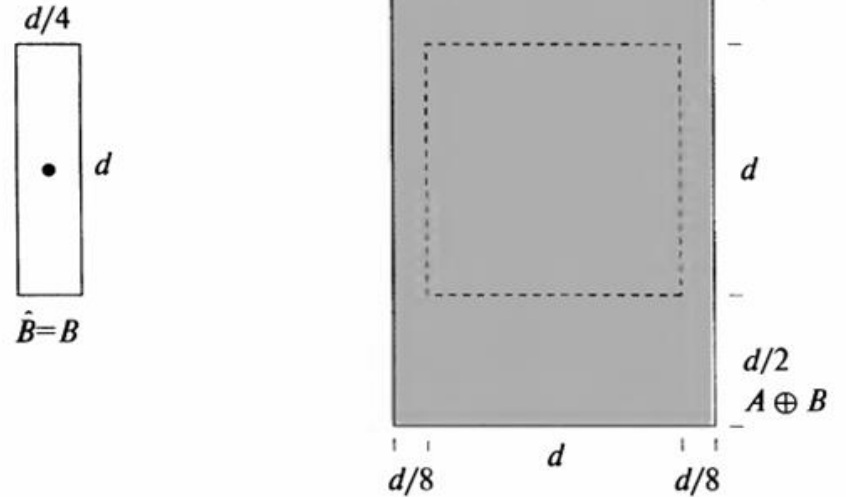


# Дилатация множества A по множеству B

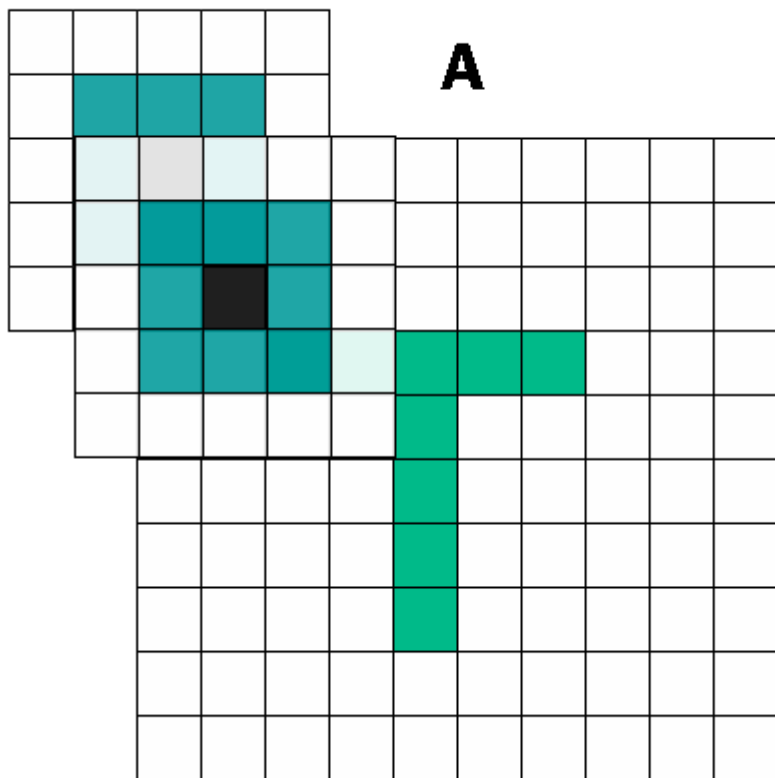
$$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$



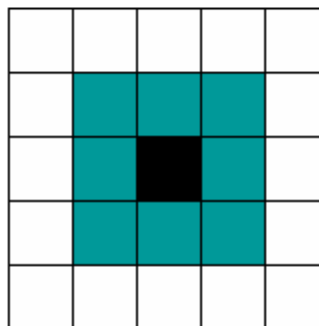
$$A \oplus B = \bigcup_{a \in A} B_a$$



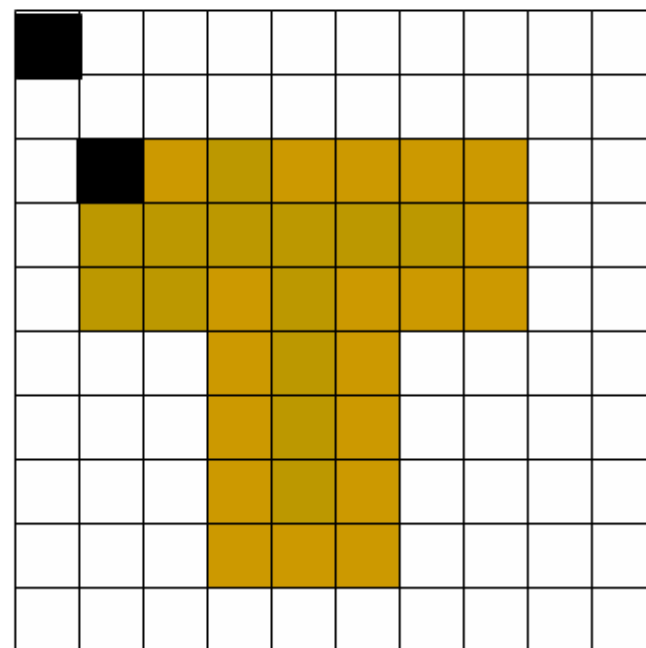
# Аналог логического или



**B**



**A(+ )B**



# Пример

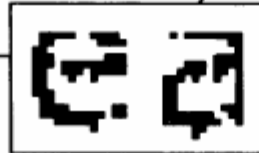
	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1				

