1 Лекция 2. Свободные колебания нелинейных систем.

1.1 Общие понятия

Рассмотрим простейшую нелинейную систему с одной степенью свободы — груз m на нелинейной пружине.

Выберем начало координат в положении равновесия груза. Пружина в этом положении недеформирована. В горизонтальном положении на груз m никакие силы не действуют. Ось Ox направим горизонтально вправо, ось Oy — вертикально вверх.

Дадим грузу m горизонтальное перемещение x в положительном направлении оси Ox, считая, что перемещение груза в горизонтальной оси происходит без трения.

Считаем, что в положительном направлении оси Ox направлена скорость $\dot{x}$ и ускорение $\ddot{x}$.

Для того, чтобы растянуть пружину на величину x со стороны груза необходимо приложить некоторое усилие F.

В общем случае усилие F может зависеть как от смещения x, так и от скорости смещения $\dot{x}$. Если усилие F зависит только от смещения x, то эта зависимость $F = F(x)$ называется упругой характеристикой пружины.

В зависимости от вида характеристики она называется несимметричной $(F(x) \neq -F(-x))$ или симметричной $(F(x) = -F(-x))$

Величина $F'(x)$ называется жёсткостью пружины. Если жёсткость возрастает с увеличением x, характеристика называется жёсткой, в противном случае — мягкой.

Согласно третьему закону Ньютона, на груз со стороны пружины действует в противоположном направлении то же самое усилие $F(x)$, стремящееся вернуть груз в исходное положение.

На этом основании силу $F(x)$ называют восстанавливающей.

Освободим груз от связей и действие связей заменим усилиями R, $F(x)$, действующими на груз со стороны связей.

Запишем второй закон Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}(x) + \mathbf{R} + m\mathbf{g} \tag{1}$$

и спроектируем уравнение (1) на оси координат:

$$m\ddot{x} = -F(x);\ R - mg = 0 \tag{2}$$

Второе равенство определяет величину давления груза на горизонтальную поверхность. Вервое определяет закон движения $x(t)$.

В более общем случае дифференциальное уравнение движения механической системы с одной степенью свободы имеет вид:

$$\alpha\ddot{q} + F(q) = 0,$$

где q — обобщённая координата, характеризующая положение точки, и $F(q)$ — обобщенная восстанавливающая сила. Например, дифференциальное уравнение колебаний математического маятника имеет вид:

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

1.1.1 Некоторые характеристики нелинейных систем

Точные решения:

Пусть $F(c) = cx$. Тогда уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,\ \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Отсюда

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t = D\cos(\omega t + \delta). \tag{3}$$

Решение (3) описывает свободные колебания линейной системы. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота свободных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

является параметром самой системы. Поэтому для линейных систем частота свободных колебаний называется «собственной частотой».

В общем случае, когда $F(x)$ не является линейной функцией, исследование свободных колебаний сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения:

$$m\ddot{x} + F(x) = 0. \tag{4}$$

Обозначив $\dot{x} = v$, приведём уравнение (4) к виду:

$$mv\frac{dv}{dx} + F(x) = 0.$$

Откуда

$$m\frac{v^2}{2} + \int\limits_0^x F(x)dx = C = const. \tag{5}$$

Равенство (5) выражает закон сохранения энергии, первый член левой части представляет собой кинетическую энергию, второй — потенциальную.

Уравнение (5) позволяет изобразить фазовый портрет движения, то есть семейство траекторий в координатах x, $\dot{x}$. Так как уравнение (5) — чётное относительно $y = \dot{x}$, траектории симметричны относительно оси Ox. В случае симметричной упругой характеристики ($F(-x) = -F(x)$) фазовые траектории симметричны также и относительно вертикальной оси. Замкнутые фазовые траектории соответствуют периодическим движениям.

Предположим, что система совершает колебательное движение, и выберем за начало отчёта времени момент, когда скорость равна нулю и достигается наибольшее отклонение системы от положения равновесия ($x_{max} = A$).

