Алгоритмы на графах

Модуль 3. Потоки в сетях и паросочетания.

Лекция 13.

Потоки и паросочетания.

Адигеев Михаил Георгиевич

2022

План лекции

1. Расширение задачи о максимальном потоке.
   - ✓ Нахождение путей, реализующих поток.
   - ✓ Несколько источников и стоков.
   - ✓ Пропускные способности вершин.
   - ✓ Потоки с ограничениями снизу и сверху.
2. Паросочетания.
   - ✓ Определение.
   - ✓ Паросочетания в двудольных графах.
   - ✓ Паросочетания в графах общего вида.

Расширения задачи о потоке

<u>Пути, реализующие поток</u>

Если пропускные способности всех дуг целочисленны, то максимальный поток тоже является целочисленным.

В этому случае может возникнуть дополнительная задача: «разложить» найденный поток в набор путей из s в t, при соблюдении ограничения: через дугу $e \in \mathrm{E}$ проходит ровно $f(e)$ путей.

Как найти такой набор путей?

Расширения задачи о потоке

По графу $G(V, E)$ и потоку f построим новый граф $G'(V, E')$:

- Множество вершин сохраним.
- Для каждой дуги $e = (u, v) \in E$ добавим в новый граф $f(e)$ кратных дуг (u, v). Если $f(e) = 0$, то на новом графе нет дуги (u, v).
- Добавим $\hat{f}$ дуг из t в s.

На графе G' для любой вершины v (включая s и t) выполняется условие: $\mathrm{indeg(v)} = outdeg(v)$. Поэтому G' является *эйлеровым* графом.

Расширения задачи о потоке

<u>Определение</u>. Цикл Z на графе $G(V,E)$ называется ***эйлеровым***, если он проходит ровно один раз по каждой дуге графа.

<u>Определение</u>. Граф называется эйлеровым, если на нём существует эйлеров цикл.

<u>Критерий эйлеровости</u>: граф $G(V,E)$ является эйлеровым $\Leftrightarrow$ для любой вершины графа полустепень захода равна полустепени исхода.

Расширения задачи о потоке

Алгоритм нахождения путей, реализующих поток.

Вход: граф $G(V, E)$, целочисленный поток $f: E \to Z_+$.

1. Построить модифицированный граф $G'(V, E')$.
2. На $G'(V, E')$ найти эйлеров цикл Z. // Этот алгоритм не рассмотрен в данном курсе.
3. Из цикла Z удалить все дуги (t, s). Цикл распадётся на $\hat{f}$ фрагментов, каждый из которых является путём из s в t.