1	1	1
1	1	1
1	1	1

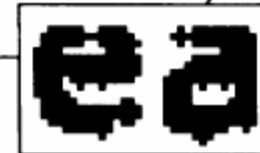
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1			

# Дилатация для текста

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



**Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.**



Мах длина разрыва = 2 пиксела

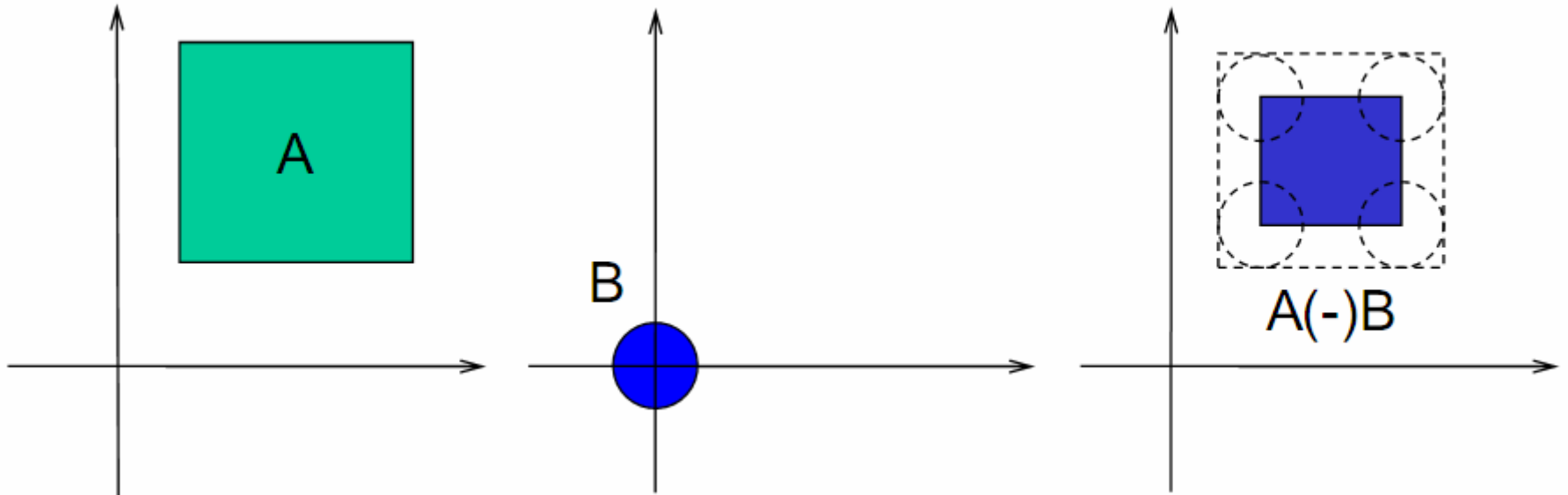
0	1	0
1	1	1
0	1	0

# Алгоритм морфологического расширения

```
void Dilation(BIT*src[], bool*mask[], BIT*dst[]) {  
  //W,H – размеры исходного и результирующего изображений  
  //MW,MH – размеры структурного множества  
  for(y = MH/2; y < H – MH/2;y++)  
    for(x = MW/2; x < W – MW/2;x++) {  
      BIT max=0;  
      for(j = - MH/2; j <= MH/2; j++)  
        for( i= - MW/2; i <= MW/2; i++)  
          if (mask[i][j] && src[x+i][y+j]>max)  
            max=src[x+i][y+j];  
      dst[x][y] = max;  
    }  
}
```

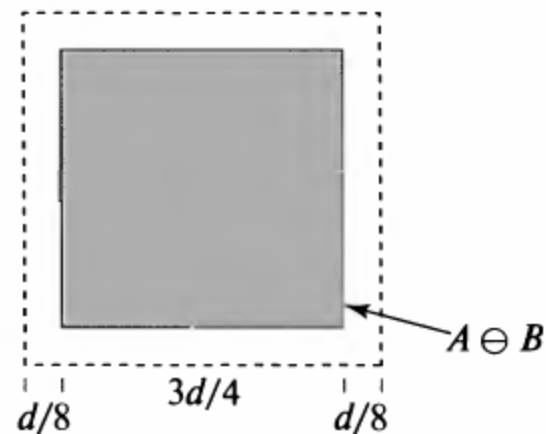
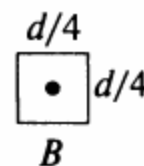
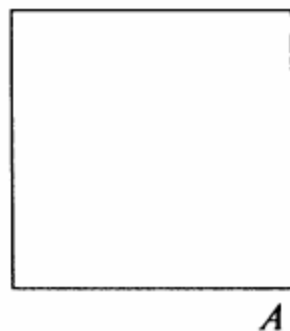


