# Алгоритмы на графах

## Лекция 4.

## Поиск в глубину (завершение).

## Бесконтурные графы.

Адигеев Михаил Георгиевич

2023

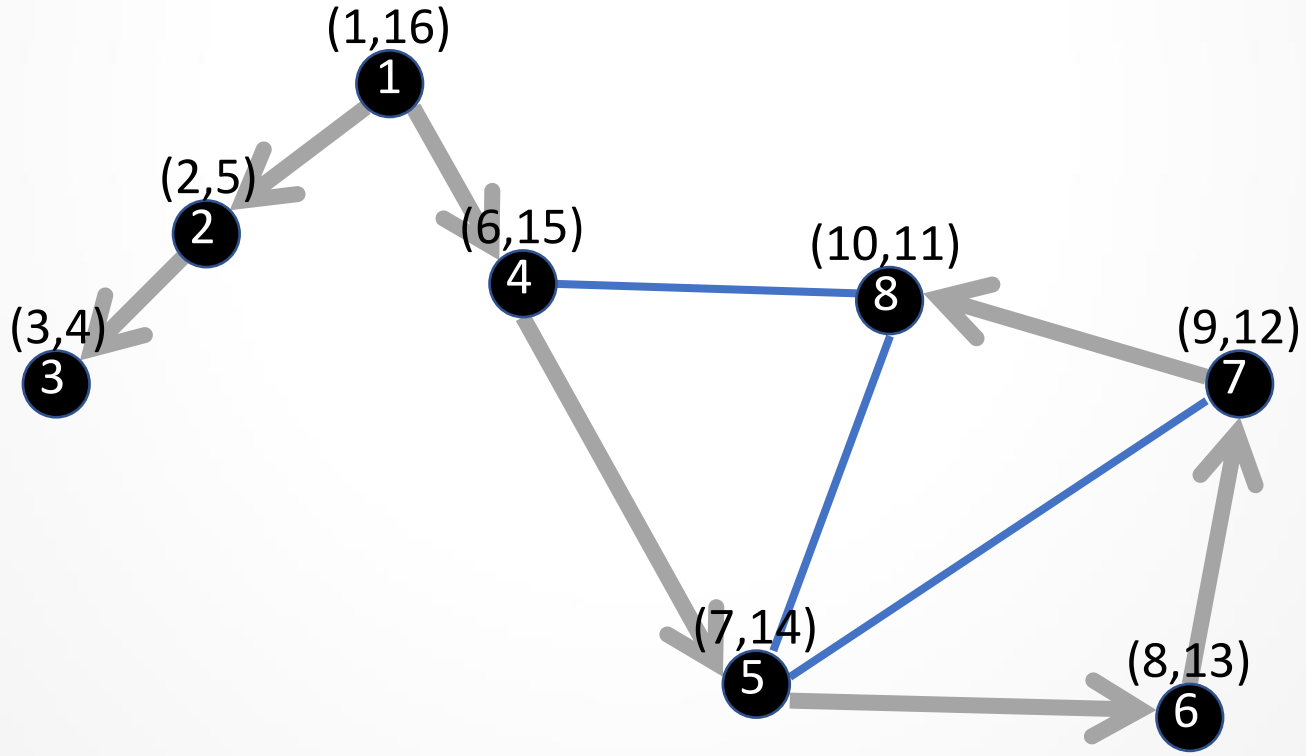
# План лекции

1. Обход в глубину неориентированного графа.
   - ✓ Классификация рёбер
   - ✓ Обнаружение мостов
2. Обход в глубину ориентированного графа.
   - ✓ Классификация дуг
   - ✓ Топологическая сортировка вершин
   - ✓ Определение компонент сильной связности