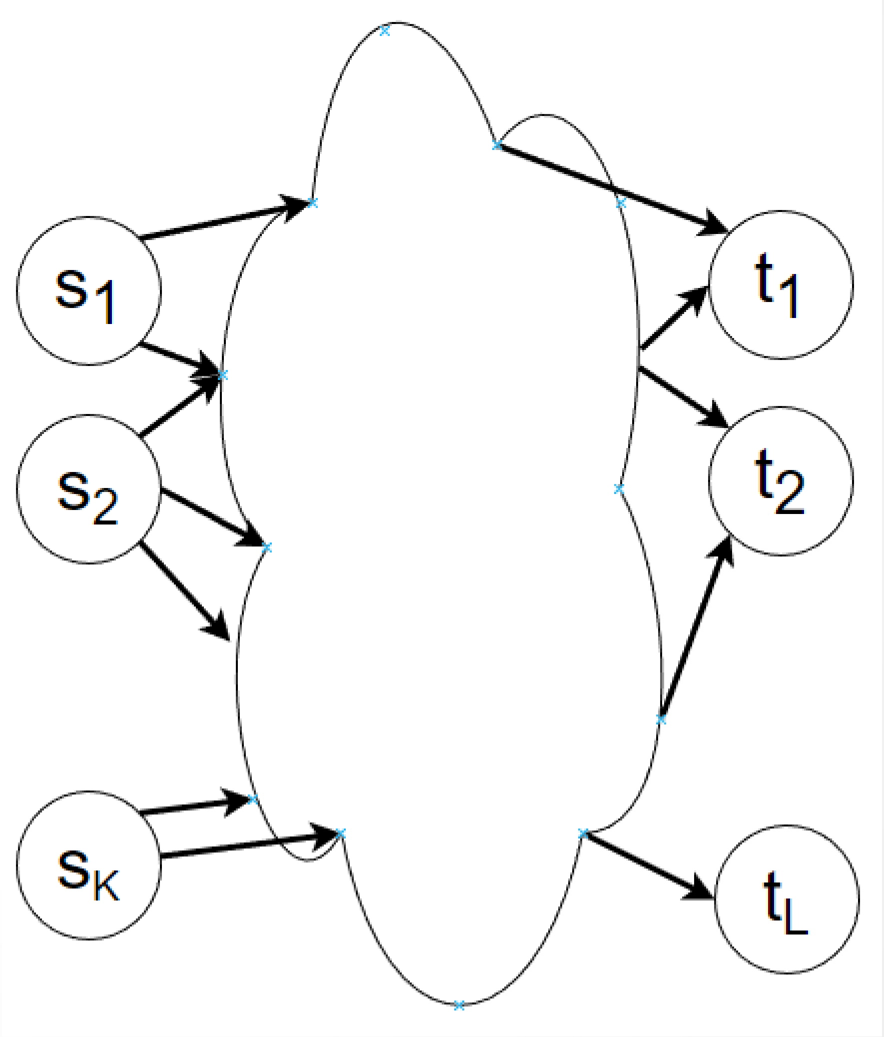
Расширения задачи о потоке

Несколько источников и стоков

Допустим, на графе есть несколько источников и/или несколько стоков.

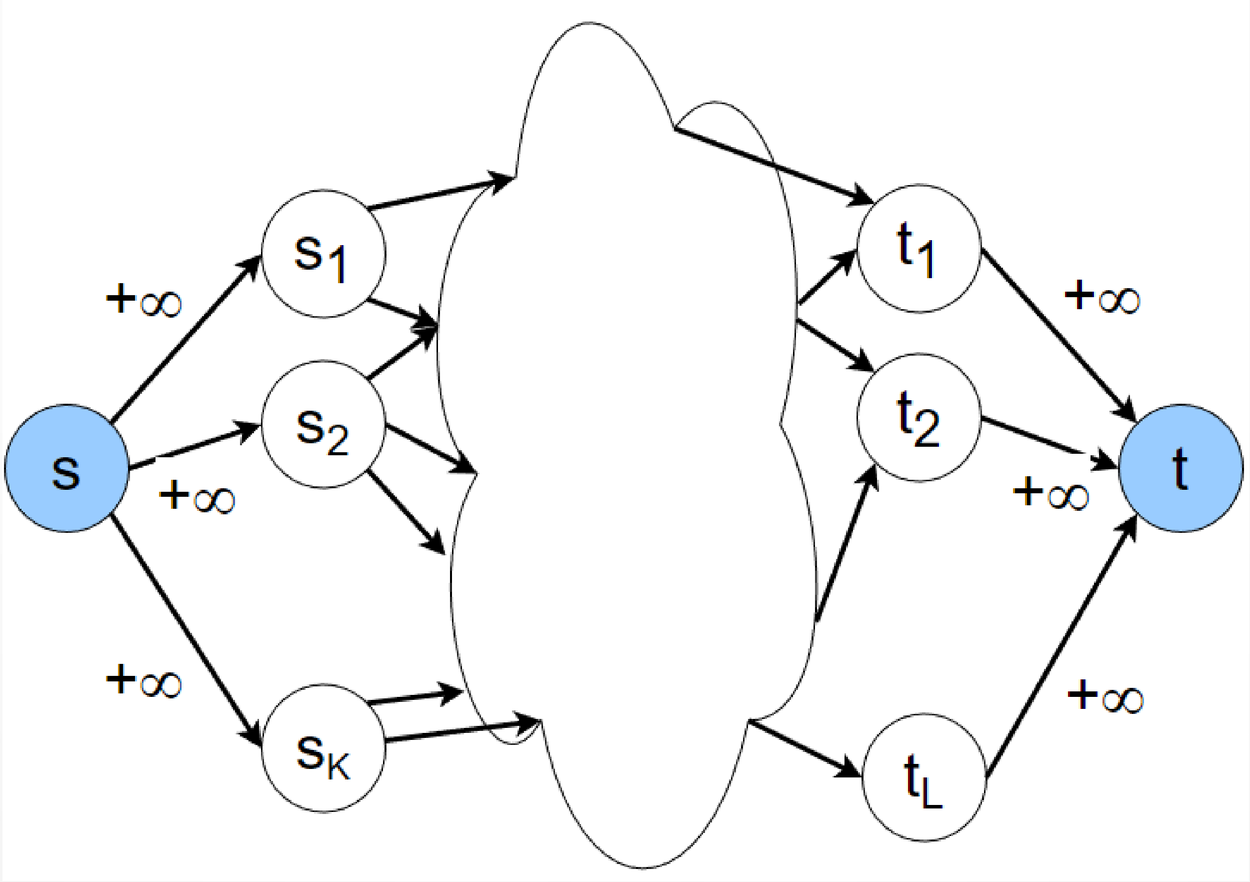
В остальном задача такая же.

