Алгоритмы на графах

Модуль 3. Потоки в сетях и паросочетания.

Лекция 12.

Нахождение максимального потока.

Адигеев Михаил Георгиевич

2022

План лекции

1. Леммы о свойствах потоков и разрезов.
2. Увеличивающая цепь.
3. Критерий оптимальности потока в терминах увеличивающей цепи.
4. Теорема и алгоритм Форда-Фалкерсона.

Определения

Пусть $S \subseteq V$ – подмножество вершин, содержащее источник s.

Обозначим $T = V \backslash S$ – подмножество, содержащее сток t.

Разрез (S, T) – множество дуг $e = (u, v): u \in S, v \in T$.

Аналогично: (T, S) – множество дуг $e = (u, v): u \in T, v \in S$.

Обозначим: $f(X, Y) = \sum_{e \in (X,Y)} f(e)$.

Леммы

Лемма 1. Для любого потока f и любого разреза (S,T) справедливо: $\hat{f} = f(S,T) - f(T,S)$.

Доказательство.

Рассмотрим величину

$$\Delta = \sum_{v \in T} \left(\sum_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) \right)$$

Эту величину можно рассчитать двумя способами.

Леммы

$$\Delta = \sum_{v \in T} \left(\sum_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) \right)$$

1) $\Delta = \hat{f}$.

Это следует из того, что величина в скобках $\sum_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e)$ в силу условия баланса равна нулю для всех вершин кроме t. А для t она равна величине потока.

2) Рассмотрим, как входит в Δ величина $f(e)$ для разных дуг $e = (u, v)$.

Если $u, v \in T$, то $f(e)$ входит в Δ один раз с плюсом и один раз с минусом. Поэтому такие дуги вносят лишь 0 в итоговую величину Δ.

Леммы

$$\Delta = \sum_{v \in T} \left(\sum_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) \right)$$

Если $u, v \in S$, то $f(e)$ вообще не входит в Δ, поэтому такие дуги тоже вносят 0 в итоговую величину Δ.

Если $u \in S, v \in T$, то $f(e)$ входит в Δ с плюсом. Поэтому сумма $f(e)$ по таким дугам даёт $f(S,T)$.

Если $u \in T, v \in S$, то $f(e)$ входит в Δ с минусом. Поэтому сумма $f(e)$ по таким дугам даёт $-f(T,S)$.

Итого: $\Delta = f(S,T) - f(T,S)$.

Леммы

Введём обозначение: $c(S,T) = \sum_{e \in (S,T)} c(e)$.

<u>Лемма 2</u>. Для любого потока f и любого разреза (S,T) справедливо: $\hat{f} \leq c(S,T)$.

Доказательство.

По лемме 1 справедливо $\hat{f} = f(S,T) - f(T,S)$.

Из определения потока следует, что $0 \leq f(e) \leq c(e)$.

Поэтому: $\hat{f} = f(S,T) - f(T,S) \leq c(S,T) - 0 = c(S,T)$.

Леммы

<u>**Лемма 3**</u>. Если для потока f и разреза (S, T) выполняется равенство $\hat{f} = c(S, T)$, то поток f является максимальным, а разрез (S, T) является минимальным.

Доказательство.

Непосредственно следует из леммы 2.