# Обход в глубину неориентированных графов

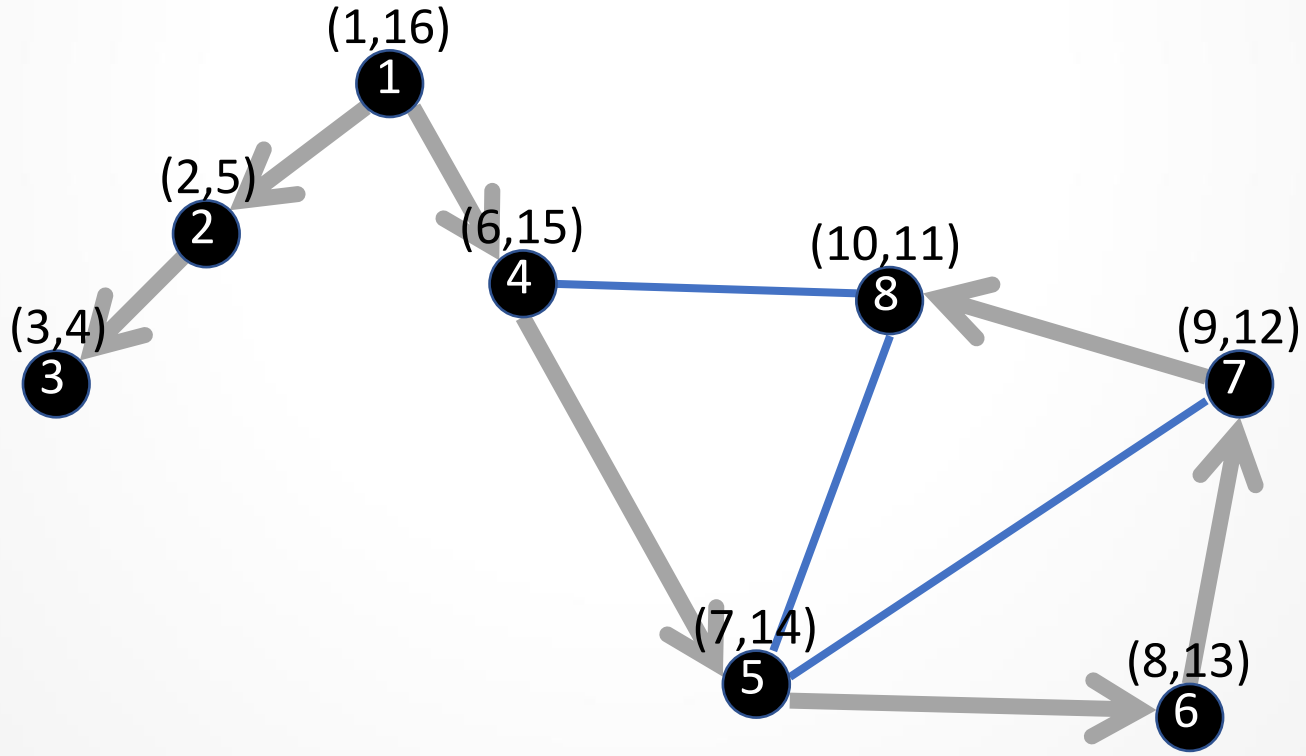
# Классификация рёбер

При обходе в глубину *неориентированного* графа рёбра разделяются на две категории: *древесные* и *обратные*.



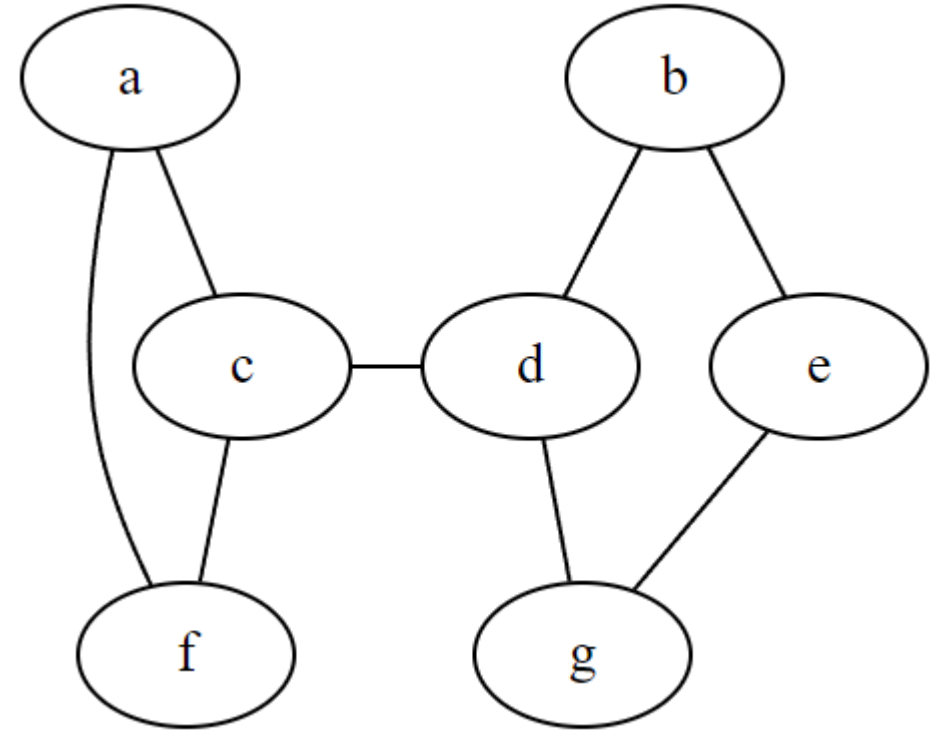
# Классификация рёбер

Утверждение. Обратное ребро соединяет вершину с её предшественником (предком в глубинном дереве).



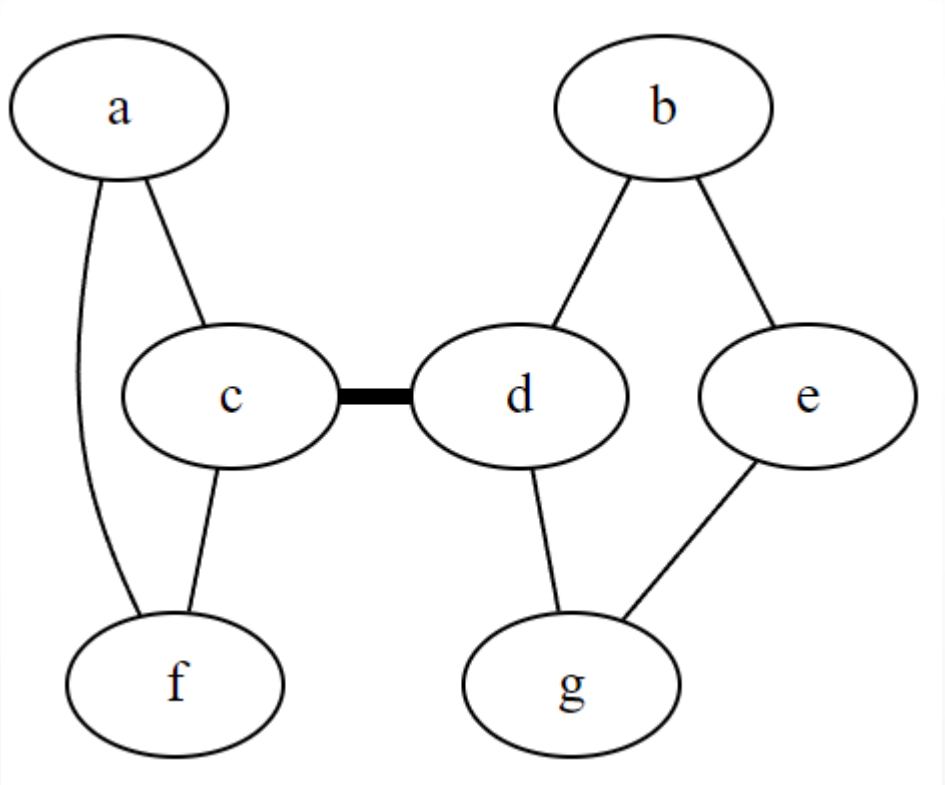
# Поиск мостов

Определение. ***Мостом*** в графе называется ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается.