Как найти максимальный поток?



Расширения задачи о потоке

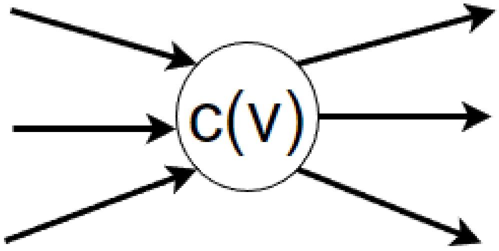
Добавим новые вершины – источник и сток, и соединим их со старыми источниками и стоками дугами с бесконечной пропускной способностью.



Расширения задачи о потоке

Пропускные способности вершин

Допустим, кроме ограничений на поток через дугу есть также ограничения на поток, проходящий через вершину.



Ограничение на поток:

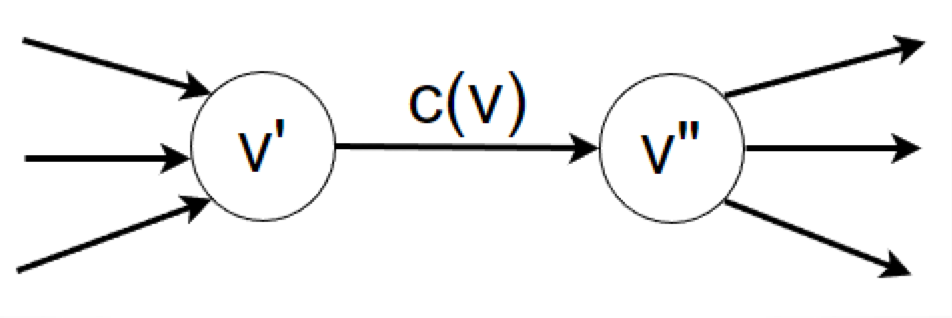
$$0 \le \sum_{e \in \alpha(v)} f(e) = \sum_{e \in \beta(v)} f(e) \le c(v)$$

Как найти максимальный поток при таких ограничениях?

Расширения задачи о потоке

Модифицируем граф: разделим каждую вершину v на две вершины, v' и v“:

- Все дуги, входившие в v, теперь входят в v'.
- Все дуги, исходившие из v, теперь исходят из v“.
- Из v' в v" ведёт дуга с пропускной способностью $c(v)$.



На модифицированном графе надо найти максимальный поток. Сужение потока на «старые» дуги даёт максимальный поток для исходной задачи.

Расширения задачи о потоке

Потоки с ограничениями снизу и сверху

Допустим, на величину потока даны ограничения не только сверху, но и снизу: для любой дуги $e \in E$ должно выполняться $b(\mathrm{e}) \leq f(e) \leq c(e), b: E \to R_+$.

Условие баланса сохраняется в прежнем виде.

Задача: найти максимальный поток.

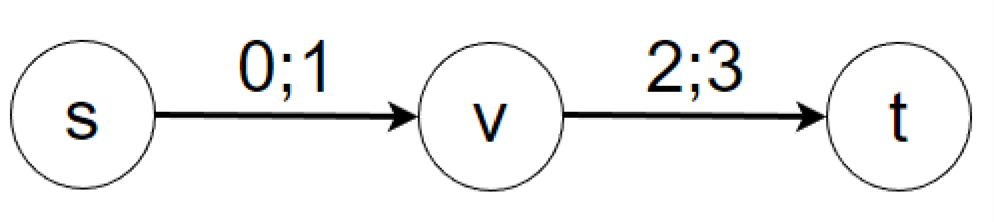
Для решения задачи можно применить модифицированный вариант алгоритма Форда-Фалкерсона, но возникает новая нетривиальная подзадача: ***найти допустимый начальный поток***.

Расширения задачи о потоке

Подзадача: ***найти допустимый начальный поток***.

Не для всех начальных данных существует допустимый поток.

Например:



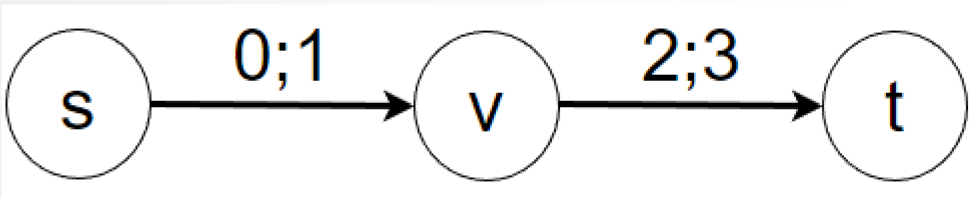
Для нахождения допустимого начального потока применим классический алгоритм Форда-Фалкерсона, но для изменённой сети.