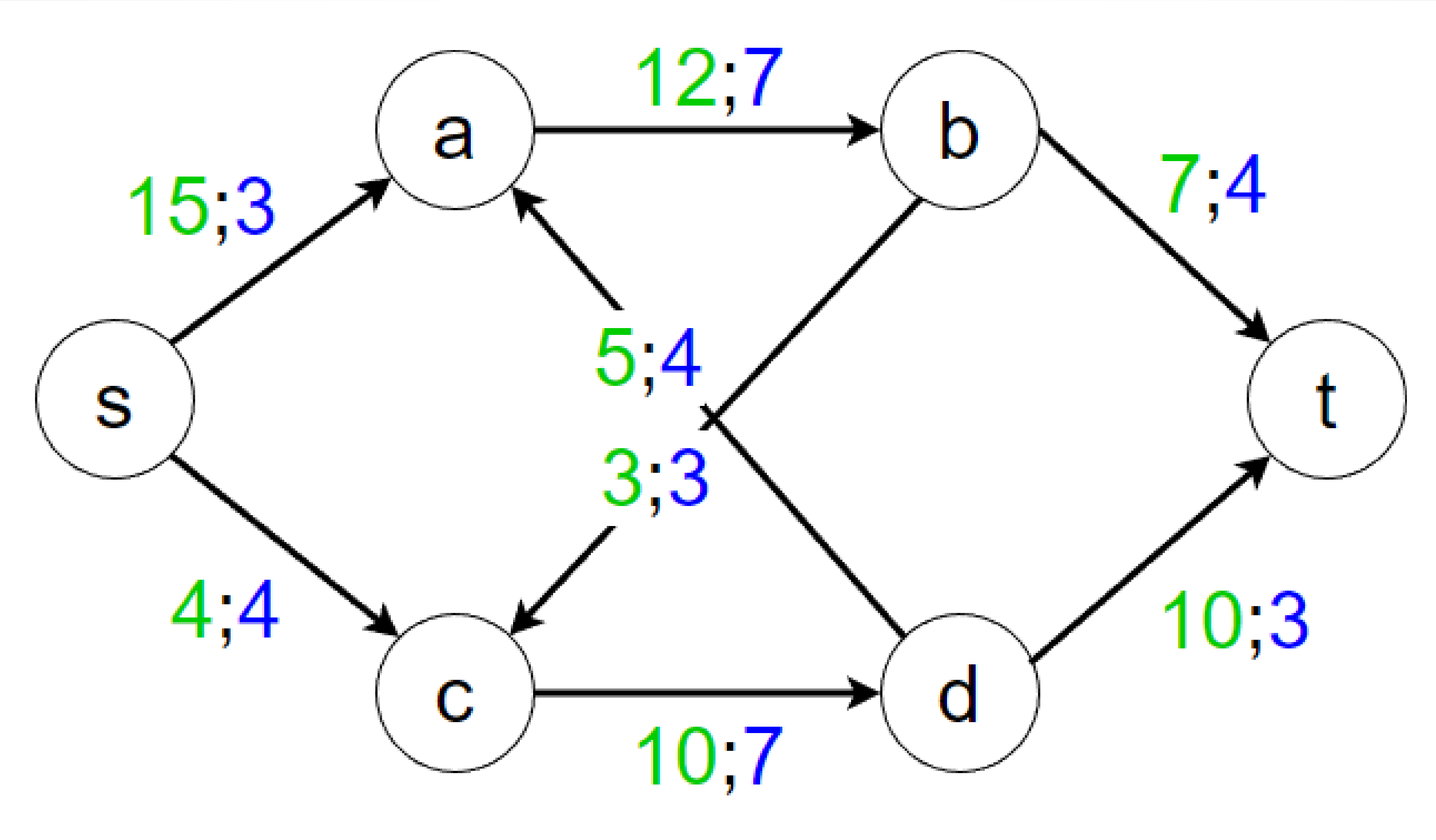
Леммы

Пусть на графе $G(V, E)$ с заданной пропускной способностью $c: E \to R_+$ и потоком $f: E \to R_+$. Введём ещё одно понятие.

Увеличивающей цепью π будем называть цепь, соединяющую вершины s и t, и удовлетворяющую условиям:

- Если цепь π проходит по дуге e в прямом направлении, то $f(e) < c(e)$.
- Если цепь π проходит по дуге e в обратном направлении, то $f(e) > 0$.

Леммы



Леммы

<u>Лемма 4</u>. Поток f является максимальным $\Leftrightarrow$ на графе нет увеличивающей цепи.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть поток f является максимальным. И предположим, что для f существует увеличивающая цепь π. Пройдём по этой цепи и вычислим величину $\delta = \min\limits_{e \in \pi} \Delta(e)$, где

$$\Delta(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) > 0, \text{если } \pi \text{ проходит по ориентации } e, \\ f(e) > 0, \text{если } \pi \text{ проходит против ориентации } e. \end{cases}$$

Очевидно, что $\delta > 0$.

Леммы

Построим новый поток f' по следующему правилу:

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \delta, \text{если } \pi \text{ проходит по ориентации } e, \\ f(e) - \delta, \text{если } \pi \text{ проходит против ориентации } e, \\ f(e), \text{если } \pi \text{ не проходит через } e. \end{cases}$$

По построению, f' удовлетворяет условиям потока. При этом,

$\widehat{f'} = \hat{f} + \delta$. Отсюда следует, что поток f не максимален. Получили противоречие.

Леммы

$\Leftarrow$. Предположим, что для потока f на графе нет увеличивающей цепи (из s в t).

