1 Лекция 3. Системы с трением.

1.1 Свободные колебания диссипативных систем с одной степенью свободы при линейной восстанавливающей силе

Системы называются диссипативными, если их движения сопровождаются некомпенсируемыми потерями энергии и затуханием колебаний за счёт сил сопротивления.

В диссипативных системах единственным стационарным состоянием является равновесное состояние, обладающее периодической устойчивостью. В диссипативных системах невозможны строго периодические колебательные движения. Не всякая система, движение которой сопровождается расходом энергии за счёт сил сопротивления, ничем не компенсируется. Колебания таких систем затухают. Критерием диссипативности является условие, при котором скорость точки и приложенная к ней сила сопротивления, противоположно направлены.

1.2 Вязкое трение

Рассмотрим свободные колебания системы с одной степенью свободы с учётом трения и при линейной восстанавливающей силе.

Уравнение имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - R, \tag{1}$$

c — жёсткость пружины. Зависимость силы трения от смещения при скорости определяется физической природой трения. Наиболее простым солучаем является так называемое вязкое трение, когда сила пропорциональна скорости движения:

$$R = \alpha\dot{x}$$

В этом случае уравнение движения (1) запишется в виде:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0;\ 2n = \frac{\alpha}{m};\ k^2 = \frac{c}{m} \tag{2}$$

Решение уравнения (2) определяется формулой

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\right) \tag{3}$$

$$\omega^2 = \sqrt{k^2 - n^2},\ k > n$$

Как известно из (3), при наличии вязкого трения закон движения $x(t)$ массы m описывается непериодической функцией по времени t. Однако часто это движение называют периодическими затухающими по времени колебаниями, несмотря на математическую неточность этого названия. Под периодом T этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величину ω называют круговой частотой затухающих колебаний.

Логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений A_k и A_{k+1} называют логарифмическим декрементом колебанияя.

$$\delta = \ln\frac{A_k}{A_{k+1}} = nT \tag{4}$$

Представив A_{k+1} в виде $A_{k+1} = A_k - \Delta A_k$ и считая, что колебания затухают медленно

$$\frac{\Delta A_k}{A_k} << 1,$$

из (4) находим:

$$\delta = \ln\frac{A_k}{A_k - \Delta A_k} = \ln\frac{1}{1 - \Delta A_k/A_k} \approx \frac{\Delta A_k}{A_k} \tag{5}$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент примерно равен относительному изменению амплитуды колебания за период T.

Из (4) и выражения для ω в (3) выводим:

$$\delta = nT = n\frac{2\pi}{\omega} = n\frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

Отсюда находим:

$$n^2 = k^2\frac{\left(\delta/(2\pi)\right)^2}{1 + \left(\delta/(2\pi)\right)^2} \tag{6}$$

Подставив это значение n^2 в выражение для ω в (3), получаем:

$$\omega = \sqrt{k^2 - n^2} = \frac{k}{1 + \left(\delta/(2\pi)\right)^2} \tag{7}$$

Из формулы (7) видно, что даже при значительном затухании частота ω затухающих колебаний мало отличается от частоты k собственных колебаний соответствующей системы без трения. Так, например, даже когда каждый следующий взмах вдвое меньше предыдущего ($\ln 2 = 0,693$), то частота ω лишь на $0,6\%$ меньше, чем k.

1.3 Сухое трение

Рассмотрим движение упруго опёртого груза массы m по шероховатой поверхности.

Сила трения, действущая на груз, постоянна по величине и направлена против движения. Уравнение свободных колебаний такой системы при линейной восстанавливающей силе имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx - R_0\mathrm{sgn}\dot{x},\ \mathrm{sgn}\dot{x} = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0; \\ -1, & \dot{x} < 0; \\ 0, & \dot{x} = 0; \end{cases} \tag{8}$$

Отклоним груз в крайнее правое положение на величину A и отпустим его без начальной скорости. В этом случае:

$$x_0 = A,\ \dot{x}_0 = 0. \tag{9}$$

Чтобы груз начал двигаться, необходимо, чтобы восстанавливающая сила A была численно больше статической силы трения R_0, то есть движение возможно при

$$A > \frac{R_0}{c}.$$

Зона

$$-\frac{R_0}{c} < x < \frac{R_0}{c}$$

называется зоной застоя или мёртвой зоной.

