Растровые алгоритмы

Компьютерная графика

План

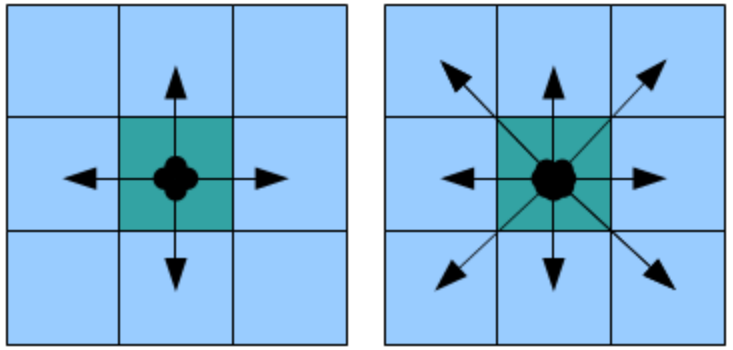
- Терминология
- Заливка – три алгоритма
- Алгоритм Брезенхема – растеризация
- Растеризация граней

Термины

- pixels - сокращение от picture elements
- pixel map - пиксельная карта
- bitmap - побитовое отображение или битовая карта

Смежность точек

4-смежность *8-смежность*



|x1-x2| + |y1-y2|<=1 |x1-x2|<=1 и |y2-y1|<=1

4-смежность сильнее, чем 8-смежность

Связность точек

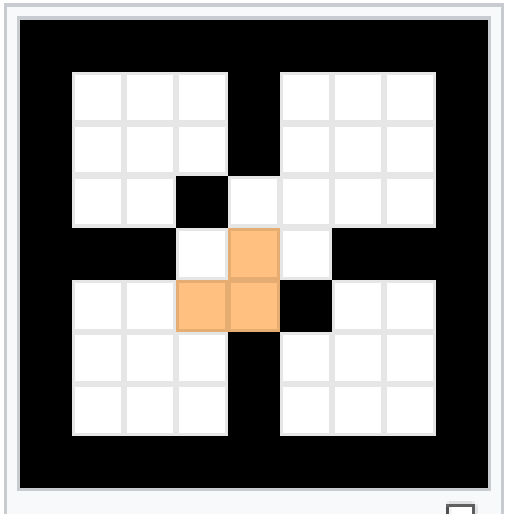
Назовем два пиксела *4-хсвязными*, если существует соединяющий их непрерывный путь из **4-хсмежных** пикселов.

Два пиксела называются *8-хсвязными*, если существует соединяющий их непрерывный путь из **8-исмежных** пикселов.

Задание областей

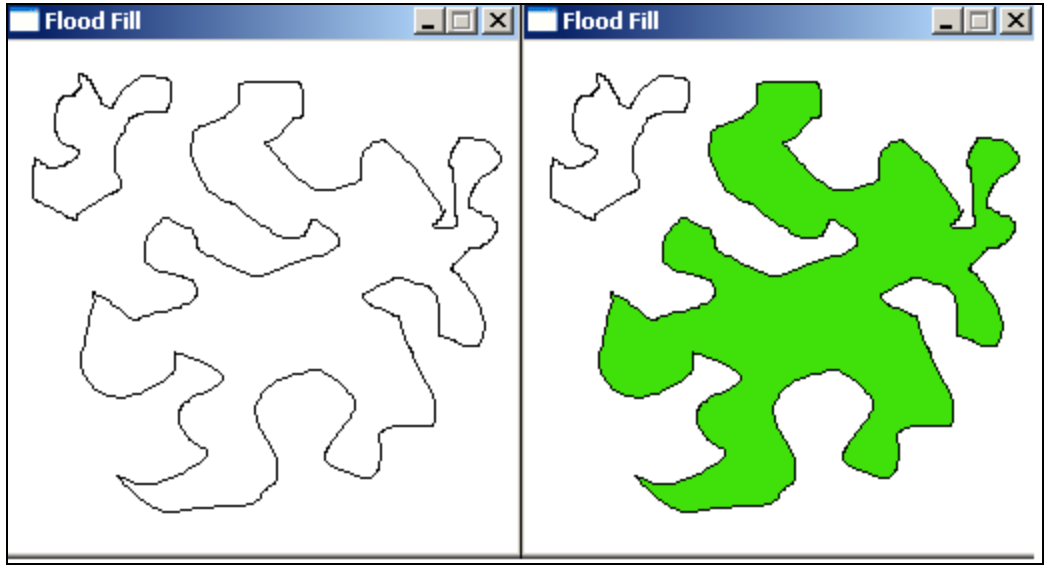
- *Пиксельно-определенная область* характеризуется текущими цветами в пиксельной карте.
- Различают *внутренне-определенную* область и *гранично-определенную*.
- Если граница области 4-х связная, то внутренность 8-ми связная, и наоборот.