# Сужение или эрозия (Erosion): геометрическая интерпретация



# Эрозия множества A по множеству B

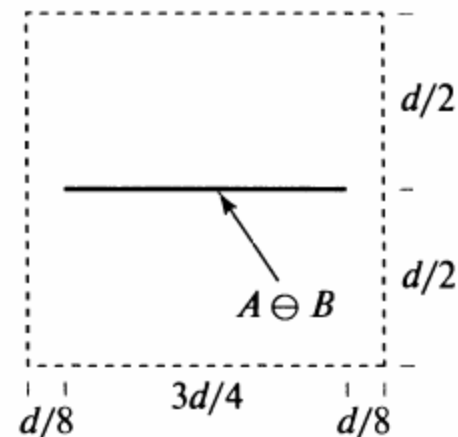
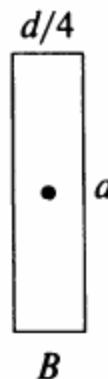
$$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}$$



$$A(-)B = \{a \mid a + b \in A \forall b \in B\}$$

$$A(-)B = (A^C (+) B)^C,$$

где  $A^C$  – дополнение A



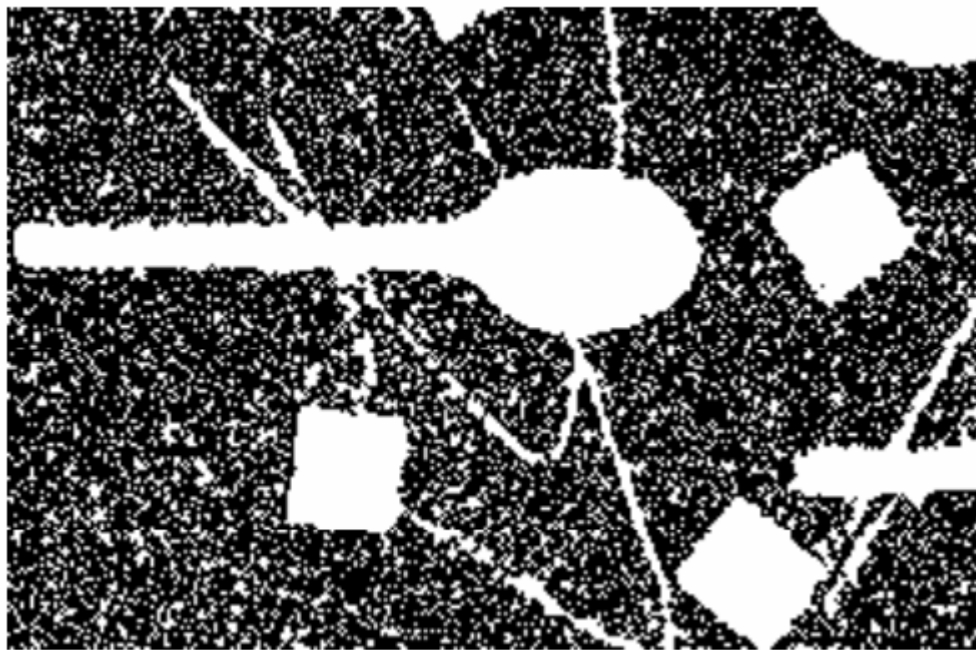
# Пример

	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1				

1	1	1
1	1	1
1	1	1

			1	1			
			1	1			
			1	1			

# Плохие входные данные



# Результат применения эрозии



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & [1] & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & [1] & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & [1] & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Алгоритм морфологического сужения

```
void Erosion(BIT*src[],bool*mask[],BIT*dst[]) {  
  //W,H – размеры исходного и результирующего изображений  
  //MW,MH – размеры структурного множества  
  for(y = MH/2; y < H – MH/2 ; y++)  
    for(x = MW/2; x < W – MW/2; x++) {  
      BIT min = MAXBIT;  
      for(j = - MH/2; j <= MH/2; j++)  
        for( i = - MW/2; i <= MW/2; i++)  
          if (mask[i][j] && src[x+i][y+j]<min)  
            min=src[x+i][y+j];  
      dst[x][y] = min;  
    }  
}
```