Под действием натяжения пружины на первом этапе груз будет двигаться влево ($\dot{x} < 0$) и уравнение движения будет:

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = 0 \tag{10}$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 a; \tag{11}$$

$$k^2 = \frac{c}{m},\ a = \frac{R_0}{c}.$$

Величина a представляет собой отклонение груза под действием максимально возможной силы трения.

Общее решение уравненя (11) имеет вид:

$$x = a + C_1 \cos pt + C_2 \sin pt \tag{12}$$

Определяя постоянные из начальных условий (9), получаем:

$$x = a + (A - a)\cos pt \tag{13}$$

Этот закон движения справедлив, пока $\dot{x} < 0$. Так как

$$\dot{x} = -p\,(A - a)\sin pt,$$

то скорость движения будет отрицательной до момента времени t_1, определяемого из условия $pt_1 = \pi$. В этот момент груз остановится. Смещение его:

$$x = a + (A - a)\cos\pi = 2a - A \tag{14}$$

Под действием трения отклонения груза уменьшилось по абсолютной величине на $2a$. После остановки груз начинает двигаться вправо.

Повторяя приведённые выше расчёты, можно показать, что движение направо продолжается в течении временит π/p. Максимальное отклонение вправо равно $A - 4a$. Процесс движения продолжается до тех пор, пока груз не попадёт в зону застоя и не остановится. Зависимость смещения от времени на каждом этапе движения представляет собой косинусоиду, смещённую по оси Ox на величину a или $-a$ с амплитудой, уменьшающейся по закону арифметической прогрессии.

Время между соседними максимумами отклонения можно условно назвать периодом движения

$$T = \frac{2\pi}{p}.$$

Частота колебаний при сухом трении такая же, как в соответствующей системе без трения.

Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением строится следующим образом. В координатах x, $\dot{x}/p$ гармонический закон движения изображается дугами окружности. Если в уравнение (11) ввести новую переменную $x-a$,

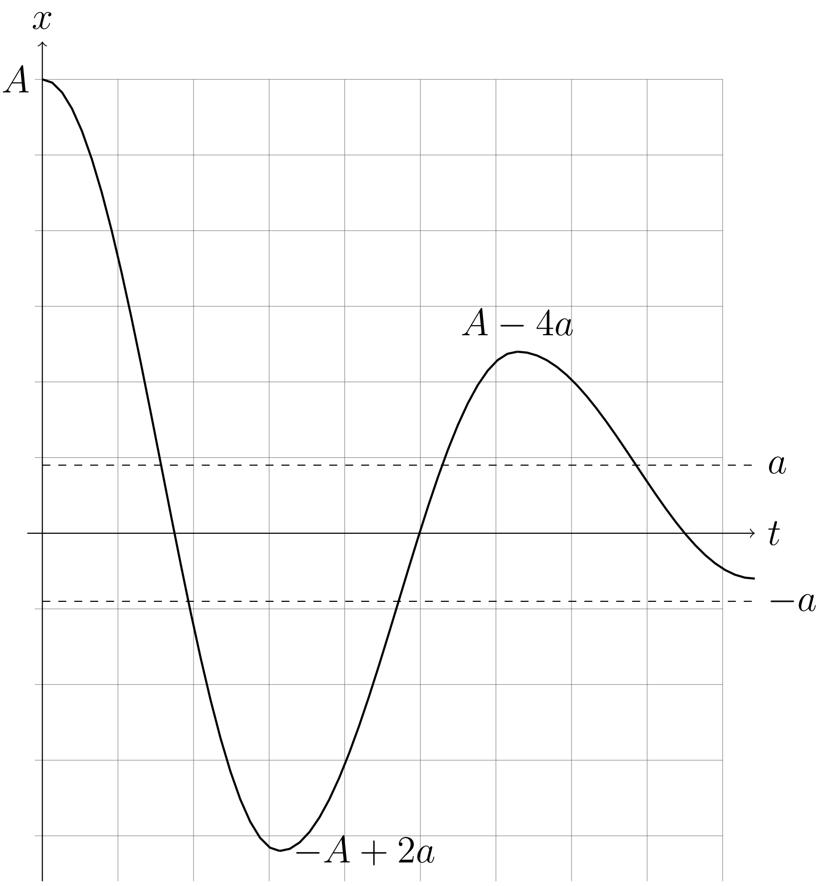

Рис. 1: График движения

то получится уравнение гармонических колебаний без трения. Это движение на фазовой плоскости отображается полуокружностью радиуса $A-a$ и центром в точке $x=-a$. На втором этапе движения, когда $\dot{x}>0$, уравнение движения

$$\ddot{x}+p^2x=-p^2a$$

может рассматриваться как уравнение гармонических колебаний со смещением $x+a$. На фазовой плоскости на втором этапе движения получаем получаем полуокружность с центром в точке $x=a$. И так до тех пор, пока кривая при $\dot{x}=0$ не попадает в зону застоя $-a<x<a$. В результате фазовый портрет свободных колебаний с сухим трением имеет вид:

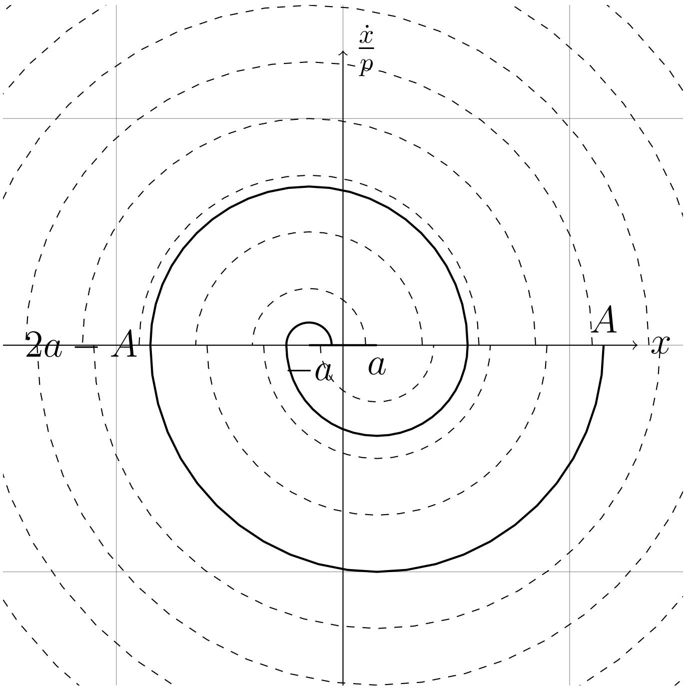

Рис. 2: Фазовый портрет

1.4 Трение, степенным образом зависящее от скорости

Часто принимают, что трение пропорционально некоторой n-й степени скорости. Эта зависимость записывается в формуле:

$$R = -\alpha \dot{x}^n \mathrm{sgn} x$$

или

$$R = -\alpha |\dot{x}|^{n-1} \dot{x}.$$

В таком случае основное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$m\ddot{x} + \alpha |\dot{x}|^{n-1} \dot{x} + cx = 0 \tag{15}$$

Точное решение этого уравнения при произвольном n — задача сложная (в элементарных функциях решение непредставимо), и для определения $x(t)$ приходится пользоваться приближёнными методами.

Рассмотрим метод энергетического баланса. Примем, что искомое движение близко к гармоническому, характеризуется медленно меняющейся амплитудой и постоянной частотой, для которой можно принять значение

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

соответствующее рассматриваемой системе без трения. Таким образом, рассматривая какой-либо один период колебаний и совмещая начало отчёта времени с моментом, когда отклонение достигает максимума, можно принять, что движение описывается функцией:

$$x = A(t)\cos kt \tag{16}$$

При этом $A(t)$ — медленно меняющаяся функция времени ($\dot{A}T << A$). Из (16) находим:

$$\dot{x} = -kA(t)\sin kt + \dot{A}(t)\cos kt \tag{17}$$

Так как

$$\dot{A} << \frac{A}{T} = A\frac{k}{2\pi},$$

то из (17) следует приближенное равенство:

$$\dot{x} = -kA\sin kt \tag{18}$$

Тогда сила трения

$$R = -\alpha\,(Ak)^n\,|\sin kt|^{n-1}\sin kt. \tag{19}$$

Работа силы трения за рассматриваемый период равна:

$$U = \int\limits_A^0 R dx = \int\limits_0^{T/4} R\frac{dx}{dt}dt \tag{20}$$

Подставляя (18) и (19) в (20), найдём работу силы трения за рассматриваемый период:

$$U = -\int\limits_0^{T/4} \alpha\,(Ak)^n\,|\sin kt|^{n+1} dt \tag{21}$$

При вычислении интеграла в (21) можно приближенно принять, что в течении рассматриваемого периода величина A неизменна. Тогда получим:

$$\begin{aligned} U = -4\alpha\,(Ak)^n \int\limits_0^{T/4} |\sin kt|^{n+1} dt = -4\alpha A^{n+1} k^n \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n+1}\psi d\psi = \\ = -4\alpha A^{n+1} k^n I(n) \end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим интеграл в последнем равенстве. Он выражается через бета-функцию Эйлера:

$$I(n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n+1}\psi d\psi = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\,(1+n/2)}{\Gamma\,(3/2+n/2)} \tag{23}$$