Определим множество $S \subset V$ как множество вершин, для которых существует увеличивающая цепь из s, и обозначим $T = V \backslash S$. Очевидно, что $s \in S, t \in T$.

Тогда для любой дуги $e = (u, v)$, у которой концы лежат в разных подмножествах, справедливо:

- если $e \in (S, T)$, то дуга ***насыщена***, т.е. $f(e) = c(e)$,
- если $e \in (T, S)$, то дуга ***не нагружена***, т.е. $f(e) = 0$

(иначе оба конца дуги принадлежали бы S).

Леммы

Отсюда следует, что: $f(S,T) = c(S,T)$, $f(T,S) = 0$.

Поэтому $c(S,T) = \hat{f}$, и по лемме 3 поток f максимален.

Лемма доказана.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

Теорема (Форда-Фалкерсона). Максимальный поток равен пропускной способности минимального разреза: $\max_f \hat{f} = \min_{(S,T)} c(S,T)$.

Доказательство.

В силу леммы 3, для доказательства теоремы достаточно показать, что можно построить поток f и разрез (S,T), такие, что $\hat{f} = c(S,T)$.

Рассмотрим алгоритм Форда-Фалкерсона, который строит поток с помощью процедуры, описанной в доказательстве леммы 4.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

1. Инициализация: присвоить потоку f допустимое значение, например: $f(e) \equiv 0$.

2. $S \coloneqq \{s\}$. // Множество *помеченных* вершин.

   $\delta \coloneqq +\infty;$

   Для всех $v \in V$ выполнить: $p[v] \coloneqq NULL$.

3. Пока $t \notin S$ и есть дуга $e = (u, v)$, удовлетворяющая одному из условий:

   a) $u \in S, v \notin S, f(e) < c(e)$.

   b) $u \notin S, v \in S, f(e) > 0$.