# Свойства морфологических операций

## Коммутативный закон

- $A (+) B = B (+) A$
- $A (-) B \neq B (-) A$

## Ассоциативный закон

- $A (+) (B (+) C) = (A (+) B) (+) C$
- $A (-) (B (-) C) = (A (-) B) (-) C$

# Двойственность

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$

Дилатация и эрозия являются двойственными операциями по отношению к теоретико-множественным операциям дополнения и центрального отражения

$$A (-) B = (A^c (+) B)^c,$$

где  $A^c$  – дополнение  $A$



## Формальное доказательство

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}^c$$

$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \emptyset\}^c$$

$$(A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \cap A^c \neq \emptyset\} = A^c \oplus \hat{B}$$

# Результат применения эрозии и дилатации



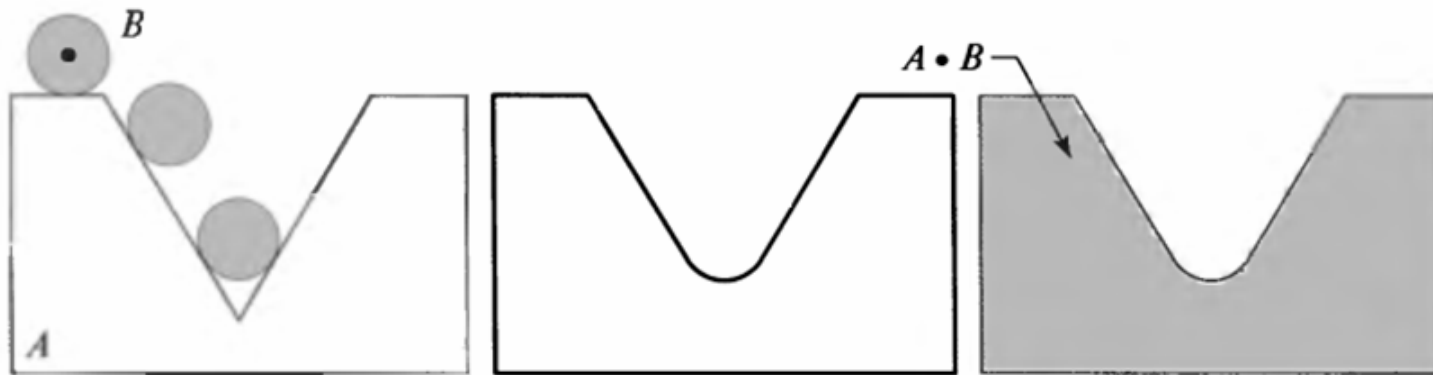
(а) Изображение, содержащее квадраты со сторонами 1, 3, 5, 7, 9 и 15 пикселей. (б) Результат эрозии изображения (а) по квадратному примитиву размерами  $13 \times 13$  пикселей, заполненному единицами. (в) Результат дилатации изображения (б) по тому же примитиву.

# Замыкание и размыкание

# Замыкание, закрытие (closing)

Def:  $A \bullet B = (A \oplus B) - B$

$\text{close}(A, B) = (A (+) B) (-) B$



# Пример замыкания

$$B \bullet S = (B \oplus S) - S$$

	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1				

1	1	1
1	1	1
1	1	1

a) Binary image B

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1			

c) Dilation  $B \oplus S$

	1	1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
		1	1				

e) Closing  $B \bullet S$

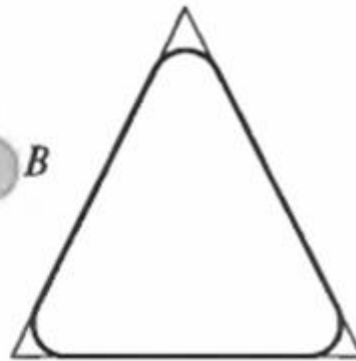
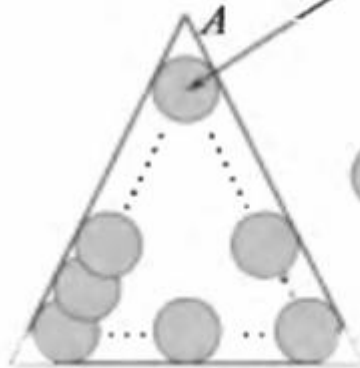
# Свойства замыкания

- а)  $A$  является подмножеством (вложенным изображением)  $A \bullet B$ .
- б) Если  $C$  есть подмножество  $D$ , то  $C \bullet B$  является подмножеством  $D \bullet B$ .
- в)  $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$ .