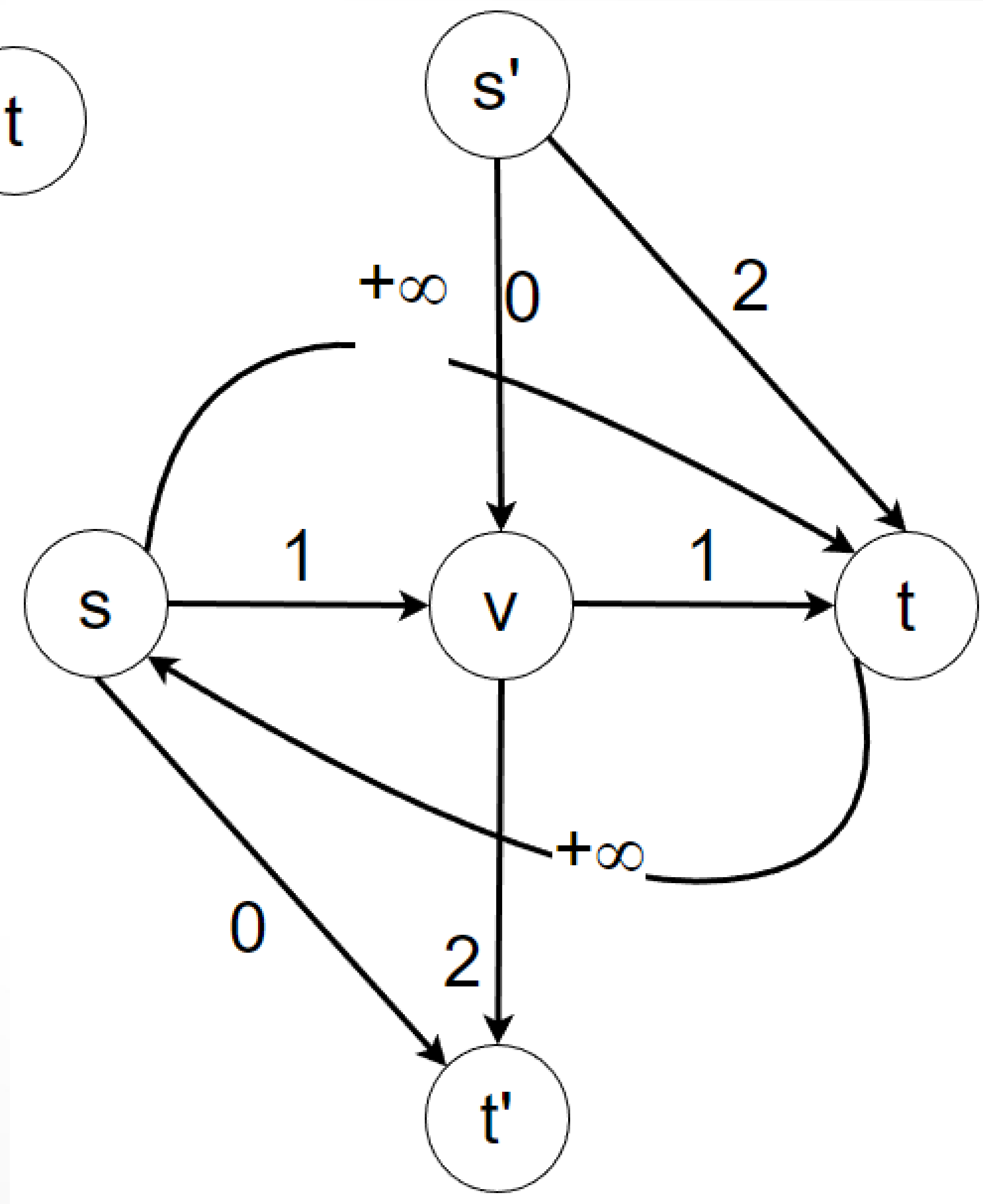
Расширения задачи о потоке

На основе исходных данных: $G(V, E), b, c$ построим новый граф $G'(V', E')$ и новую функцию пропускной способности $c': E' \to R_+$.