   Добавить в S ещё не помеченный конец дуги e:

   a) $S \coloneqq S \cup \{v\}, p[v] \coloneqq u, \delta \coloneqq \min\{\delta, c(e) - f(e)\};$

   b) $S \coloneqq S \cup \{u\}, p[u] \coloneqq v, \delta \coloneqq \min\{\delta, f(e)\};$

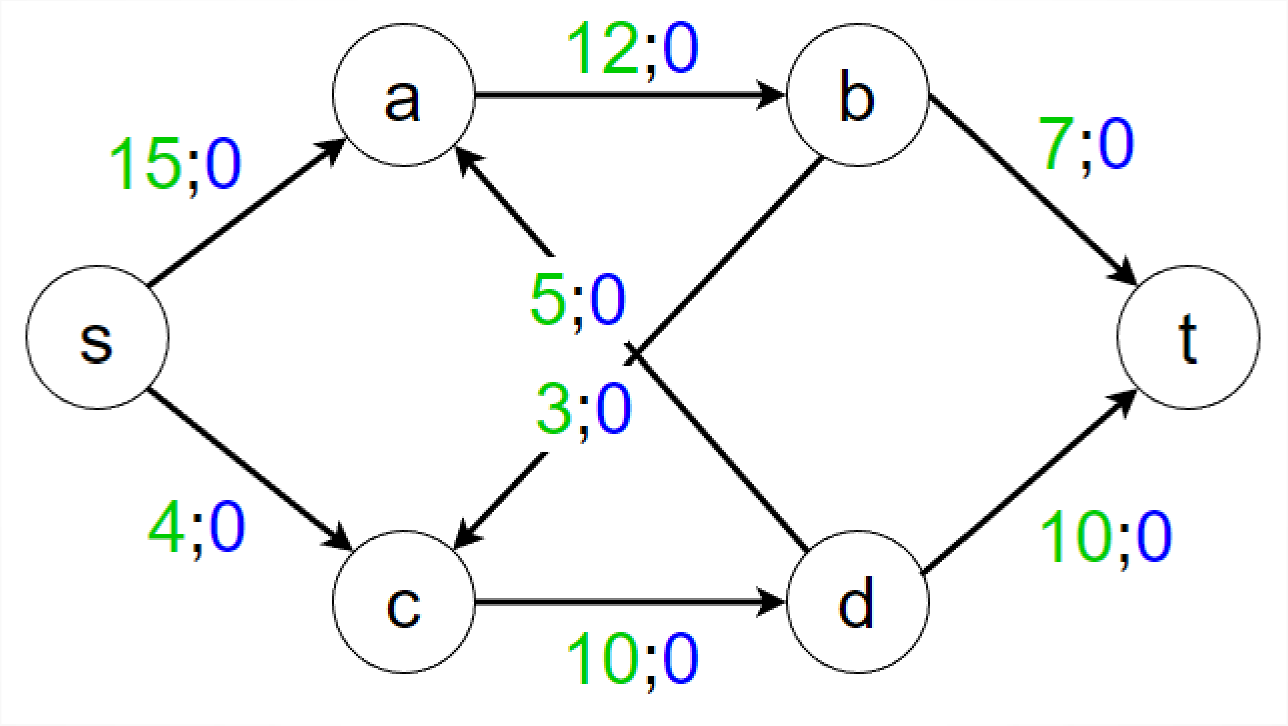
Алгоритм Форда-Фалкерсона

4. Если $t \notin S$, то для текущего потока f не существует увеличивающей цепи. Следовательно, f является максимальным потоком. Остановить алгоритм и вернуть f.

   Если $t \in S$, то по указателям $p[]$ мы можем восстановить увеличивающую цепь и с её помощью построить (см. доказательство леммы 4) новый поток величины на δ больше текущего. В этом случае возвращаемся к шагу 2.

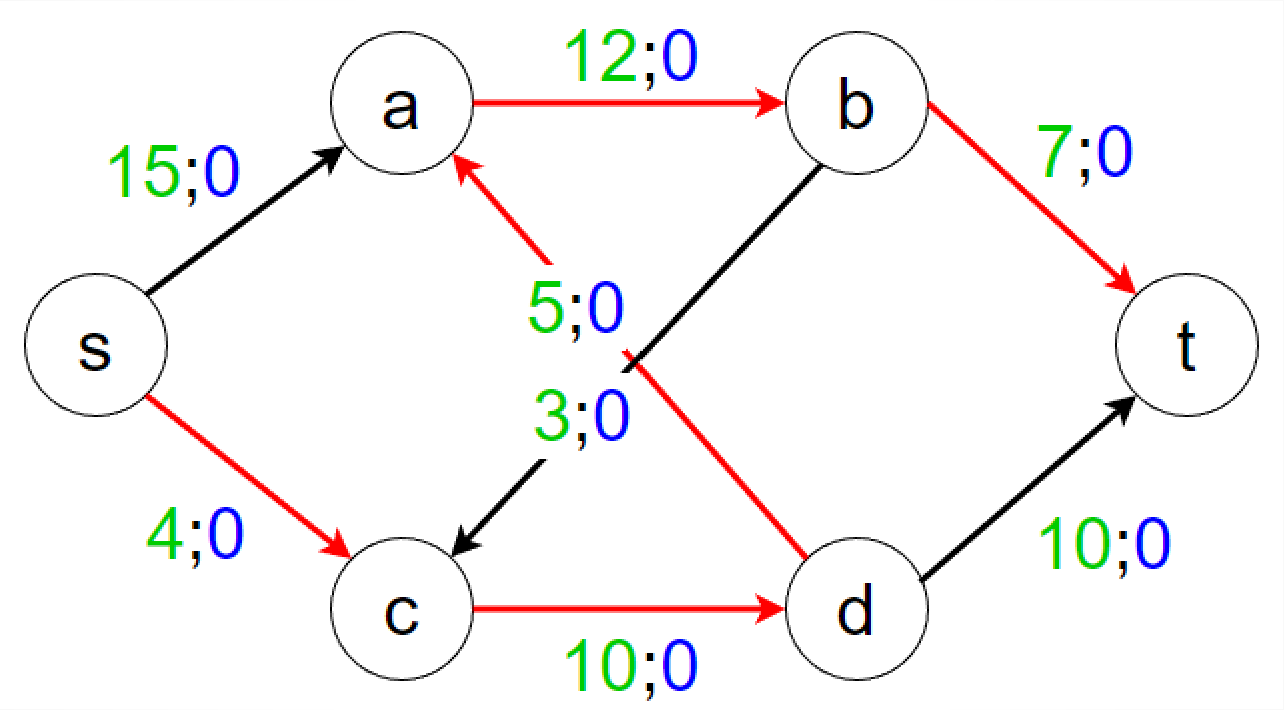
Теорема доказана.