Работа сил трения равна изменению энергии системы за рассматриваемый период. Так, в начале и в конце рассматриваемого периода скорость равно нулю, а поэтому и кинетическая энергия равна нулю, то изменение полной механической энергии определяется изменением потенциальной энергии

$$\Delta\Pi = \Pi(T) - \Pi(0):$$

$$\Delta\Pi = \int\limits_{A(0)}^{A(T)} cxdx = c\left.\frac{x^2}{2}\right|_{A(0)}^{A(T)} = \frac{c}{2}\left[A^2(T) - A^2(0)\right]$$

или

$$\Delta\Pi = \frac{c}{2}\left[A(T) + A(0)\right]\left[A(T) - A(0)\right] = cA\Delta A$$

Приравнивая работу сил трения приращению энергии, получим уравнение в конечных разностях:

$$-4\alpha A^{n+1} k^n I(n) = cA\Delta A$$

или

$$\Delta A = -\frac{4}{c}\alpha(Ak)^n I(n) \tag{24}$$

Уравнение (24) связывает приращение (отрицательное) амплитуды за один период со значением амплитуды в начале этого периода, то есть определяет вид непрерывной огибающей. Рассматривая эту огибающую как непрерывную кривую, описываемую дифференцируемой функцией времени $A = A(t)$ приближённо имеем:

$$\Delta A = \frac{\Delta A}{\Delta t}T \approx \frac{dA}{dt}T,\ T = \frac{2\pi}{k} \tag{25}$$

Тогда уравнение в конечных разностях (24) примет вид дифференциального уравнения для огибаюшей:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{2\alpha k^{n+1} I(n)}{\pi c}A^n \tag{26}$$

В случае $n = 1$ (вязкое трение)

$$I(1) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(3/2\right)}{\Gamma\left(2\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}\Gamma\left(1/2\right) = \frac{\pi}{4}$$

и уравнение (26) приобретает форму:

$$\frac{dA}{dt} = -\gamma A,\ \gamma = \frac{\alpha k^2}{2c} = \frac{\alpha}{2m}$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$A = A_0 e^{-\gamma t},$$

где A_0 — начальная ордината огибающей. Таким образом, при $n = 1$ изложенный приближённый метод энергетического баланса приводит к точному результату.

При $n \neq 1$ уравнение (26) решается методом разделения переменных:

$$\frac{dA}{A^n} = -\frac{2\alpha k^{n+1} I(n)}{\pi c} dt \tag{27}$$

После интегрирования при начальном условии $A(0) = A_0$ находится зависимость $A(t)$:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt[n-1]{1 + \frac{2\alpha}{\pi c}(n-1)k^{n+1} I(n) t}}, \ n \neq 1 \tag{28}$$

В частности, при $n = 2$ (случай турбулентного трения) получается:

$$I(2) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{(3/2)\Gamma(3/2)} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{(3/4)\Gamma(1/2)} = \frac{2}{3}$$

$$A = A_0 / \left(1 + \frac{4\alpha}{3\pi c} k^3 t\right),$$

то есть, огибающая имеет вид гиперболы.

Из (27) при $n = 0$ (сухое трение) выводим:

$$A = A_0 - \frac{2\alpha k}{\pi c} t,$$

то есть убывание амплитуд следует линейному закону, а амплитуда образует арифметическую прогрессию. Этот результат также соответствует точному решению.

Для логарифмического декремента колебаний в силу малости $\Delta A / A$ можно записать:

$$\delta = \ln \frac{A_j}{A_{j+1}} = \ln \frac{A_{j+1} - (A_{j+1} - A_j)}{A_{j+1}} = \ln \frac{A_{j+1} - \Delta A_j}{A_{j+1}} = \ln \left(1 - \frac{\Delta A_j}{A_{j+1}}\right) \approx -\frac{\Delta A}{A}$$

Подставляя сюда A из (24), выводим:

$$\delta = \frac{4\alpha k^n I(n)}{c} A^{n-1}$$

Отсюда видно, что логарифмический декремент колебаний не зависит от амплитуды колебаний и остаётся неизменным лишь в случае вязкого трения ($n = 1$). В остальных случаях он оказывается переменной величиной, зависящей от амплитуды.