# Размыкание, раскрытие (opening)

**Def:**  $A \circ B = (A(-)B) \oplus B$

Сдвиги  $B$  внутри  $A$



$A \quad B = \cup \{(B)_z \mid (B)_z \subseteq A\}$



# Пример размыкания

1	1	1
1	1	1
1	1	1

	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	
		1	1				

$$B \circ S = (B - S) \oplus S$$

a) Binary image B

			1	1			
			1	1			
			1	1			

d) Erosion  $B \ominus S$

		1	1	1	1		
		1	1	1	1		
		1	1	1	1		
		1	1	1	1		
		1	1	1	1		

f) Opening  $B \circ S$



# Сужение vs Размыкание



Сужение



Открытие

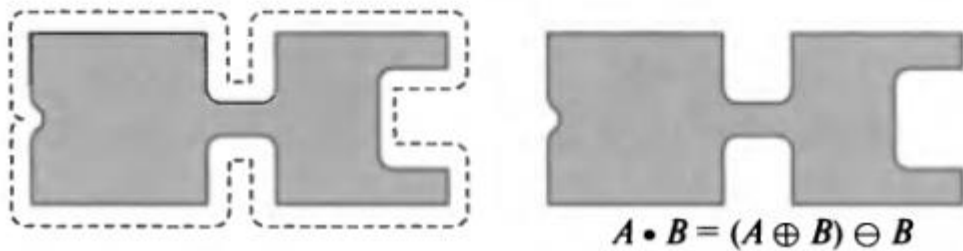
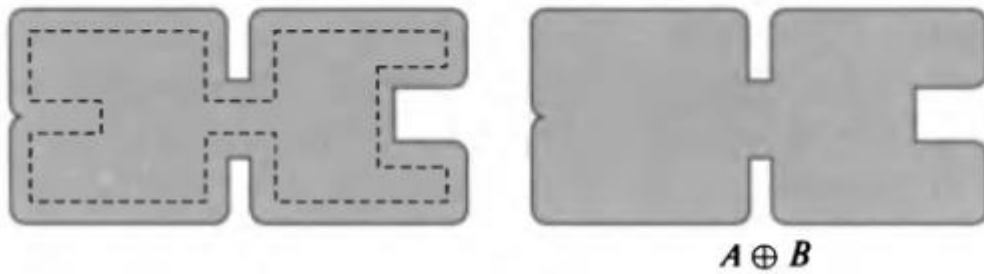
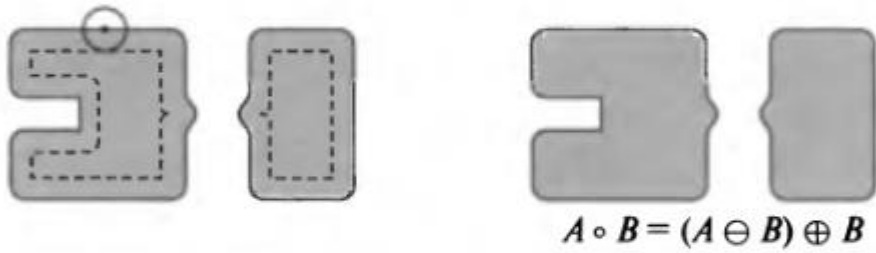
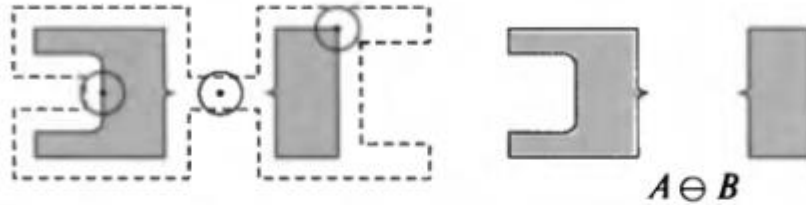
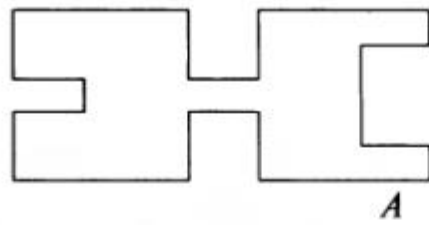
# Свойства размыкания

- а)  $A \circ B$  является подмножеством  $A$  (т.е. вложенным изображением).
- б) Если  $C$  есть подмножество  $D$ , то  $C \circ B$  является подмножеством  $D \circ B$ .
- в)  $(A \circ B) \circ B = A \circ B$ .