Тогда из (5) следует

$$C = \int\limits_0^A F(x)dx,$$

$$m\frac{v^2}{2} = \int\limits_0^A F(x)dx - \int\limits_0^x F(x)dx = \int\limits_x^A F(x)dx.$$

Отсюда находим:

$$y = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int\limits_x^A F(x)dx}$$

$$t = \int \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\int\limits_x^A F(x)dx}} + B. \tag{6}$$

Так как в процессе колебаний x то возрастает, то убывает, знак перед радикалом нужно выбирать так, чтобы подынтегральное выражение оставалось положительным. В частности, рассматривая первый полупериод, имеем:

$$t = -\int\limits_A^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int\limits_x^A F(x)dx}} = \int\limits_x^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int\limits_x^A F(x)dx}}. \tag{7}$$

Знак минус перед корнем выбран потому, что в рассматриваемом интервале движения (первый полупериод) скорость отрицательна. Равенство (7) даёт обратную зависимость $t = t(x)$ вместо привычного представления перемещения x как функции времени t. Построив график $t = t(x)$ и отобразив его симметрично относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, получим графическое изображение закона движения.

Формула (7) позволяет определить период колебания как время, затрачиваемое на полный цикл движения, при котором изображающая точка обходит полностью фазовую траекторию и вновь занимает исходные координаты, допустим

$$y = \dot{x} = 0,\ x = x_{max} = A.$$

Если характеристика восстанавливающей силы симметричная, то есть функция $F(x)$ нечётная, то время перехода системы из крайнего положения $x_{max} = A$ в положение равновесия $x = 0$ составит четверть периода, следовательно

$$\frac{T}{4} = \int\limits_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int\limits_x^A F(x)dx}}. \tag{8}$$

Частота свободных колебаний определяется формулой

$$p = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2\int\limits_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int\limits_x^A F(x)dx}}}. \tag{9}$$

Из (9) видно, что частота свободных колебаний нелинейной системы зависит от частоты колебаний A. Типичная для нелинейных систем зависимость частоты колебаний от амплитуды не позволяет считать частоты колебаний параметром самой системы. Поэтому для нелинейных систем не пользуются термином «собственная частота».

1.1.2 Колебания систем с кусочно-нелинейными характеристиками

Среди нелинейных систем, колебания которых могут быть изучены точно, простейшими являются системы с кусочно-линейными характеристиками.

Метод решения таких задач состоит в том, что на каждом участке точно решается соответствующее дифференциальное уравнение, причем постоянные на каждом последующем участке определяются из условий непрерывности перемещения и скорости. Этот метод называется методом припасовывания.

В качестве примера рассмотрим систему с упругой силой F вида:

$$F(x) = \begin{cases} C_1 x & |x| \leq a \\ C_1 x + C_2(|x| - a) sgn x & x > a \end{cases}$$

Очевидно, что если амплитуда колебаний меньше зазора. то груз совершает гармонические колебания с частотой

$$p_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}},$$

не зависящей от амплитуды. Пусть теперь амплитуда колебаний $A > a$. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее движение груза, имеет вид:

$$m\ddot{x} + C_1 x + C_2(x - a) = 0, \tag{10}$$

Решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = A,\ \dot{x}(0) = 0,$$

имеет вид:

$$x = \frac{aC_2}{C_1 + C_2}(1 - \cos p_2 t) + A \cos p_2 t, \tag{11}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m}}$$

Приравнивая $x = a$, находим значение времени t_*, при котором груз перестанет касаться пружины 2.

$$a = \frac{aC_2}{C_1 + C_2}\left(1 - \cos p_2 t_*\right) + A\cos p_2 t_*,$$

Отсюда

$$t_* = \frac{1}{p_2} arccos \frac{C_1 a}{(C_1 + C_2)a - aC_2},$$

$$\dot{x}(t_*) = -p_2\left(A - \frac{aC_2}{C_1 + C_2}\right)\sin p_2 t_*, \tag{12}$$

или

$$\dot{x}(t_*) = -p_2\left(A - \frac{aC_2}{C_1 + C_2}\right)\sqrt{1 - \left[\frac{C_1 a}{(C_1 + C_2)a - aC_2}\right]^2}, \tag{13}$$

Начиная с этого момента, груз движется только под действием пружины 1 и уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} + C_1 x = 0, \tag{14}$$

Обозначая $\tau = t - t_*$, имеет для интегрирования уравнения (14) условия

$$x = a,\ \dot{x} = \dot{x}(t_*) = \dot{x}_*,\ \tau = 0, \tag{15}$$

Следовательно

$$x = \cos p_1\tau + \frac{\dot{x}_*}{p_1}\sin p_1\tau, \tag{16}$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}}$$

Приравнивая в выражении (15) $x = 0$, находим τ_* — время за которое система приходит в положение равновесия. Затем, складываем t_* и τ_*, находим четверть периода. Зная период колебаний, находим частоту.