Заливка



Как будет выглядеть результат при 4-х связной и 8-ми связной заливке?

Задача заливки

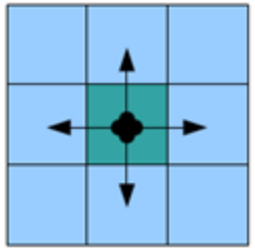


Граница в ряде мест может обладать толщиной большей, чем один пиксел.

Одни алгоритмы хорошо воспринимают толстые границы, а другие в этих случаях «приходят в замешательство».

Простой рекурсивный алгоритм заливки

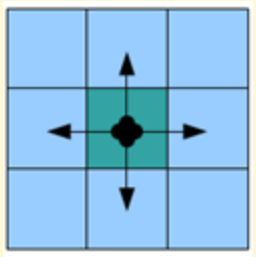
- Выбранная внутренняя точка становится текущей.
- Если текущая точка еще не закрашена и подходит по условию для закрашивания, то
  - закрашиваем ее и
  - применяем рекурсивный вызов данной функции для точек, смежных с текущей



Код простого рекурсивного алгоритма заливки

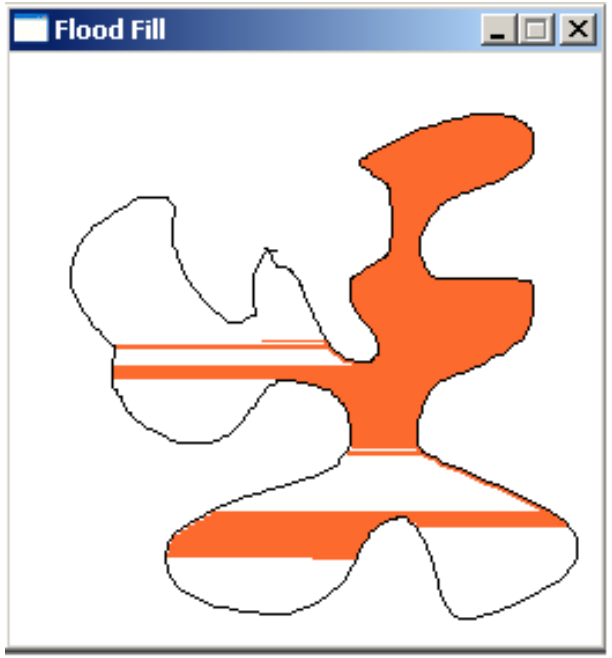
```
//Recursive 4-way floodfill, crashes if recursion stack is full
void floodFill4(int x, int y, int newColor, int oldColor)
{
  if(x >= 0 && x < w && y >= 0 && y < h && screenBuffer[x][y] == oldColor &&
screenBuffer[x][y] != newColor)
  {
    screenBuffer[x][y] = newColor; //set color before starting recursion

    floodFill4(x + 1, y,   newColor, oldColor);
    floodFill4(x - 1, y,   newColor, oldColor);
    floodFill4(x,   y + 1, newColor, oldColor);
    floodFill4(x,   y - 1, newColor, oldColor);
  }
}
```



Недостаток

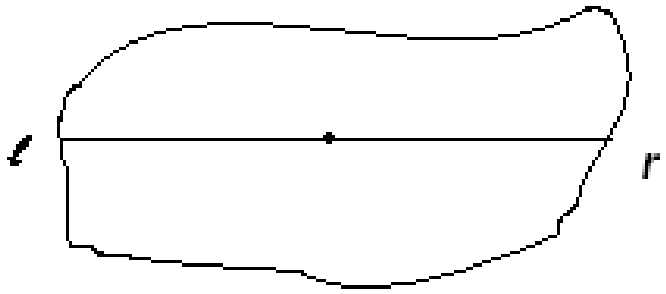
- Многие пикселы проверяются многократно, что требует огромного количества вызовов функции.
- Стек рекурсии может стать очень глубоким, даже для простой области.
- Поэтому велика вероятность переполнения стека.