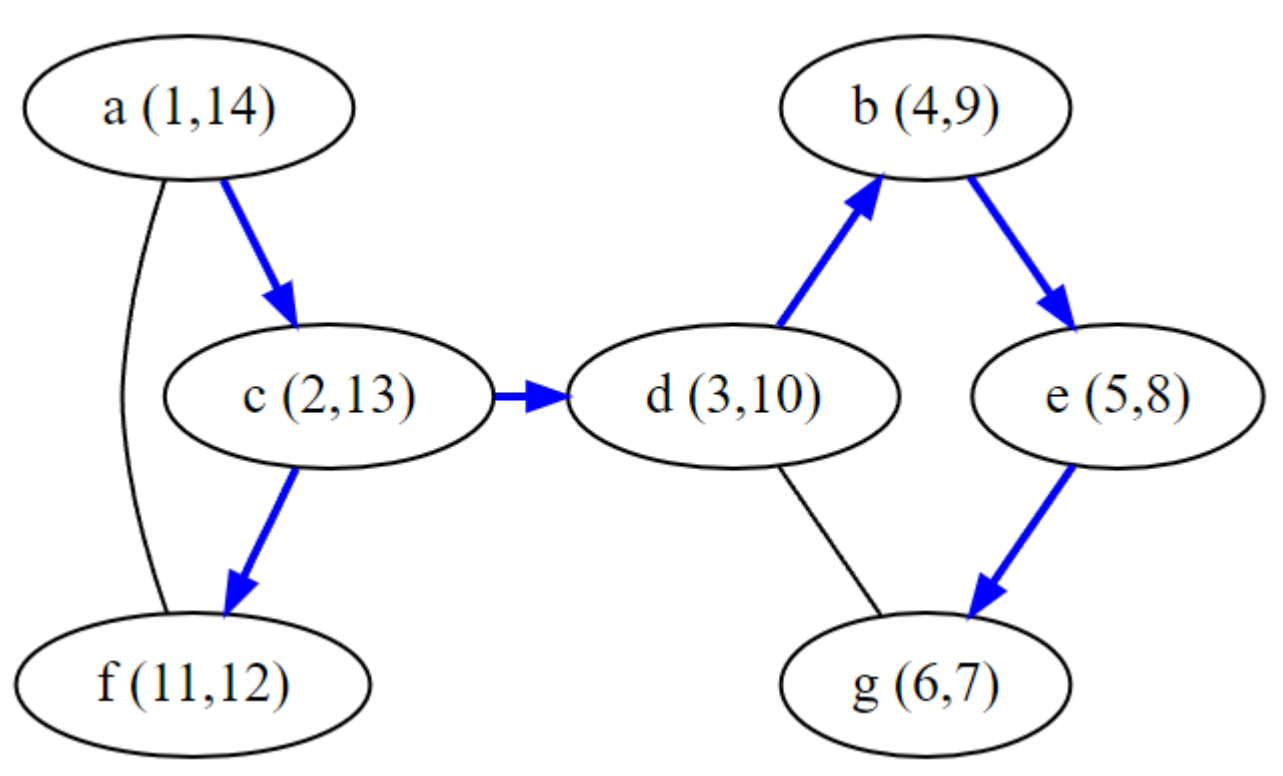
# Поиск мостов

Утверждение. Ребро является мостом если и только если оно не входит ни в один цикл.