Алгоритм Форда-Фалкерсона



Строим увеличивающую цепь: $s \to c \to d \to a \to b \to t$.

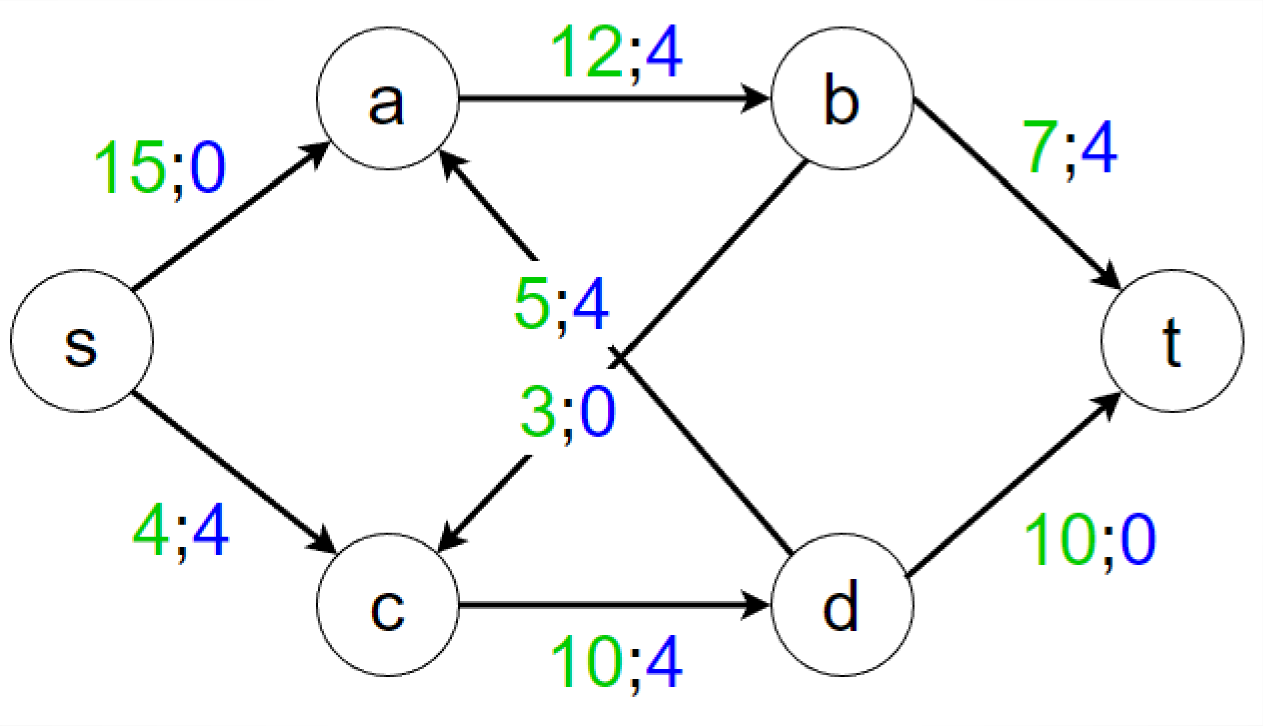
Алгоритм Форда-Фалкерсона



$$\delta = \min\{4,10,5,12,7\} = 4$$

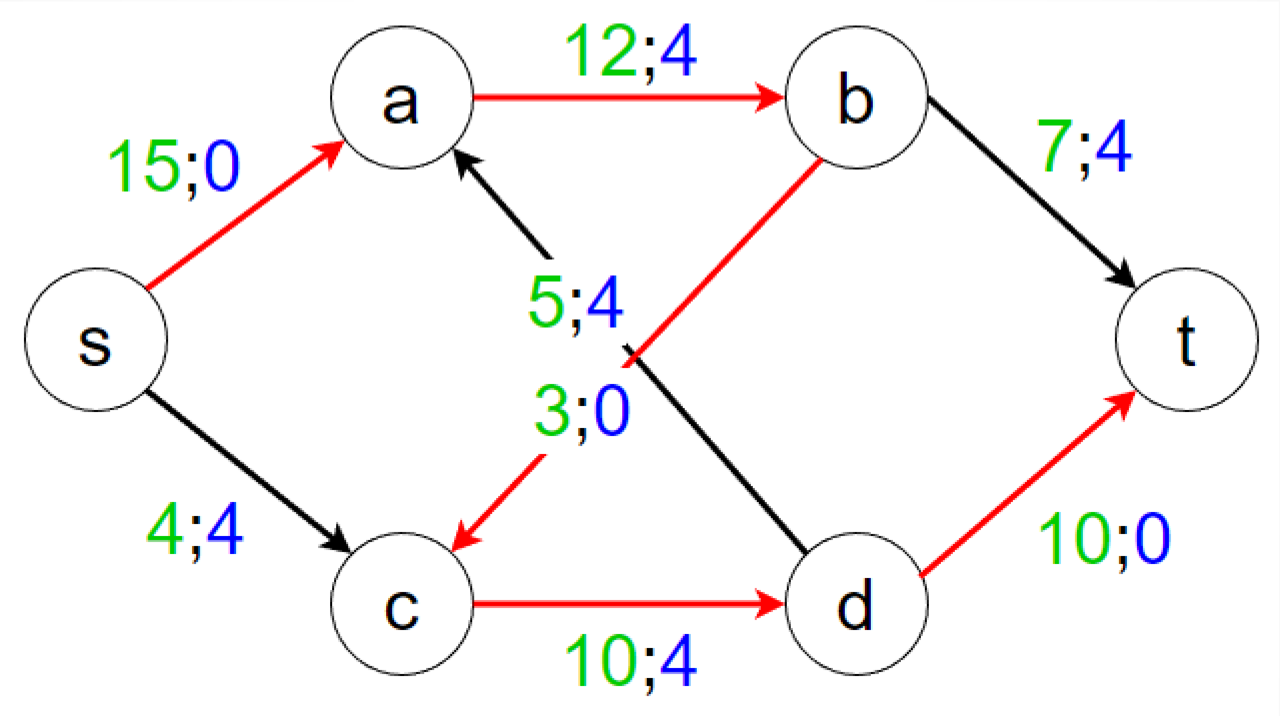
Увеличиваем поток:

Алгоритм Форда-Фалкерсона



Строим увеличивающую цепь: $s \to a \to b \to c \to d \to t$.