Существуют более эффективные методы заливки.

Рекурсивный алгоритм заливки на основе серий пикселов (линий)

- Выбранная внутренняя точка становится текущей.
- Если текущая точка еще не закрашена и подходит по условию для закрашивания, то
  - Для текущей точки находим левую и правую границу. Рисуем линию от левой границы до правой границы, не включая саму границу.
  - В цикле от левой до правой границы (не включая саму границу) вызываем эту же функцию рекурсивно для всех точек, лежащих выше текущей на один пиксел.
  - Выполняем аналогичный цикл для всех точек, лежащих ниже текущей на один пиксел.



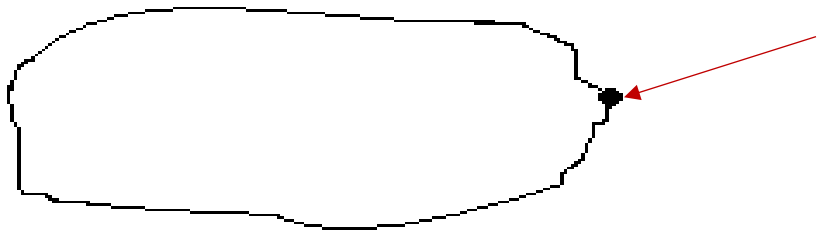
Алгоритм заливки с предварительным выделением границы

Процесс разбивается на 3 отдельные стадии.

1. Создание упорядоченного списка граничных пикселов (отслеживание или выделение границы).
2. Обследование внутренней части для обнаружения отверстий. Обследование производится посредством сканирования внутренних отрезков между парами граничных пикселов с одинаковыми значениями координаты y (от правой до левой границы). Если в области обнаруживается отверстие (еще не занесенные в список точки внутренней границы), то происходит занесение точек внутренней границы в общий список с сохранением упорядоченности. Процесс прекращается, когда вся внутренняя область обследована.
3. Соединение точек в списке слева направо горизонтальными прямыми (заполнение области).

Создание списка граничных пикселов

- x, y и флаг



- *Обход начинается* с начальной точки и продолжается по часовой стрелке.
- Внутренность области всегда находится справа от направления движения.
- Если пиксел не соседствует с внутренней частью области, то алгоритм не считает его граничным.

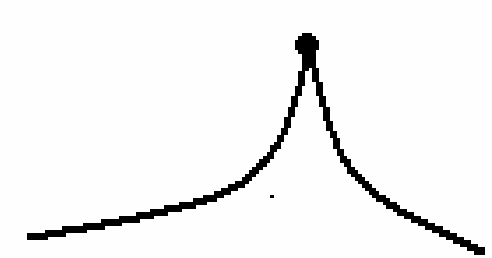
Выбор следующей точки

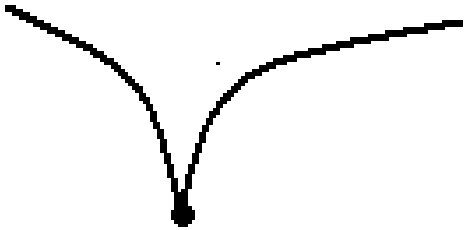
3	2	1
4	X	0
5	6	7

- В самый первый раз обход начинаем вниз. Проверяем, закрашена ли точка цветом границы. Если нет, то поиск закрашенной цветом границы точки продолжаем против часовой стрелки.

- В список заносим, сохраняя упорядоченность по y, если же y-ки имеют одинаковые значения, то по x. Выбор следующей точки (i+1)-ой, где i>1, на 90 градусов по часовой стрелке от того направления, по которому мы туда пришли.

Классификация точки: левая или правая?





Сравнение алгоритмов

Давайте обсудим

Растеризация

- Процесс, обратный векторизации.

- Растеризация — это перевод изображения, описанного векторным форматом в пиксели или точки, для вывода на дисплей или принтер.

