Лабораторная работа.
Решение линейной краевой задачи методом пристрелки

Рассмотрим линейную краевую задачу для дифференциального уравнения 4-го порядка

$$y^{IV} + Q(x)\,y^{III} + G(x)\,y'' + H(x)\,y' + P(x)\,y = F(x) \tag{1}$$
$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta, \tag{2}$$
$$y(b) = \gamma, \quad y'(b) = \psi \tag{3}$$

Для сведения этой задачи к задаче Коши не хватает двух начальных условий

$$y''(a) = C, \quad y'''(a) = D$$

Будем разыскивать решение в виде

$$y(x) = v(x) + C\,w(x) + D\,z(x), \tag{4}$$

где $v(x)$, $w(x)$, $z(x)$ — решения следующих задач Коши:

$$v^{IV} + Q(x)\,v^{III} + G(x)\,v'' + H(x)\,v' + P(x)\,v = F(x) \tag{5}$$
$$v(a) = \alpha, \quad v'(a) = \beta, \quad v''(a) = 0, \quad v^{III}(a) = 0 \tag{6}$$

$$w^{IV} + Q(x)\,w^{III} + G(x)\,w'' + H(x)\,w' + P(x)\,w = 0 \tag{7}$$
$$w(a) = 0, \quad w'(a) = 0, \quad w''(a) = 1, \quad w^{III}(a) = 0 \tag{8}$$

$$z^{IV} + Q(x)\,z^{III} + G(x)\,z'' + H(x)\,z' + P(x)\,z = 0 \tag{9}$$
$$z(a) = 0, \quad z'(a) = 0, \quad z''(a) = 0, \quad z^{III}(a) = 1 \tag{10}$$

Легко убедиться, что решение в виде (4) удовлетворяет и дифференциальному уравнению (1), и краевым условиям. Искомые значения C, D являются недостающими начальными условиями для задачи Коши (1)–(2).

$$y''(a) = v''(a) + C\,w''(a) + D\,z''(a) = C$$
$$y'''(a) = v'''(a) + C\,w'''(a) + D\,z'''(a) = D$$

Три задачи Коши следует решить методом Рунге-Кутта и получить три решения в точке $x = b$ вместе с первой производной: $v(b), v'(b)$, $w(b), w'(b)$, $z(b), z'(b)$.

Для определения констант C и D в решении 4 воспользуемся краевыми условиями на правом конце отрезка интегрирования. Получим систему из двух линейных неоднородных уравнений:

$$v(b) + C\,w(b) + D\,z(b) = \gamma, \tag{11}$$
$$v'(b) + C\,w'(b) + D\,z'(b) = \psi \tag{12}$$

Находим решение системы и, зная значения констант C и D, записываем задачу Коши для $y(x)$ и решаем ее методом Рунге-Кутта.

Методические указания

- Для проверки метода пристрелки рассмотрите тестовый пример, например, краевую задачу

$$y^{IV}(x) + y^{III}(x) + y''(x) - y(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \ln(x) - 1 \quad (13)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1 \quad (14)$$

$$y(2) = 2\,\ln(2), \quad y'(2) = \ln(2) + 1 \quad (15)$$

  Эта краевая задача имеет точное решение $y(x) = x\,\ln(x)$. Искомыми значениями являются $C = y''(1) = 1$ и $D = y^{III}(1) = -1$.

- Задайте информацию о краевой задаче (1)—(3)

```
Q:=(x)->1.0; G:=(x)->1.0; ...
a:=0.0; b:=1.0; alpha:=0; beta:=1.0; gama:=2*ln(2); psi:=ln(2)+1;
```

- Задайте дифференциальное уравнение и начальные условия для задачи Коши (6)

```
eq:= (D@@4)(v)(x)+Q(x)*(D@@3)(v)(x)+G(x)*(D@@2)(v)(x)+H(x)*D(v)(x)
+P(x)*v(x)=F(x);
bnd:= v(a)=alpha, D(v)(a)=beta, (D@@2)(v)(a)=0, (D@@3)(v)(a)=0;
```

  Решите задачу Коши, используя команду

```
> rv:=dsolve({eq,bnd},v(x),numeric);
```

  Найдите решение для $x = 2$ и сохраните значение функции и ее первой производной $v(2)$, $v'(2)$:

```
> v2:=rv(b); b1:=rhs(op(2,v2)); b2:=rhs(op(3,v2));
```

- Задайте дифференциальное уравнение и начальные условия для задачи Коши (7), решите задачу Коши и сохраните значение функции $w(x)$ и ее первой производной при $x = b$.

- Задайте дифференциальное уравнение и начальные условия для задачи Коши (8), решите задачу Коши и сохраните значение функции $z(x)$ и ее первой производной при $x = b$.

- Задайте матрицу коэффициентов и вектор правых частей для решения линейной системы (11)-(12). Решите систему, используя команду из пакета линейной алгебры:

```
> A:= matrix([[a11,a12],[a21,a22]]);
B:=vector([evalf(gama-b1),evalf(psi-b2)]);
with(linalg):
res:=linsolve(A,B);
```

- Задайте дифференциальное уравнение и начальные условия для задачи Коши (1)-(3), решите задачу Коши и постройте график полученного решения и точного решения.

- Сохраните результаты работы для тестового примера в своей папке под именем ЛИНЕЙНАЯ КЗ(ТЕСТ).MWS, для индивидуального задания - ЛИНЕЙНАЯ КЗ(ИНД).MWS