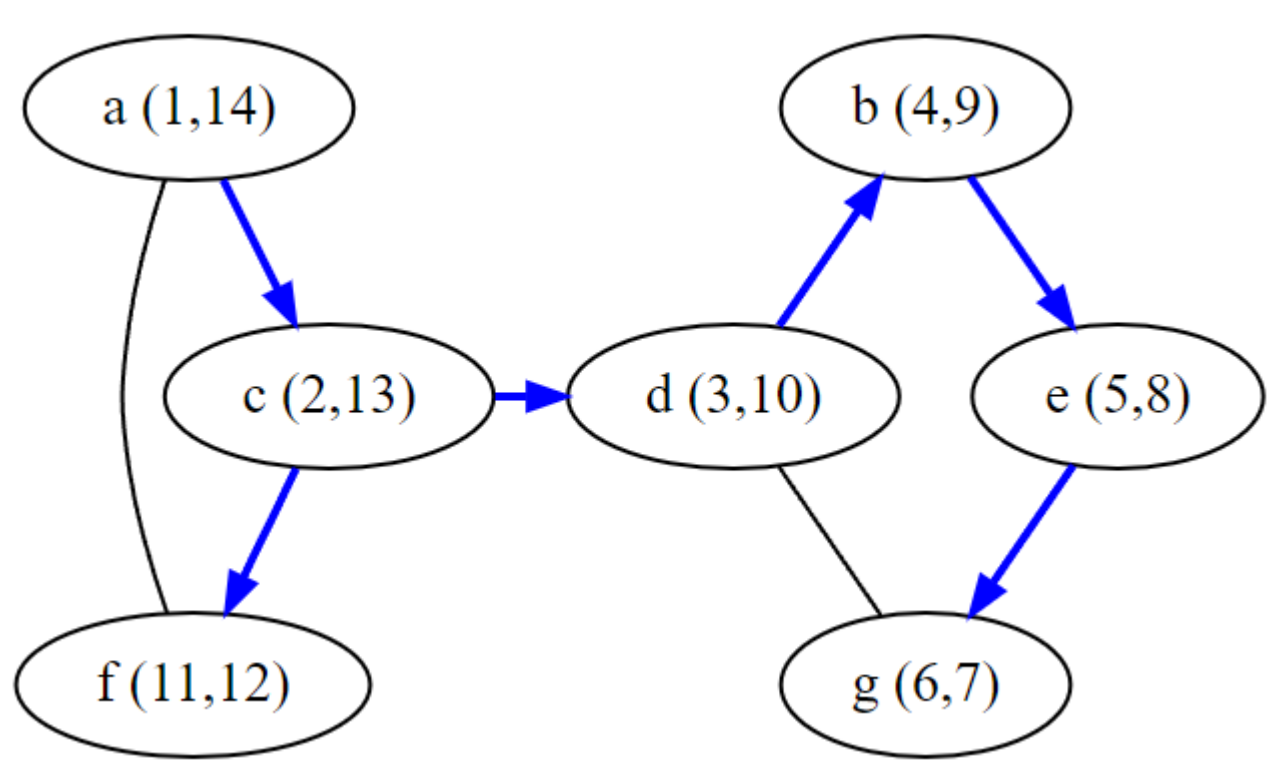
# Поиск мостов

Как найти все мосты на графе с помощью поиска в глубину?



# Поиск мостов

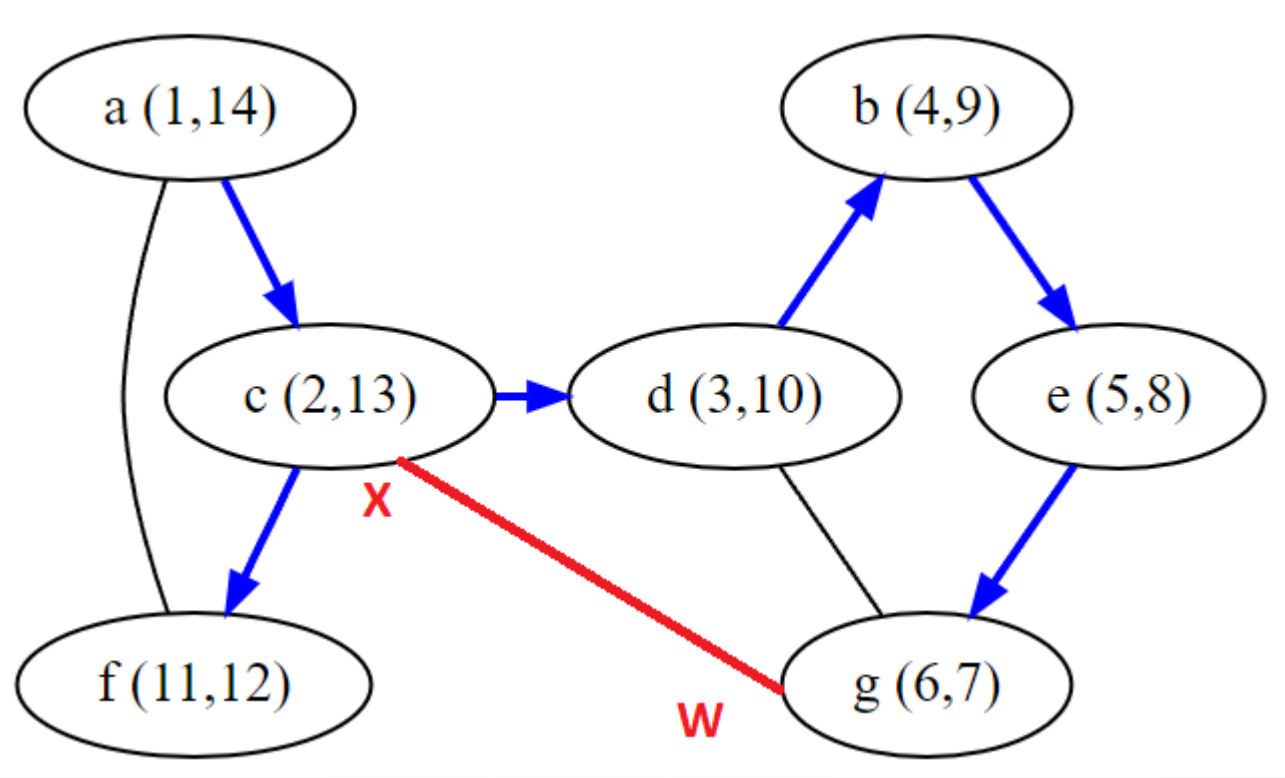
Теорема. Ребро `(u,v)` является мостом тогда и только тогда, когда это древесное ребро и не существует (обратного) ребра из `v` или её потомка в `u` или её предка.



# Поиск мостов

Доказательство.

⇐ Пусть `(u,v)` - древесное ребро и не существует (обратного) ребра из `v` или её потомка в `u` или её предка. Удалим это ребро из графа. Предположим, что существует путь, ведущий из `v` к её предку и `(w,x)` – последнее ребро на этом пути.