# Двойственность

$$(A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$$

# Размыкание и замыкание

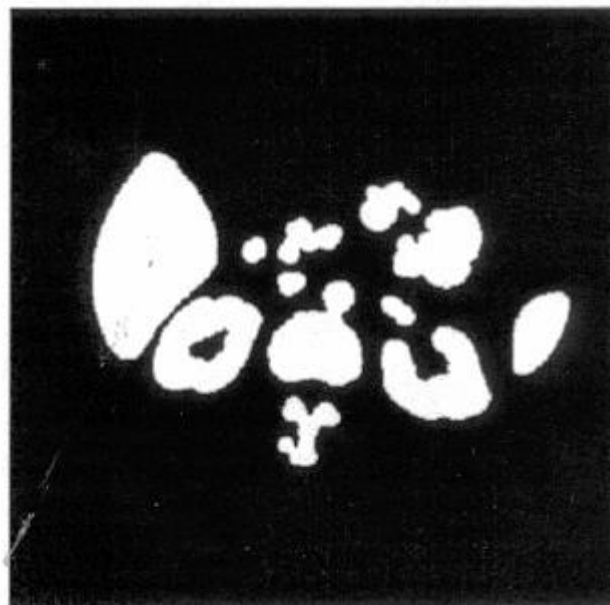
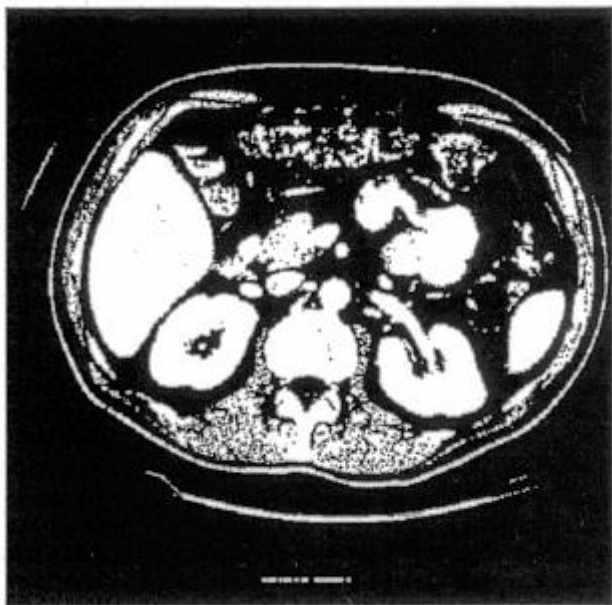


# Морфологическая фильтрация

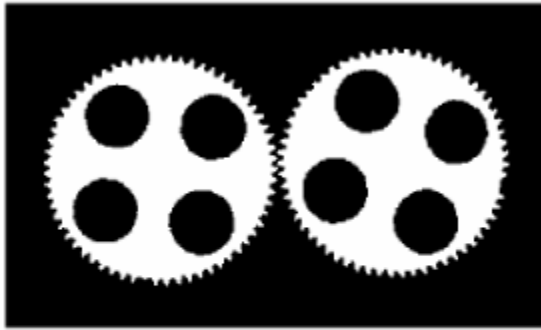


Исходное изображение предоставлено Национальным институтом стандартов и технологии США

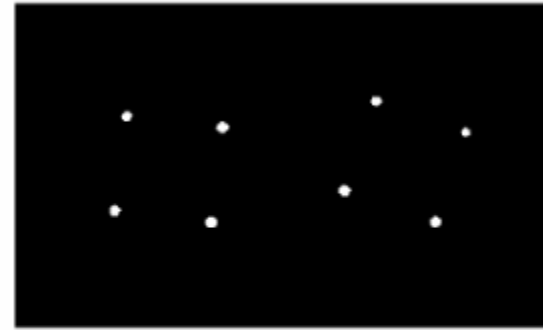
# Морфологическая фильтрация



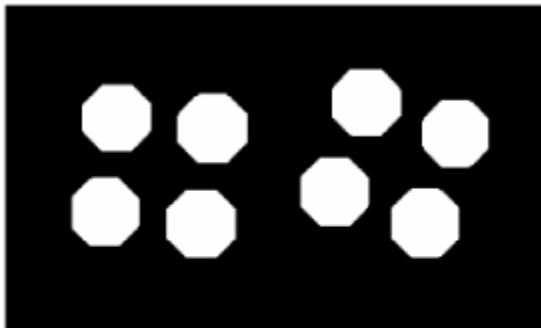
# Контроль шестерёнок



a) original image B



b)  $B1 = B \ominus \text{hole\_ring}$



c)  $B2 = B1 \oplus \text{hole\_mask}$



d)  $B3 = B \text{ OR } B2$

## Контроль шестерёнок 2



e)  $B7$  (see text)



f)  $B8 = B \text{ AND } B7$



g)  $B9 = B8 \oplus \text{tip\_spacing}$



h)  $\text{RESULT} = ((B7 - B9) \oplus \text{defect\_cue}) \text{ OR } B9$



# Выделение областей примитивной формы с помощью бинарной морфологии



Исходное



Размыкание



Углы

# Условное наращивание (conditional dilation)

**Def:**  $C_0 = C \quad C_n = (C_{n-1} \oplus S) \cap B$

$$C \oplus |_B S = C_m$$

где индекс  $m$  – минимальный индекс, при котором

$$C_m = C_{m-1}$$

# Условное наращивание (conditional dilation)

		1							
	1	1	1				1		
								1	
			1						
			1	1				1	
			1	1	1	1		1	
			1					1	
							1	1	