1) $V' = V \cup \{s', t'\}$.
2) Для каждой старой вершины $v \in V$ введём дугу (s', v) с пропускной способностью $\sum_{e \in \alpha(v)} b(e)$.
3) Для каждой старой вершины $v \in V$ введём дугу (v, t') с пропускной способностью $\sum_{e \in \beta(v)} b(e)$.
4) Для каждой старой дуги установим новую пропускную способность $c'(e) = c(e) - b(e)$.
5) Добавим две новые дуги (s, t) и (t, s), каждая с пропускной способностью $+\infty$.

Расширения задачи о потоке





Расширения задачи о потоке

<u>Теорема</u> Для исходной задачи $G(V,E),b,c$ существует допустимый поток $\Leftrightarrow$ максимальный поток для задачи $G'(V',E'),c'$ насыщает все дуги, выходящие из s'.

Доказательство

Пусть f' --- максимальный поток для $G'(V',E'),c'$.

$\Leftarrow$Предположим, что f' насыщает все дуги, выходящие из s'.

Для исходной сети определим потоковую функцию f по правилу: $f(e) = f'(e) + b(e)$.

Поскольку $0 \leq f'(e) \leq c'(e) = c(e) - b(e)$, для построенной функции выполняется: $b(e) \leq f(e) \leq c(e)$.

Расширения задачи о потоке

Проверим, что выполняется и условие баланса.

Для f' условие выполняется: для каждой вершины $v \in V$, учитывая как «старые» дуги, так и $\sigma = (s', v), \tau = (v, t')$

$$\sum_{e \in \alpha(v)} f'(e) + f'(\sigma) = \sum_{e \in \beta(v)} f'(e) + f'(\tau)$$

По предположению, дуга $\sigma = (s', v)$ насыщена, поэтому $f'(\sigma) = c'(\sigma) = \sum_{e \in \alpha(v)} b(e)$.

Легко увидеть, что по построению сети G' суммарная пропускная способность дуг из $\beta(s')$ равна суммарной пропускной способностью дуг из $\alpha(t')$. Поэтому все дуги, входящие в t', также насыщены, и $f'(\tau) = c'(\tau) = \sum_{e \in \beta(v)} b(e)$.

Расширения задачи о потоке

Из этих равенств получаем, что для f выполняется условие баланса:

$$\sum_{e\in\alpha(v)} f(e) = \sum_{e\in\beta(v)} f(e)$$

$\Rightarrow$ Все выкладки можно провести и в обратную сторону, с небольшими изменениями.

Определим $f'(e) = f(e) - b(e)$ и положим для каждой $\sigma = (s', v)$ и $\tau = (v, t')$: $f'(\sigma) = c'(\sigma), f'(\tau) = c'(\tau)$. Функция f' удовлетворяет условиям потока и насыщает все дуги, выходящие из s', поэтому f'--- максимальный поток на G'.

Теорема доказана.

Алгоритм Форда-Фалкерсона

1. Инициализация: найти допустимый поток f. Если такого потока нет, то прекратить работу алгоритма.

2. $S := \{s\}$. // Множество *помеченных* вершин.

   $\delta := +\infty;$

   Для всех $v \in V$ выполнить: $p[v] := NULL$.

3. Пока $t \notin S$ и есть дуга $e = (u, v)$, удовлетворяющая одному из условий:

   a) $u \in S, v \notin S, f(e) < c(e)$.

   b) $u \notin S, v \in S, f(e) > b(e)$.

   Добавить в S ещё не помеченный конец дуги e:

   a) $S := S \cup \{v\}, p[v] := u, \delta := \min\{\delta, c(e) - f(e)\};$

   b) $S := S \cup \{u\}, p[u] := v, \delta := \min\{\delta, f(e) - b(e)\};$

Алгоритм Форда-Фалкерсона

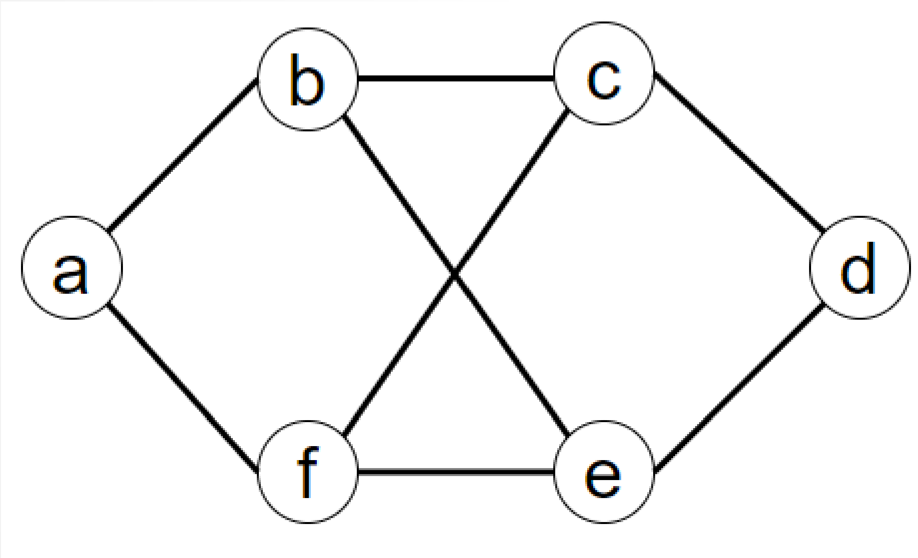
4. Если $t \notin S$, то для текущего потока f не существует увеличивающей цепи. Следовательно, f является максимальным потоком. Остановить алгоритм и вернуть f.

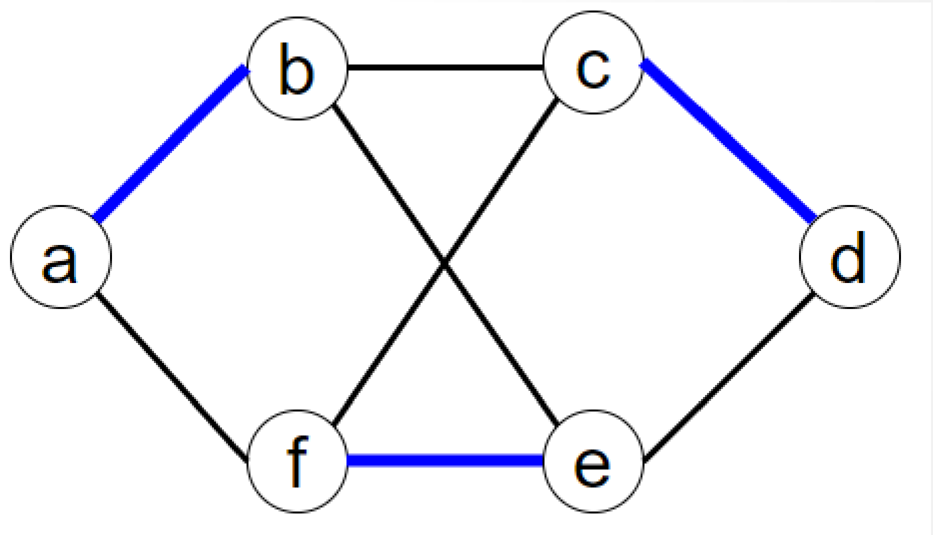
   Если $t \in S$, то по указателям $p[]$ мы можем восстановить увеличивающую цепь и с её помощью построить (см. доказательство леммы 4) новый поток величины на δ больше текущего. В этом случае возвращаемся к шагу 2.

Паросочетания

Паросочетания

Определение. ***Паросочетанием*** на графе $G(V,E)$ называется подмножество рёбер $M \subseteq E$, в котором все рёбра попарно не смежны (не имеют общих вершин).



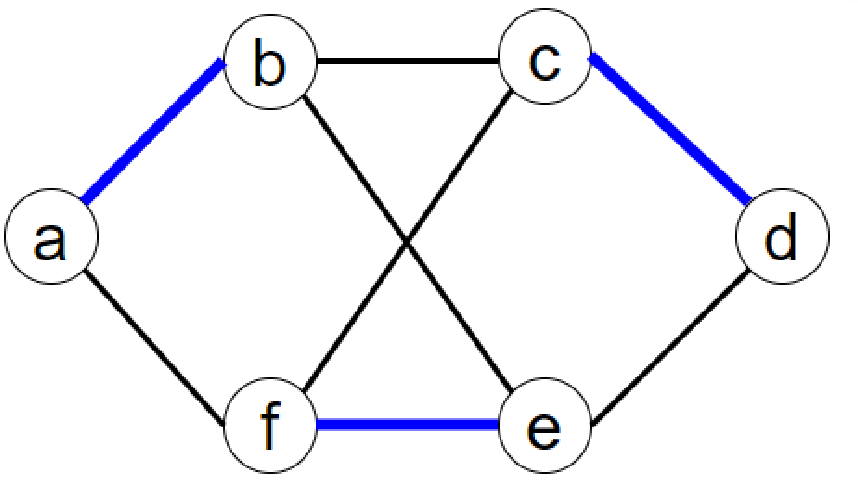


Паросочетания

Определение. ***Совершенным паросочетанием*** называется паросочетание, которое покрывает все вершины графа, то есть каждая вершина инцидентна ребру паросочетания.

