

Лабораторная работа.
Методы численного интегрирования.

Постановка задачи. Рассмотрим определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

и будем разыскивать его приближенное значение с требуемой точностью ε .

Методы решения. Для приближенного вычисления определенного интеграла используют составные квадратурные формулы. Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частей: $x_i = a + i h$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Квадратурная формула средних прямоугольников дает приближенное значение определенного интеграла по формуле

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \quad (2)$$

оценка погрешности имеет вид

$$|I - I^{sp}| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad (3)$$

Квадратурная формула трапеций дает приближенное значение определенного интеграла по формуле

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i), \quad (4)$$

оценка погрешности имеет вид

$$|I - I^{tr}| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \quad (5)$$

Квадратурная формула Симпсона дает приближенное значение определенного интеграла по формуле

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{4h}{3}(f(x_1) + f(x_3) + \dots) + \frac{2h}{3}(f(x_2) + f(x_4) + \dots) \quad (6)$$

оценка погрешности имеет вид

$$|I - I^{si}| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)| \quad (7)$$

Правило Рунге расчета интеграла с требуемой точностью позволяет подобрать число точек разбиения так, чтобы приближенное значение определенного интеграла было найдено с требуемой точностью

$$|I^n - I^{2n}| < \text{const } \varepsilon \quad (8)$$

где $\text{const} = \frac{1}{3}$ для формул прямоугольников, $\text{const} = \frac{1}{16}$ для формулы Симпсона.

Методические указания

- Выберите определенный интеграл для отладки программы.

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = -\cos(\pi/2) + \cos(0) = 1 \quad (9)$$

- Задайте подинтегральную функцию, пределы интегрирования и точность

```
> restart;  
> f:=(x)->sin(x);  
> a:=0; b:=Pi/2; eps:=0.0001;
```

- Составьте процедуру для составной квадратурной формулы. Параметрами являются пределы интегрирования a , b и число точек разбиения n .
- Составьте процедуру для расчета интеграла с требуемой точностью по правилу Рунге. Параметрами являются a , b , $n0$ и точность ε . Результатом процедуры является приближенное значение интеграла, число точек разбиения n и код завершения (0 - нормально, 1 - ошибка).
- Вычислите значение интеграла и величину отклонения от точного значения по модулю.
- Для сравнения найдите число разбиений n из оценки погрешности квадратурной формулы.
- Сохраните результаты работы для тестового примера в личной папке под именем ИНТЕГРИРОВАНИЕ(ТЕСТ).MWS, для индивидуального задания — ИНТЕГРИРОВАНИЕ(ИНД).MWS.
- Оформите отчет, который включает: текст задания, описание квадратурных формул, код с результатами для теста и индивидуального примера.