a) Binary image  $B$

						1			
								1	
								1	

d)  $C = B \ominus V$

1
1
1

1	1	1
1	1	1
1	1	1

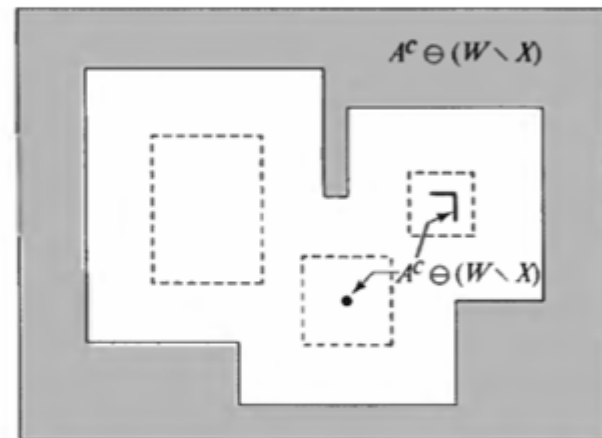
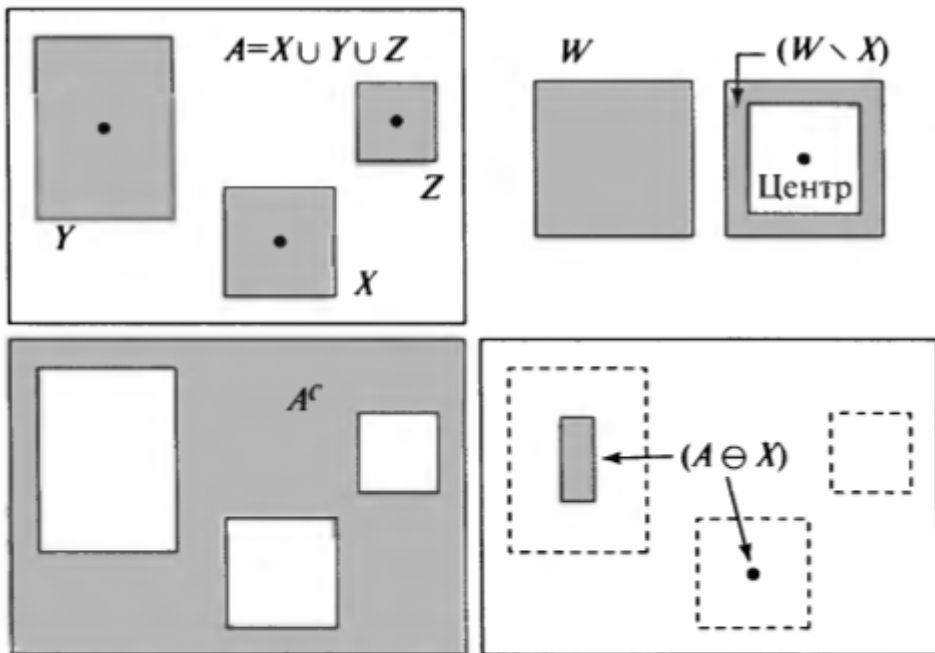
b) Structuring element  $V$

c) Structuring element  $D$

						1			
						1	1		1
					1	1	1	1	1
					1				1
								1	1

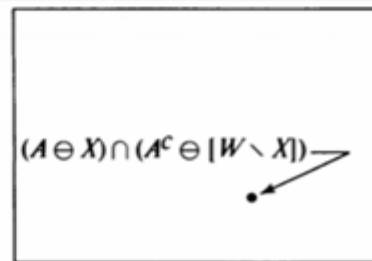
e)  $C \oplus_B D$

# Преобразование попадание пропуск (hit or miss transform)



$$A \otimes B = (A \cap X) \cap [A^c \cap (W \setminus X)]$$

$$A \otimes B = (A \cap B_1) \cap (A^c \cap B_2)$$

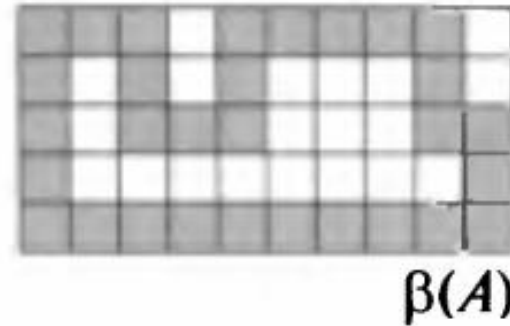
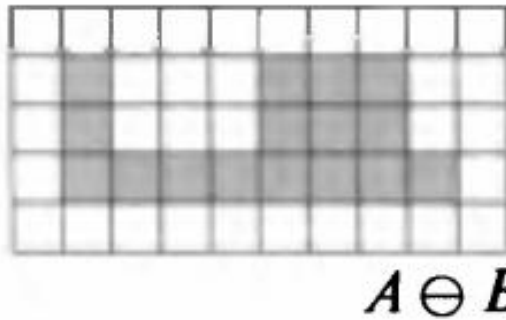
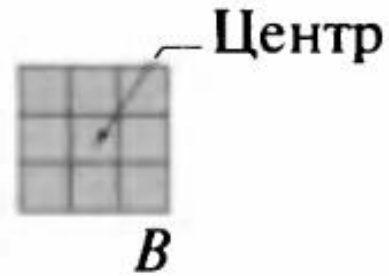
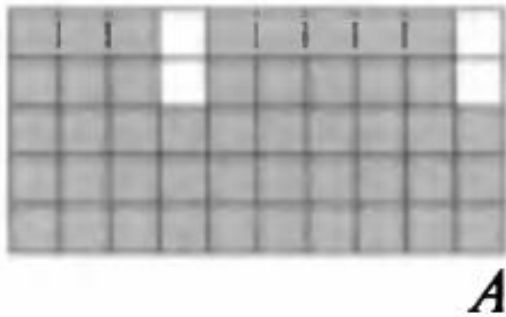