Определение. Паросочетание называется ***наибольшим***, если на данном графе не существует паросочетания с бОльшим количеством рёбер.

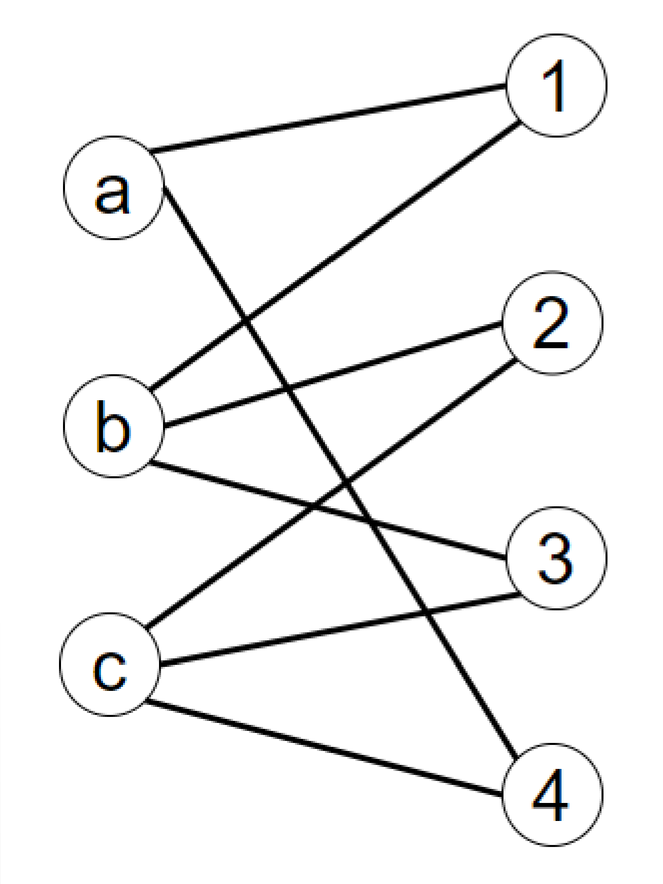
Очевидно, что совершенное паросочетание является наибольшим, но обратное, вообще говоря, не верно.



Паросочетания

Помимо паросочетаний на графах общего вида, важным частным случаем является задача о нахождении наибольшего/совершенного паросочетания на ***двудольных*** графах.

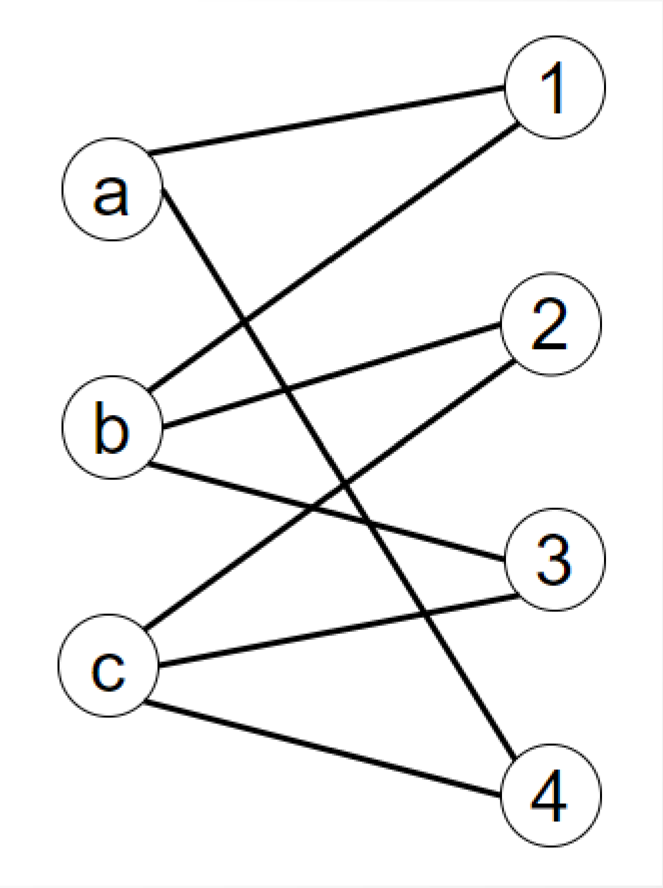
Для двудольных графов понятие совершенного паросочетания определяют по-другому: паросочетание называется совершенным, если оно покрывает все вершины первой доли.