2 Приближённые методы расчёта периодических движений нелинейных систем

2.1 Простейший способ

Наиболее прост следующий, основанный на методе коллокаций, приём приближенного определения закона движения точки.

Решение уравнения

$$m\ddot{x} + F(x) = 0, \tag{17}$$

описывающего движение механической системы с одной степенью свободы и позиционной (зависящей только от координаты) восстанавливающей силой в случае симметрии $(-F(x) = -F(x))$ ищем в виде:

$$x = A\sin{(pt + \alpha)} \tag{18}$$

Потребуем, чтобы функция (18) удовлетворяла уравнению (27) в момент прохождения через положение равновесия и в моменты, когда x достигает максимума, то есть равно A. Поскольку $F(0) = 0$ и

$$x|_{x=0} = 0,$$

то функция (18) удовлетворяет уравнению (27) в моменты, прохождения через положение равновесия. Далее $x = x_{max}$ при $\sin{(pt + \alpha)} = 1$. Поэтому

$$\ddot{x}_{max} = -p^2 A$$

Тогда из (27) следует:

$$p^2 = \frac{F(A)}{mA} \tag{19}$$

Последняя формула опеределяет зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды. График этой зависимости называется **скелетной кривой**.

Подставляя (19) в (18), найдём приближённый закон движения рассматриваемой системы:

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{F(A)}{mA}}t + \alpha\right) \tag{20}$$

2.2 Метод линеаризации

Способ основан на непосредственной замене нелинейной характеристики $F(x)$ некоторым эквивалентным линейным выражением. Так, при симметричной характеристике вместо $F(x)$ принимается cx, где c — коэффициент, значение которого подбирается из условия минимизации интегрального квадратичного уклонения

$$\delta(c) = \int\limits_{-A}^{A} \left[F(x) - cx\right]^2 dx \tag{21}$$

Найдём c, доставляющее минимальное значение уклонению.

$$\frac{d\delta}{dc} = 2\int\limits_{-A}^{A} \left[F(x) - cx\right](-x)dx = 0 \tag{22}$$

Преобразуем (22):

$$-\int\limits_{-A}^{A} xF(x)dx + c\int\limits_{-A}^{A} x^2 = 0$$

Отсюда

$$c = \frac{3}{2A^3}\int\limits_{-A}^{A} xF(x)dx \tag{23}$$

Чтобы поднять роль больших амплитуд, используют функционал вида:

$$\delta(c) = \int_{-A}^{A} x^2 \left[F(x) - cx\right]^2 dx \tag{24}$$

Тогда формула (23) принимает вид:

$$c = \frac{5}{2A^5} \int_{-A}^{A} x^3 F(x) dx \tag{25}$$

Частоту колебаний находим по формуле

$$p^2 = \frac{c}{m}$$

2.3 Метод гармонического баланса

Рассмотрим нелинейное уравнение свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{26}$$

где $f(x)$ — позиционная восстанавливающая сила. Предположим, что восстанавливающая сила является симметричной, то есть $f(x) = -f(-x)$.

Ищем решение уравнения в виде

$$x = A \sin pt, \tag{27}$$

$$-Ap^2 \sin pt + f\left(A \sin pt\right) = 0, \tag{28}$$

Функция $f\left(A \sin pt\right)$ является периодической функцией с периодом

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье

$$f\left(A\sin pt\right)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sin kpt, \tag{29}$$

где

$$B_k=\frac{1}{p\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}}f\left(A\sin pt\right)\sin kptdt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\left(A\sin\psi\right)\sin k\psi dt$$