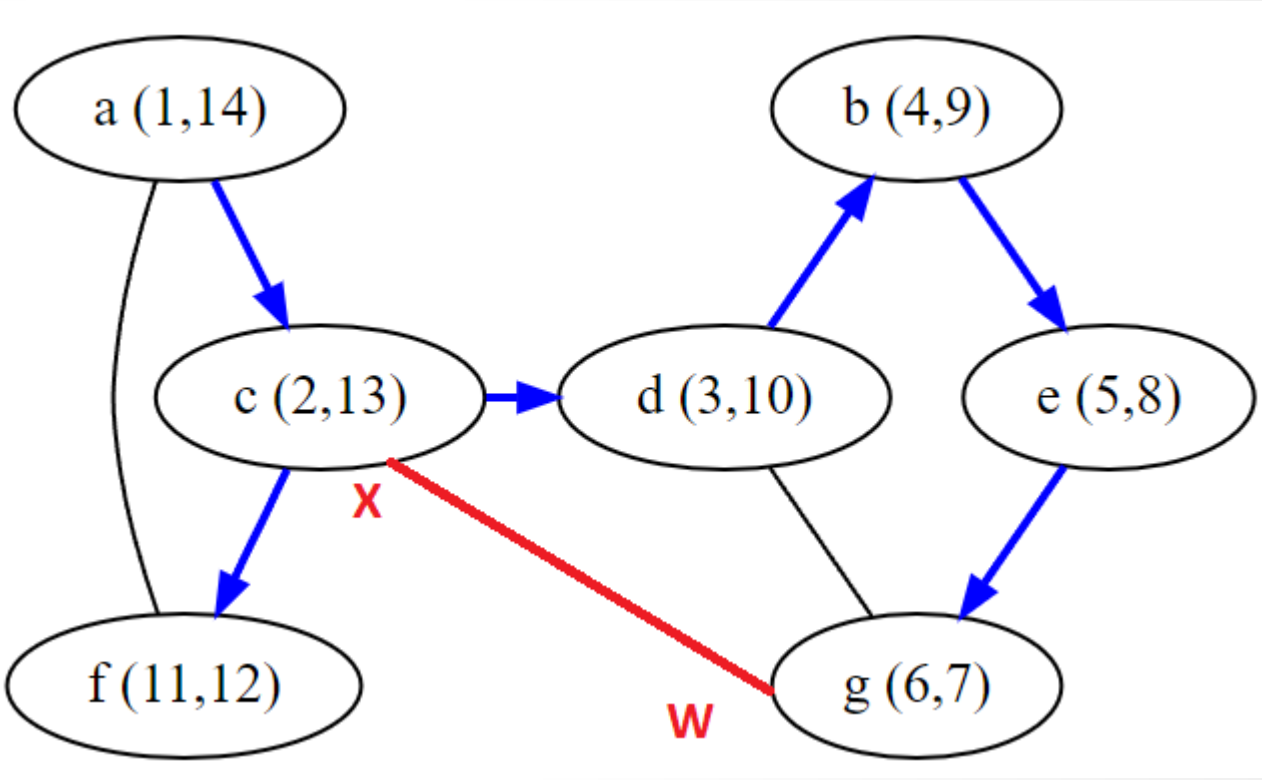


# Поиск мостов

`(w,x)` – не древесное ребро, иначе на глубинном дереве был бы цикл.

`(w,x)` – не обратное ребро, т.к. это противоречило бы условию теоремы.

Получили противоречие.



# Поиск мостов

Как проверять условие теоремы («не существует (обратного) ребра из `v` или её потомка в `u` или её предка»)?

При обходе в глубину будем рассчитывать ещё один показатель `Low[]`.

По определению, `Low[v]` = минимальное время входа (`Time_In`) для вершин, достижимых из `v` или её потомков.

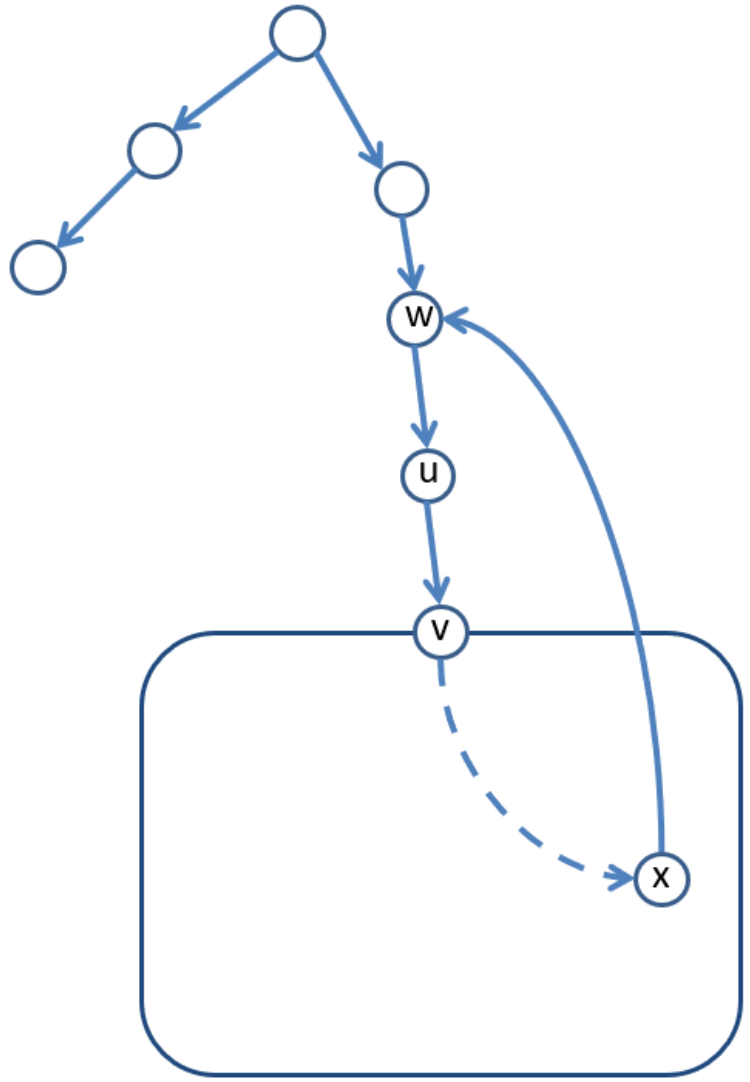
Более точно: `Low[v]` = минимум следующих величин:

- `Time_In[v]`;
- `Low[x]` для всех x – потомков v;
- `Time_In[w]` для всех обратных рёбер (x,w), где x – (нестрогий) потомок v, w – предок v.