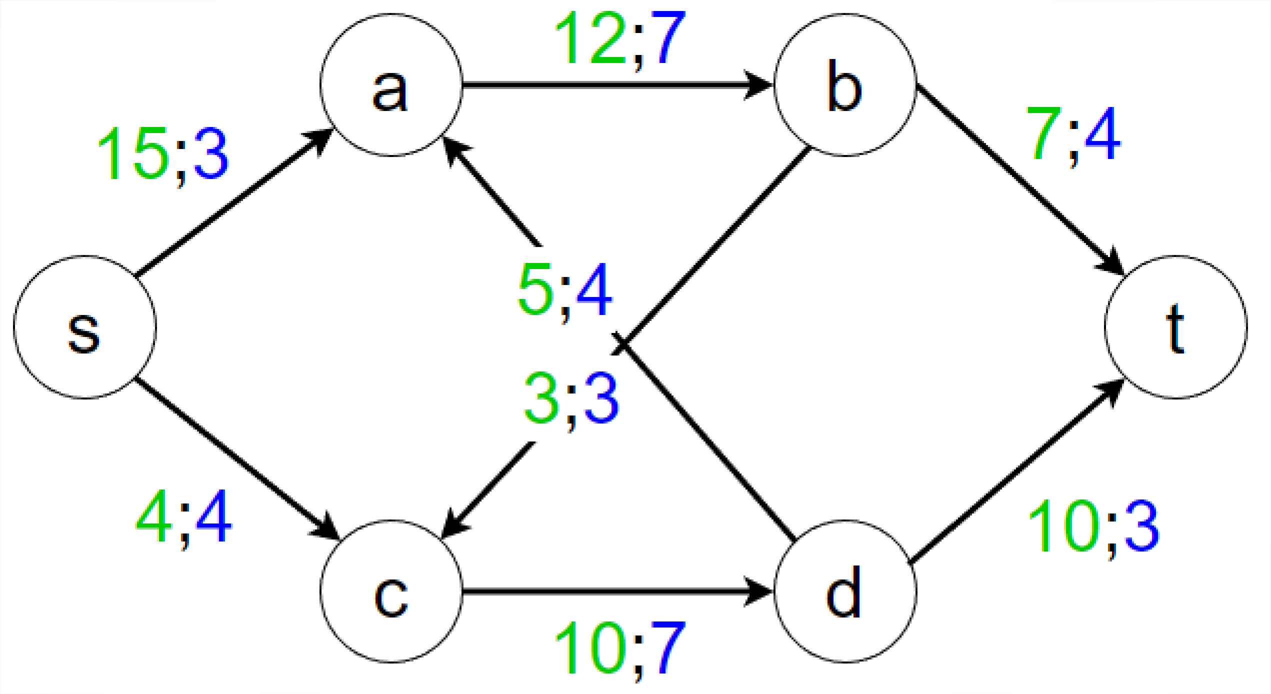
Алгоритм Форда-Фалкерсона



$$\delta = \min\{15,8,3,6,10\} = 3$$

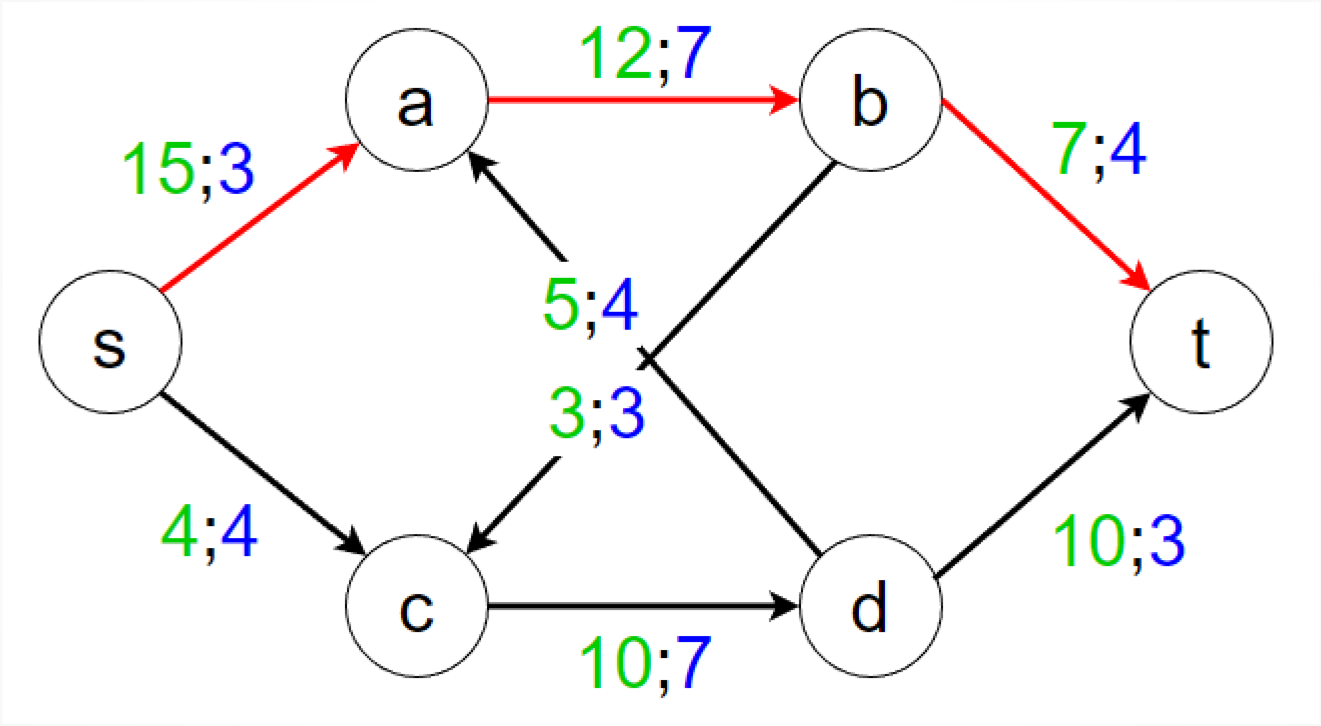
Увеличиваем поток:

Алгоритм Форда-Фалкерсона



Строим увеличивающую цепь: $s \to a \to b \to t$.