Оставим в разложении (30) одно только первое слагаемое и подставим его в (28):

$$-Ap^2\sin pt+B_1\sin pt=0,$$

или

$$-Ap^2+B_1=0, \tag{30}$$

Из (30) получаем выражение для скелетной кривой:

$$p^2=\frac{B_1}{A}=\frac{1}{\pi A}\int\limits_0^{2\pi}f\left(A\sin\psi\right)\sin\psi dt, \tag{31}$$

Рассмотрим произвольный случай, когда восстанавливающая сила не является позиционной:

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0, \tag{32}$$

Ищем решение в виде отрезка ряда Фурье:

$$x=A_0+A_1\cos pt+B_1\sin pt+...+A_N\cos Npt+B_N\sin Npt, \tag{33}$$

или

$$x=A_0+\sum_{n=1}^{N}\left(A_n\cos npt+B_n\sin npt\right), \tag{34}$$

Подставляем (34) в (32):

$$-\sum_{n=1}^{N} n^2 p^2 \left(A_n \cos npt + B_n \sin npt\right) + F(t) = 0, \tag{35}$$

В формуле (35) введено обозначение

$$F(t) = f\left[A_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos npt + B_n \sin npt\right), \right.$$
$$\left. \sum_{n=1}^{N} n\left(-A_n \sin npt + B_n \cos npt\right)\right]$$

Функция $F(t)$ является периодической с периодом $\frac{2\pi}{p}$ и может быть разложена в ряд Фурье:

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos npt + b_n \sin npt\right), \tag{36}$$

где

$$a_0 = \frac{p}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)dt,$$

$$a_n = \frac{p}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) \cos nptdt,$$

$$b_n = \frac{p}{\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t) \sin nptdt,$$

Подставим разложение (36) в уравнение (35) и соберем множители при одинаковых гармониках

$$
\begin{cases}
\quad 1: \;\; \dfrac{p}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)dt = 0, \\
\cos pt: \;\; A_1 = \dfrac{p}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\cos pt dt, \\
\sin pt: \;\; B_1 = \dfrac{p}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\sin pt dt, \\
\ldots\ldots\ldots \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\cos npt: \;\; n^2p^2A_n = \dfrac{p}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\cos npt dt, \\
\sin npt: \;\; n^2p^2B_n = \dfrac{p}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{2\pi}{p}} F(t)\sin npt dt,
\end{cases} \tag{37}
$$

$$
n = \overline{1, N}
$$

Уравнения (37) образуют систему для определения A_i, B_i.

Получив выражения для A_1, B_1, находим амплитуду колебаний по формуле

$$
A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}
$$

и строим скелетную кривую.

2.4 Пример. Уравнение Дюффинга

Рассмотрим уравнение вида:

$$
\ddot{x} + k^2 x = \gamma x^3 \tag{38}
$$

Решение (38) ищем в виде:

$$
x = A\cos pt \tag{39}
$$

Подставляем (39) в (38). Получаем:

$$- p^2 A \cos pt + k^2 A \cos pt = \gamma A^3 \cos^3 pt = \frac{\gamma A^3}{4} \left(3 \cos pt + \cos 3pt\right)^3 \tag{40}$$

Собираем слагаемые с одинаковой гармоникой, получаем;

$$- p^2 A + k^2 A = \frac{3\gamma A^3}{4} \tag{41}$$

Теперь будем искать решение в более сложном виде:

$$x = A_1 \cos pt + A_3 \cos 3pt \tag{42}$$

Подставляем (42) в (38):

$$\begin{aligned} -p^2 A_1 \cos pt - 9p^2 A_3 \cos 3pt + k^2 \left(A_1 \cos pt + A_3 \cos 3pt\right) = \\ = \gamma \left(A_1 \cos pt + A_3 \cos 3pt\right)^3 \end{aligned} \tag{43}$$

Разлагая правую часть (44) в ряд Фурье, получаем:

$$\begin{cases} \left(k^2 - p^2\right) A_1 = \dfrac{3A_1\gamma}{4} \left(A_1^2 + A_1 A_3 + 2A_3^2\right), \\ \left(k^2 - 9p^2\right) A_3 = \dfrac{\gamma}{4} \left(A_1^3 + 6A_1^2 A_3 + 3A_3^3\right) \end{cases} \tag{44}$$

Получаем систему, из которой можно найти A_1 и A_3.