# Поиск мостов

`Low[v]` = минимум следующих величин:

- `Time_In[v]`;
- `Low[x]` для всех x – потомков v;
- `Time_In[w]` для всех обратных рёбер (x,w), где x – (нестрогий) потомок v, w – предок v.




Тогда: (u,v) – мост, если и только если `Low[v] > Time_in[u]`.

Сложность поиска мостов: $O(n+m)$.

# Алгоритм поиска мостов

```
DFS(G)
For each v ∈ V:
   State[v] := 'unvisited';
   Pred[v] := NULL;
   Time_In[v] := NULL;
   Time_Out[v] := NULL;
   Low[v] := NULL;
CurTime : = 0;
For each v ∈ V:
   If State[v] = 'unvisited'
        DFS_Visit(v);
```

# Алгоритм поиска мостов

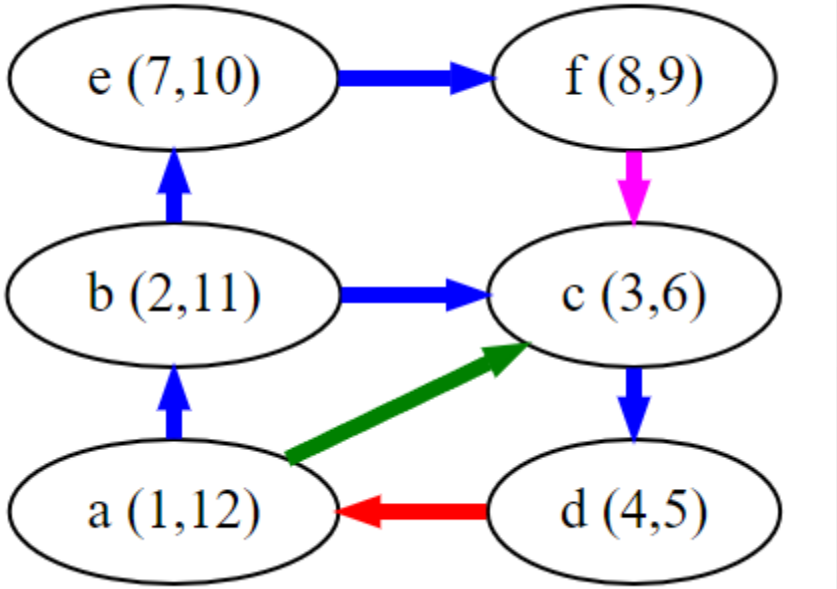
```
DFS_Visit(v)
State[v] := 'visited';
CurTime := CurTime + 1;
Time_In[v] := CurTime;
Low[v] := Time_In[v];
For each u in Adj(v)
    If State[u] = 'unvisited'
          Pred[u] := v;
          DFS_Visit(u);
          Low[v] := min(Low[u], Low[v]);
    Else
          Low[v] := min(Low[v], Time_In[u]);
    If Low[v] > Time_in[u] then (v,u) – мост;
State[v] := 'processed';
CurTime := CurTime + 1;
Time_Out[v] := CurTime;
```

# Обход в глубину ориентированных графов

# Классификация дуг

При обходе в глубину *ориентированного* графа дуги разделяются на четыре категории:

1) *Древесные – по ним проходим при обходе*
2) *Прямые – ведут из древесного предка в потомка*
3) *Обратные – ведут из древесного потомка в предка*
4) *Поперечные – ведут в вершину, не являющуюся предком или потомком.*



# Классификация дуг

Как определить тип дуги `(u,v)` при обходе в глубину?

Используем пометки Pred, Time_In, Time_Out:

1) *Древесная:* `u=Pred[v]`

2) *Прямая:*

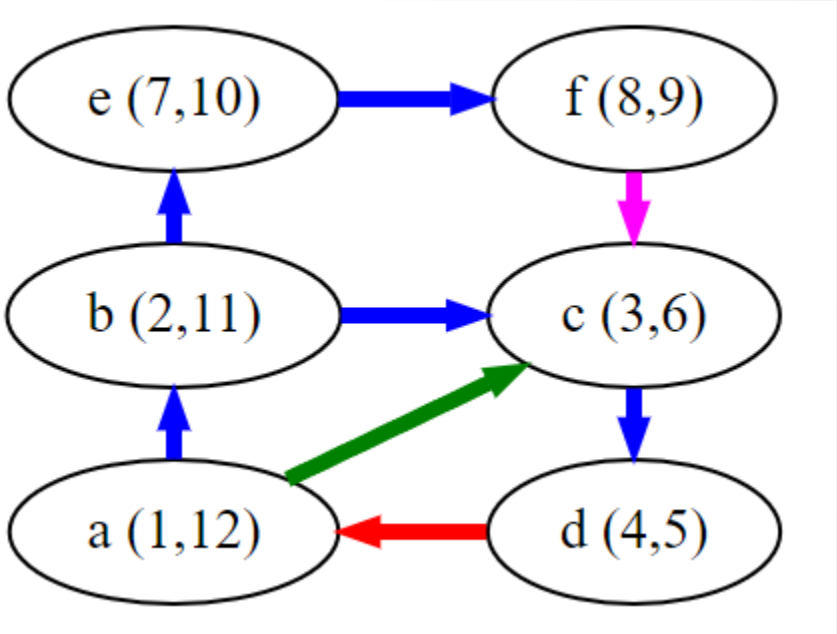
```
Time_In[u] < Time_In[v]
Time_Out[v] < Time_Out[u]
```