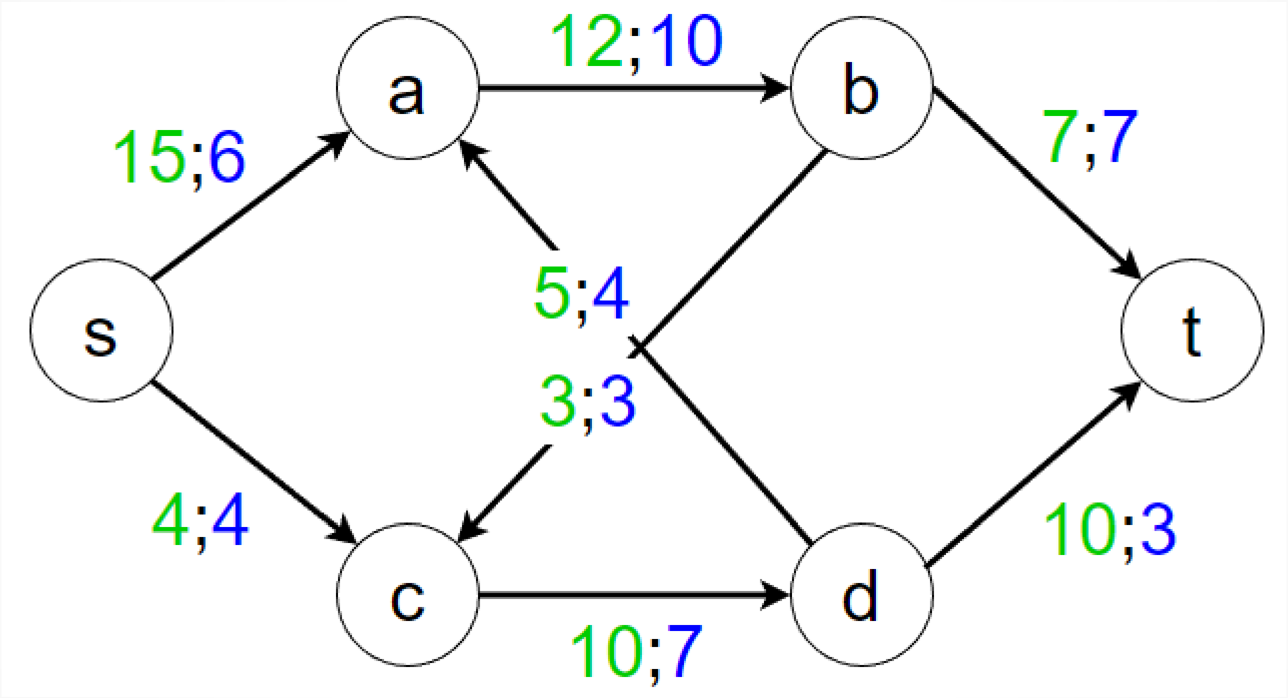
Алгоритм Форда-Фалкерсона



$$\delta = \min\{12,5,3\} = 3$$

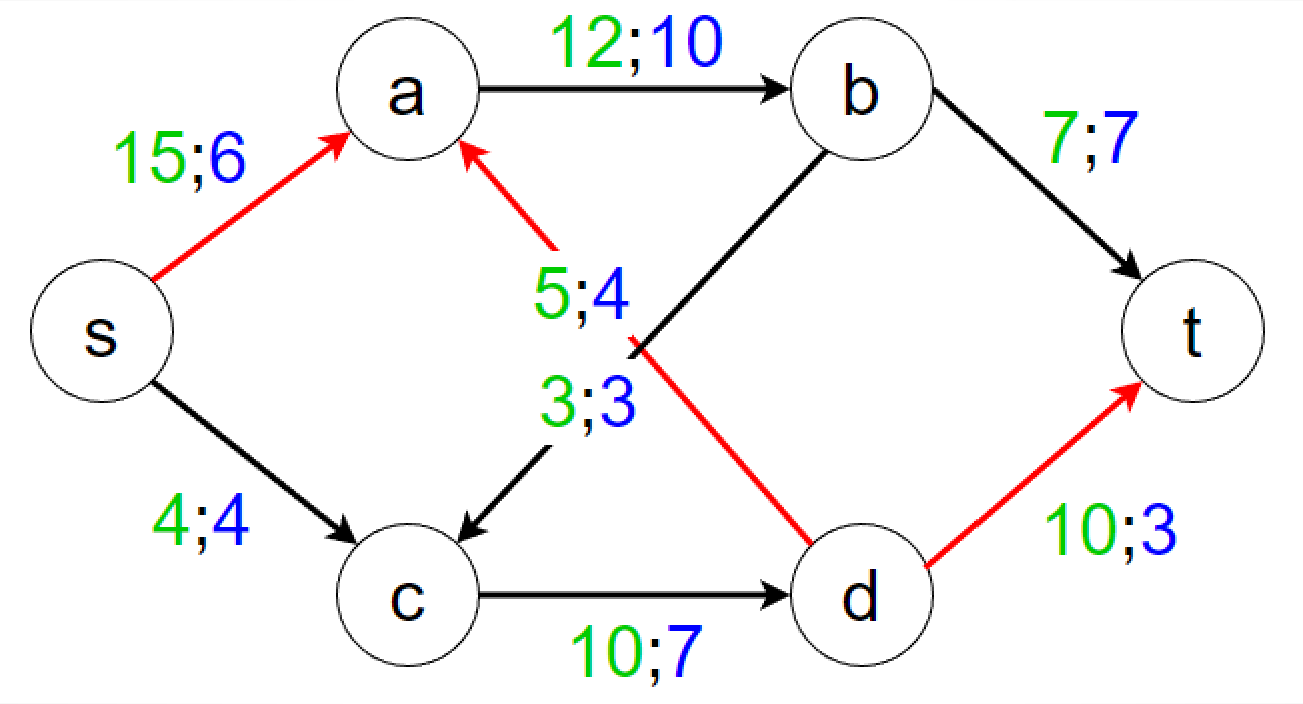
Увеличиваем поток:

Алгоритм Форда-Фалкерсона



Строим увеличивающую цепь: $s \to a \to d \to t$.