# Основные морфологические алгоритмы

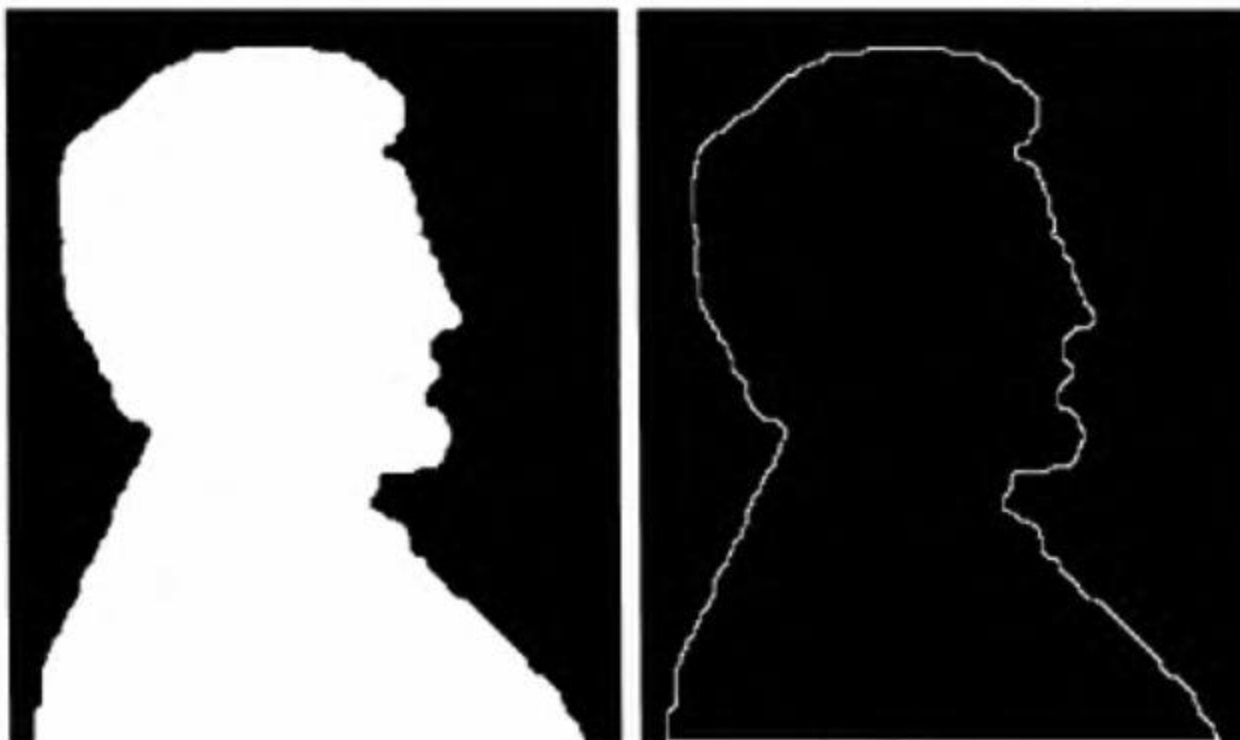
- Выделение границ
- Заполнение дырок
- Выделение связных компонент
- Построение выпуклой оболочки
- Утончение
- Утолщение

# Выделение границ

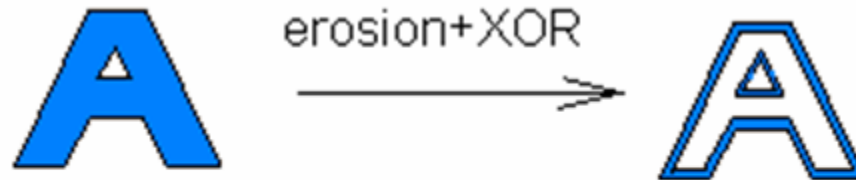
$$\beta(A) = A \setminus (A \ominus B)$$



# Выделение границы



# Выделение границы



$B \setminus (B \ominus S)$  – внутренняя граница

$(B \oplus S) \setminus B$  – внешняя граница