3) *Обратная*

```
Time_In[u] > Time_In[v]
Time_Out[v] > Time_Out[u]
```

4) *Поперечная:*

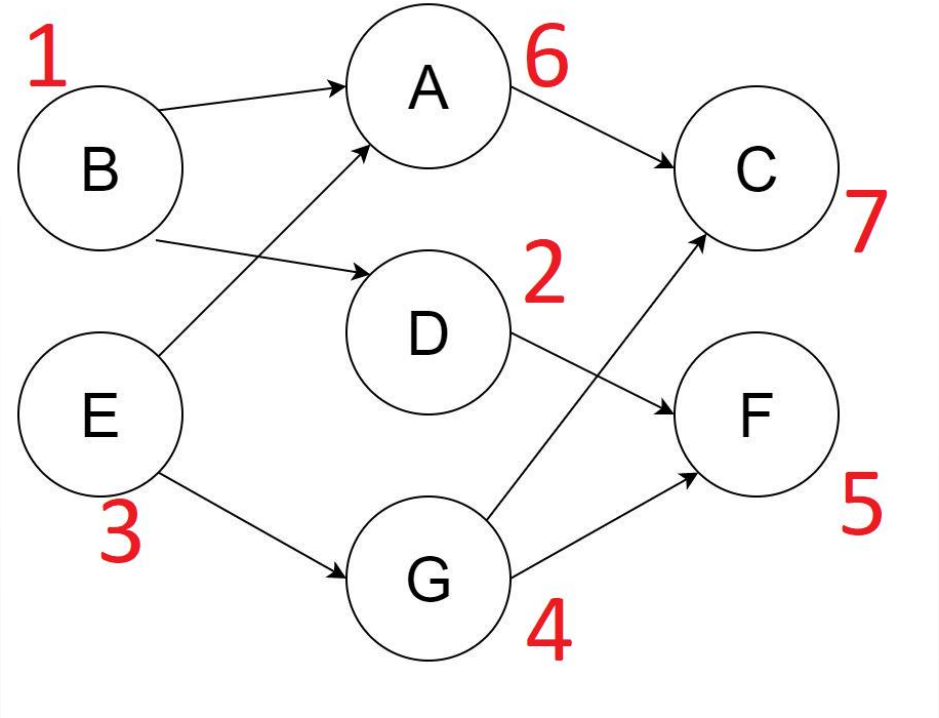
```
Time_Out[v] < Time_In[u]
```



# Топологическая сортировка

Пусть G(V,E) – ориентированный граф.

***Топологической сортировкой*** (правильной нумерацией) называется нумерация вершин $\tau: V \to \{1, \dots, |V|\}$, при которой каждая дуга ведёт из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером: $\forall (u, v) \in E\ \tau(u) < \tau(v)$.

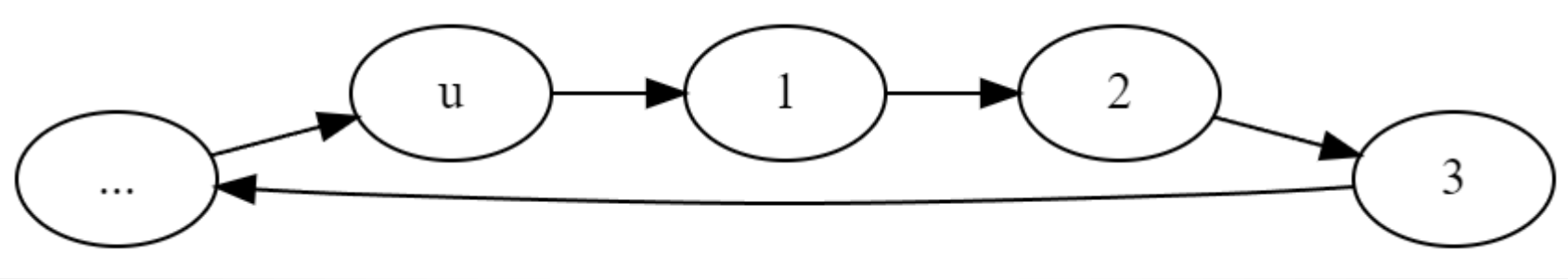


# Топологическая сортировка

**Теорема**. Для графа G существует топологическая сортировка ⇔ граф является *бесконтурным*.

Доказательство.

⇒ От противного: пусть граф не является бесконтурным. Тогда вершины, лежащие на контуре, невозможно пронумеровать правильным образом.



# Топологическая сортировка

⇐ Пусть G(V,E) – бесконтурный граф. Покажем, как для него можно построить топологическую сортировку.

Утверждение. В каждом бесконтурном графе есть как минимум один источник и как минимум один сток.

Алгоритм топологической сортировки:

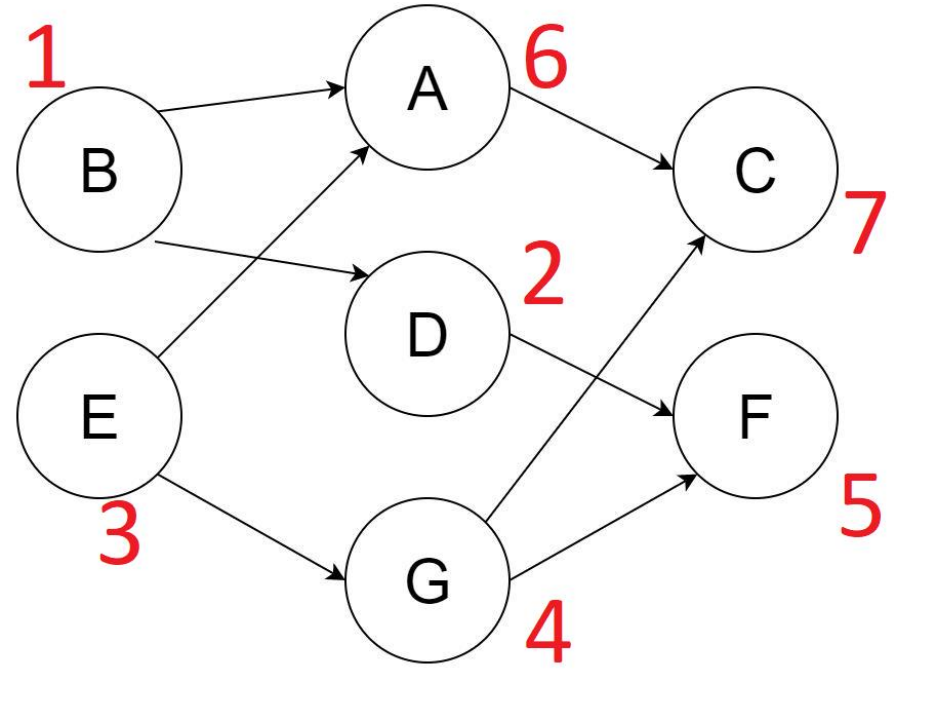
1. Создаём счётчик, инициализируем значением 1.
2. Пока $|V| > 0$
   - Находим источник и присваиваем ему очередной номер.
   - Удаляем этот источник из графа.