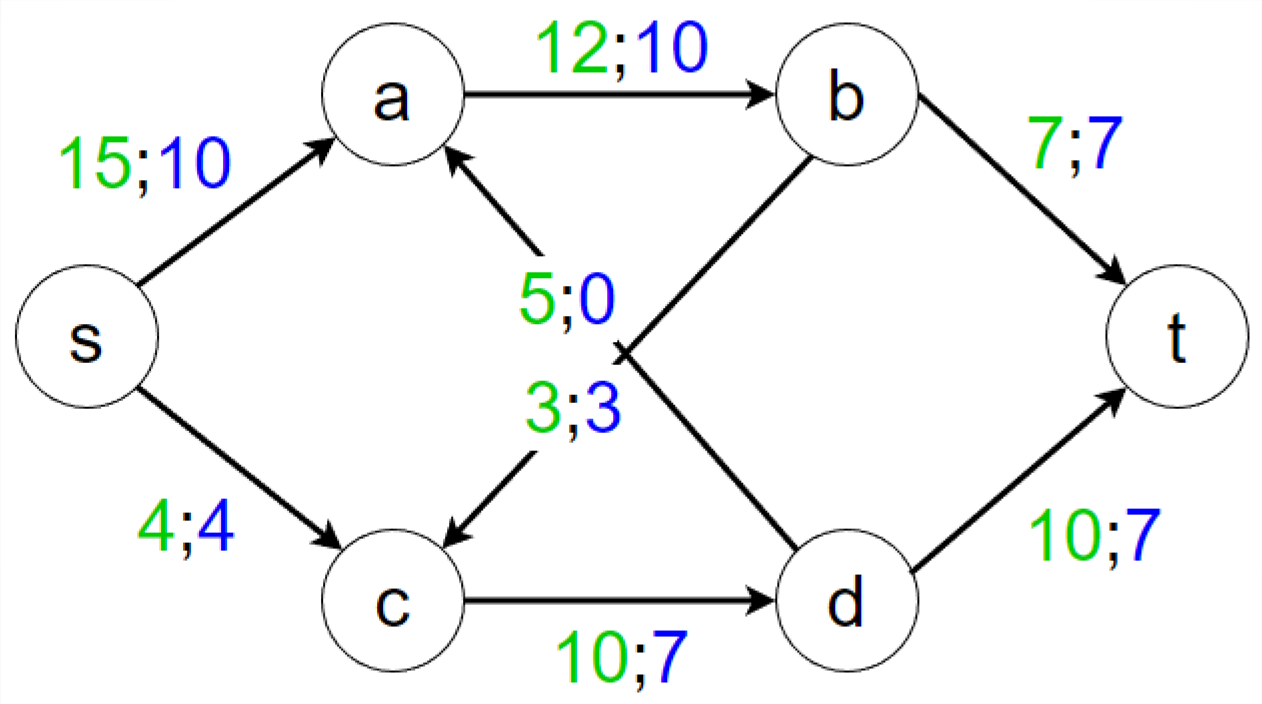
Алгоритм Форда-Фалкерсона



$$\delta = \min\{9,4,7\} = 4$$

Увеличиваем поток:

Алгоритм Форда-Фалкерсона



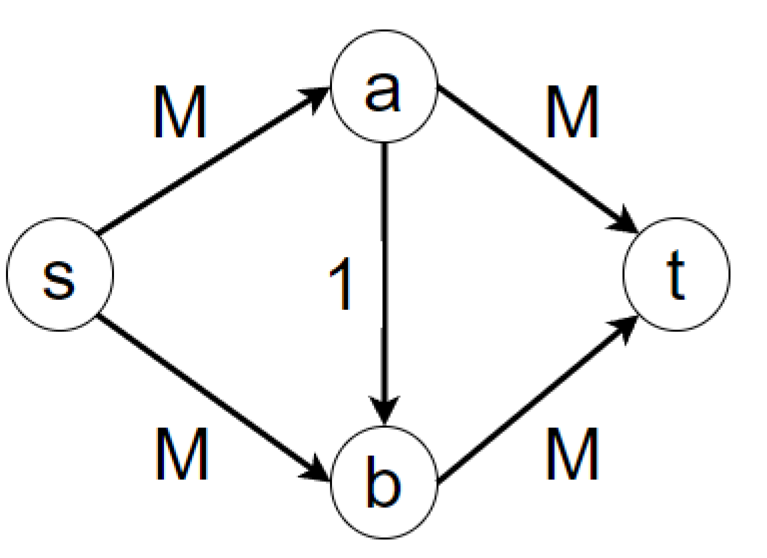
Увеличивающей цепи нет. $S = \{s, a, b\}$.

Текущий поток оптимален. $\hat{f} = 14$.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

Есть ли гарантия, что для любых входных данных (G, c) алгоритм Форда-Фалкерсона останавливается?

- Если допускаются ***иррациональные*** пропускные способности, то алгоритм может зацикливаться.
- В вычислительной практике можно считать, что все величины являются рациональными. В этом случае алгоритм гарантированно останавливается (почему?). Но может тратить на это слишком много времени.



Алгоритм Форда-Фалкерсона

Существуют усовершенствованные версии алгоритма, гарантированно завершающие работу за полиномиальное время:

- Алгоритм Эдмондса-Карпа: при пометке вершин использовать поиск в ширину и выбирать увеличивающую цепь минимальной длины. Сложность: $O(n^3m)$.
- Алгоритм Диница: $O(n^2m)$.
- Алгоритм Карзанова (усовершенствование алгоритма Диница): $O(n^3)$.
- Алгоритм Черкасского: $O(n^2m^{\frac{1}{2}})$

Задание 6

Задание 6

Задача «Максимальный поток».
Для заданного графа с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найти максимальный поток.

Формат входных данных

В первой строке указан список вершин, разделённых пробелами. Первая указанная в списке вершина является источником, последняя – стоком.
Далее следуют строки, представляющие дуги графа (одна строка описывает одну дугу). Каждая строка содержит разделённые пробелами: имя начальной вершин, имя конечной вершины, пропускную способность дуги (число с 2 знаками после запятой).

Формат выходных данных

Первая строка содержит величину максимального потока, представленную в виде числа с 2 знаками после запятой.
Последующие строки описывают поток по дугам в таком же формате, как во входном файле, но вместо пропускной способности указан поток.

Задание 6

Пример

input.txt	output.txt
s a b c d t	14.00
s a 15.00	s a 10.00
a b 12.00	a b 10.00
b c 3.00	b c 3.00
c d 10.00	c d 7.00
s c 4.00	s c 4.00
d a 5.00	d a 0.00
b t 7.00	b t 7.00
d t 10.00	d t 7.00