Паросочетания

<u>Задача о назначениях</u>

Имеется множество работников и множество задач. Для каждого работника известно, какие задачи он может выполнять. Найти такое назначение задач работникам (каждому работнику – не более одной задачи), при котором будут выполнены все задачи.

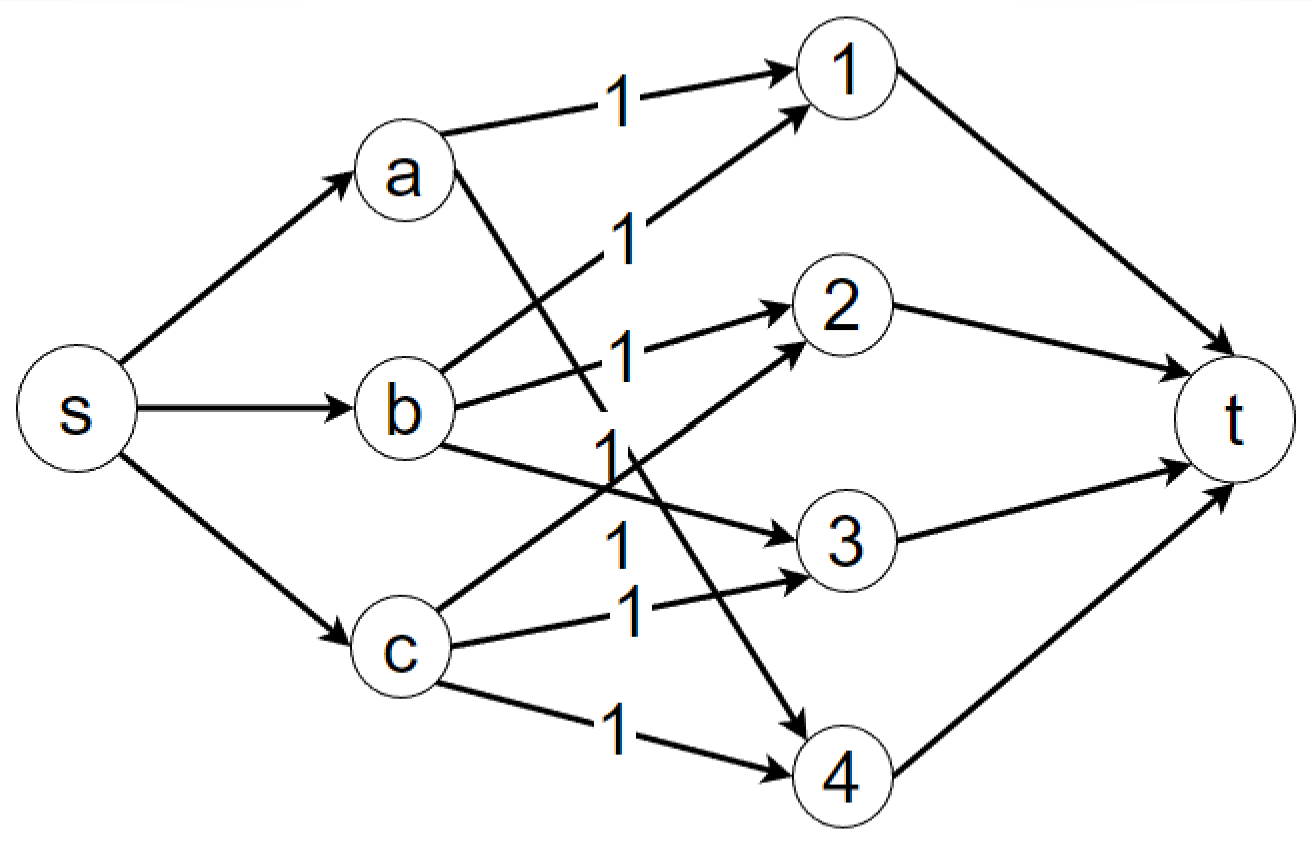


Паросочетания

Наибольшее паросочетание на двудольном графе $G(R \cup B, E)$ можно найти, сведя задачу к задаче о максимальном потоке.

1. Построим новый граф, добавив новые вершины s, t.
2. Добавим дуги (s, v) пропускной способности=1, для всех $v \in R$.
3. Добавим дуги (v, t) пропускной способности=1, для всех $v \in B$.
4. Для старых дуг установим пропускную способность 1 и ориентируем их от R к B.

Паросочетания



Паросочетания

На новом графе найдём максимальный поток.

Наибольшее паросочетание на исходном графе состоит из всех рёбер, по которым поток=1.