# Топологическая сортировка

Полученная нумерация является топологической сортировкой.

1) Все вершины пронумерованы (т.к. после удаления каждой вершины граф остаётся бесконтурным).

2) Все дуги ведут из вершин с меньшим номером в вершину с большим номером.

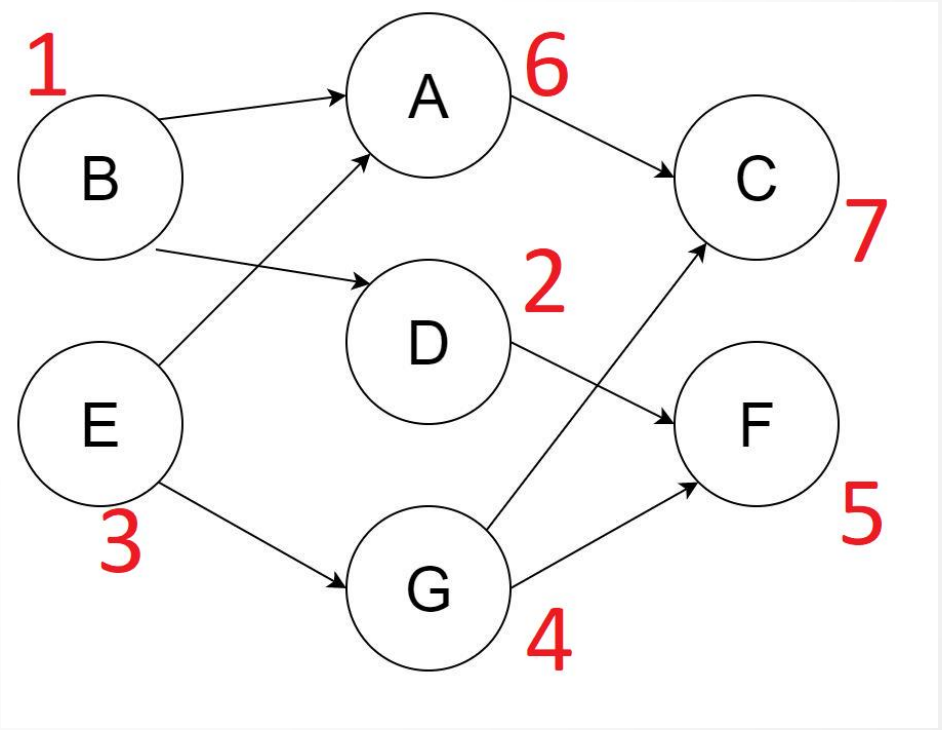


# Топологическая сортировка

Для построения топологической сортировки можно использовать и обход графа в глубину.

1. Заводим счётчик «топологических номеров». Инициализируем количеством вершин ($n = |V|$).
2. Обходим граф в глубину. Перед выходом из вершины присваиваем ей очередной «топологический номер», счётчик уменьшаем на 1.

Сложность построения топологической сортировки: $O(n + m)$.



# Топологическая сортировка

```
DFS_TopSort(G)
For each v ∈ V:
    State[v] := 'unvisited';
    Pred[v] := NULL;
    Time_In[v] := NULL;
    Time_Out[v] := NULL;
    TopNum[v] := NULL;
CurTime : = 0;
CurTopNum : = n;
For each v ∈ V:
    If State[v] = 'unvisited'
        DFS_TopSort_Visit(v);
```

# Топологическая сортировка

```
DFS_TopSort_Visit(v)
State[v] := 'visited';
CurTime := CurTime + 1;
Time_In[v] := CurTime;
For each u in Adj(v)
    If State[u] = 'unvisited'
        Pred[u] := v;
        DFS_Visit(u);
State[v] := 'processed';
CurTime := CurTime + 1;
Time_Out[v] := CurTime;
TopNum[v] := CurTopNum;
CurTopNum := CurTopNum - 1;
```

# Практические задачи

# Практические задачи

**Задача «Алфавит Нитал»**

В языке народа Нитал используются буквы латинского алфавита. До наших дней дошел документ, в котором есть глоссарий. Очевидно, что слова в нем расположены по алфавиту, но никто не знает порядка букв в алфавите, использовавшемся народом Нитал.

Требуется написать программу, которая по глоссарию сможет восстановить порядок букв в алфавите народа Нитал.

# Практические задачи

**Формат входных данных**

В первой строке число N - количество слов в глоссарии. В каждой следующей одно слово.

**Формат выходных данных**

Одна строка, содержащая буквы языка Нитал в алфавитном порядке и без пробелов. В этой строке должны содержаться все буквы, которые входили в слова глоссария.

# Практические задачи

**Задача «Алфавит Нитал»**

**Пример**

| input.txt | output.txt |
|---|---|
| 3<br>WXX<br>WYX<br>XW | WXY |