1 Метод Пуанкаре

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^3 \tag{1}$$

Начальные условия имеют вид:

$$x(0) = A,\ \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

Будем искать решение в виде:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ... \tag{3}$$

Подставим (3) в (1) и выпишем множители при различных степеных ε:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 :&\ \ \ddot{x}_0 + x_0 = 0, && x_0(0) = A,\ \dot{x}_0(0) = 0, \\ \varepsilon^1 :&\ \ \ddot{x}_1 + x_1 = x_0^3, && x_1(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0, \\ \varepsilon^2 :&\ \ \ddot{x}_1 + x_1 = 3x_0^2 x_1, && x_2(0) = 0,\ \dot{x}_2(0) = 0, \\ ....&\ \ .... && .... \end{aligned} \tag{4}$$

Решим эти начальные задачи:

$$x_0 = A\cos t$$

Найдём x_1:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = x_0^3 = A^3\cos^3 t = \frac{A^3}{4}\left(3\cos t + \cos 3t\right) \tag{5}$$

Общее решение (5) имеет вид:

$$x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t + t(A\cos t + B\sin t) + D\cos 3t \tag{6}$$

Подставим (6) в (5):

$$2\left(-A\sin t + B\cos t\right) - 8D\cos 3t = \frac{A^3}{4}\left(3\cos t + \cos 3t\right) \tag{7}$$

Следовательно:

$$A = 0,\ B = \frac{3A^3}{8},\ D = -\frac{A^3}{32}.$$

Общее решение теперь принимает вид:

$$x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{3A^3}{8}t\sin t - \frac{A^3}{32}\cos 3t \tag{8}$$

Удовлетворим (9) начальным условиям:

$$x_1(0) = C_1 - \frac{A^3}{32},$$

следовательно

$$C_1 = \frac{A^3}{32}.$$

$$\dot{x}_1(0) = C_2 = 0$$

Окончательно получаем:

$$x_1 = \frac{3A^3}{8}t\sin t + \frac{A^3}{32}\left(\cos t - \cos 3t\right) \tag{9}$$

Итак, функция x_1 содержит вековое слагаемое $t\sin t$ и, следовательно, не является периодической. Таким образом, построение решения в виде ряда (3) приводит к тому, что периодическая функция представляется в виде ряда по непериодическим функциям. Такое представление неудобно во многих отношениях.

2 Метод Ляпунова для квазилинейных систем

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{10}$$

Перейдём к собственному времени:

$$\tau = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\tau}{\omega}\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)$$

В последней формуле τ — собственное время,

$$T = \frac{2\pi}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...}$$

— период колебаний, h_m — константы, подлежащие определению.

Найдем $\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{T}{2\pi}\frac{dx}{d\tau} = \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...}\frac{dx}{d\tau}$$

Уравнение (10) приобретает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)^2 x = \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega^2} f\left(x, \frac{\omega}{1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...}\frac{dx}{d\tau}\right)\left(1 + h_1\varepsilon + h_2\varepsilon^2 + ...\right)^2, \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку уравнение (10) не содержит время в явном виде, за начало отсчёта можно взять любой момент времени. Положим

$$\begin{cases} x(0) = A(\varepsilon), \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Решение задачи ищем в виде:

$$x = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + ... \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получаем последовательность дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} \dfrac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0, \\ \dfrac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1x_0 + \dfrac{1}{\omega^2} f\left(x_0, \omega\dfrac{dx_0}{d\tau}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{14}$$

Решение первого из уравнений (14) имеет вид:

$$x_0 = C\cos\tau, \tag{15}$$

Значение C — неизвестно и подлежит определению. Рассмотрим второе уравнение (14):

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = -2h_1C\cos\tau + \frac{1}{\omega} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right), \tag{16}$$

Правая часть (16) — периодическая функция. Для того, чтобы уравнение (16) допускало периодические решения, следует потребовать его ортогональности функциям $\sin\tau$, $\cos\tau$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[-2h_1C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right]\sin\tau d\tau = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left[-2h_1C\cos\tau + \frac{1}{\omega^2} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\right]\cos\tau d\tau = 0,$$

Или:

$$I(C) = \int\limits_0^{2\pi} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\sin\tau d\tau = 0, \tag{17}$$

$$h_1 = \frac{1}{2C\pi\omega^2} \int_0^{2\pi} f\left(C\cos\tau, -\omega C\sin\tau\right)\cos\tau d\tau \tag{18}$$

Уравнение (17) может являться тождеством, в этом случае используем (17) для установления зависимости между амплитудой колебаний и их частотой. Если (17) не имеет решений, делаем вывод об отсутствии периодических решений. Если оно имеет несколько корней, каждому их них соответствует своё периодическое решение.

После того, как найдено h_1, решение исходной задачи приобретает вид (если ограничиться первым приближением):

$$x_0 = C\cos\left(\frac{\omega t}{1 + h_1\varepsilon}\right)$$

Далее можно построить решение уравнения (16), удовлетворяющее начальному условию

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0$$

и содержащее неизвестный параметр. Построенное решение используется при решении следующего уравнения в последовательности (14). Для определения неизвестных параметров также используется условие периодичности.

3 Метод Крылова

Метод основан на одновременном разложении в ряд по малому параметру неизвестной функции $x(t)$ и квадрата искомой частоты. Рассмотрим уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{19}$$

Разлагаем в ряд неизвестную функцию:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ... \tag{20}$$

Разлагаем в ряд квадрат частоты:

$$p^2 = \omega^2 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + ... \tag{21}$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) + \varepsilon \ddot{x}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{x}_2(t) + ... + \left(p^2 - \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 p_2 - ...\right) \times \\ \times \left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + ...\right) = \\ = \varepsilon f \left[x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + ..., \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{x}_1(t) + ...\right], \end{aligned} \tag{22}$$

Соберём слагаемые при различных степенях ε:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + p^2 x_0 = 0, \\ &\ddot{x}_1 + p^2 x_1 = p_1 x_0 + f(x_0, \dot{x}_0), \\ &\ddot{x}_2 + p^2 x_2 = p_1 x_1 + p_2 x_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x=x_0,\, \dot{x}=\dot{x}_0} \dot{x}_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{23}$$

Начальные условия следующие:

$$\begin{cases} x_0(0) = A, \\ \dot{x}_0(0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

и

$$x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0,\ i > 0 \tag{25}$$

Для определения p_i используем условия ортогональности правых частей уравнений к функциям $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$