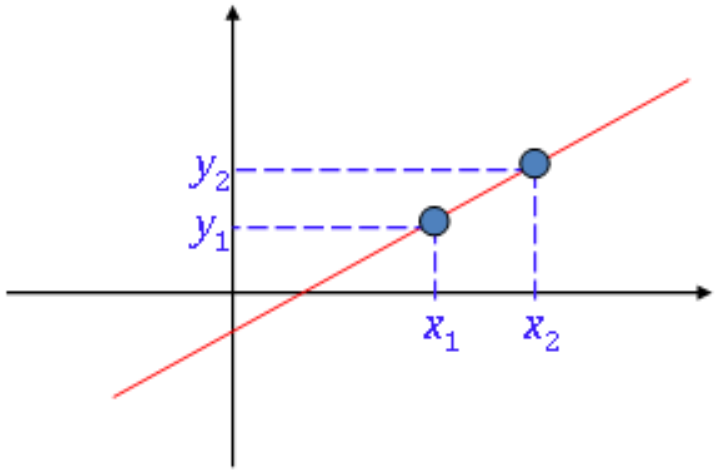
- Растеризация, или метод сканирования строк (англ. scanline rendering) — одна из групп методов рендеринга.

- **Растеризация** треугольников — **важнейшая часть рендеринга 3D** объектов на дискретную (с пикселями) плоскость экрана.

Растеризация отрезка

- Процесс определения пикселов, наилучшим образом аппроксимирующих заданный отрезок, называется разложением в растр (растеризацией).

Построение линии



$$y = mx + c$$

Джек Элтон Брезенхэм (Jack Elton Bresenham)

родился в 1937 г.

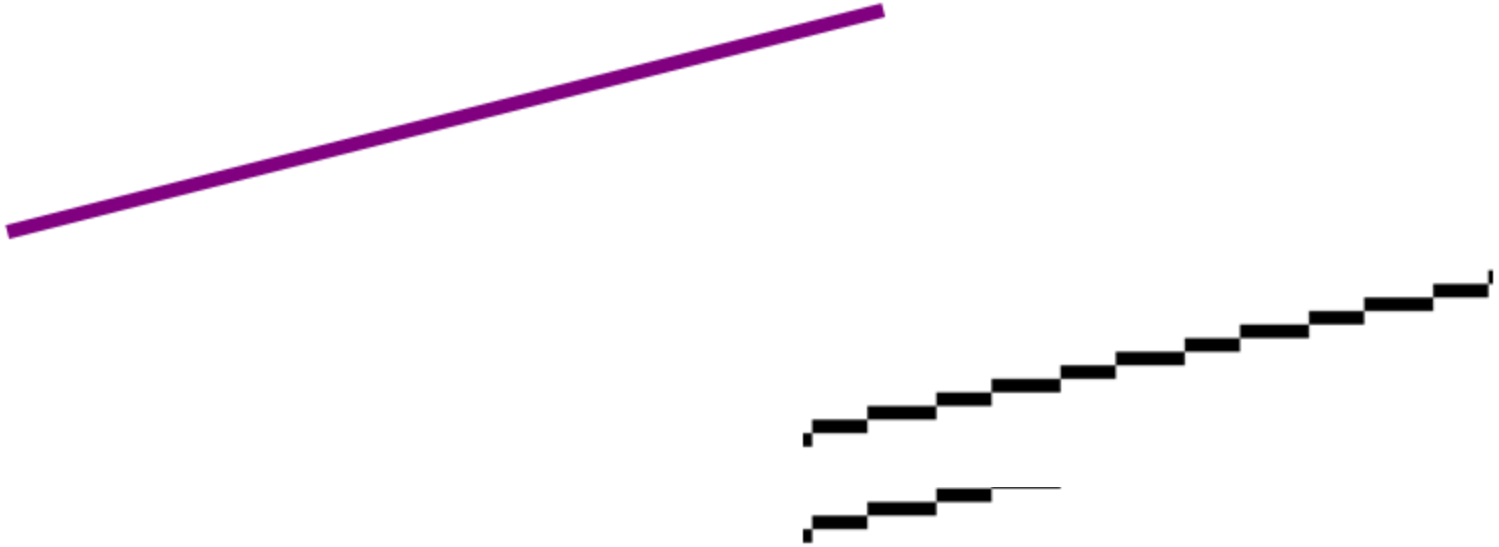
BSEE, Университет Нью-Мексико, 1959

MSIE, Стэндфордский Университет, 1960

к.н., Стэндфордский Университет, 1964

в компании IBM
в 1962 году
Алгоритм Брезенхема

Алгоритм Брезенхейма построения линий



Алгоритм, предложенный Дж. Э. Брезенхеймом в 1962, был опубликован в 1965 г.

https://en.wikipedia.org/wiki/Bresenham%27s_line_algorithm

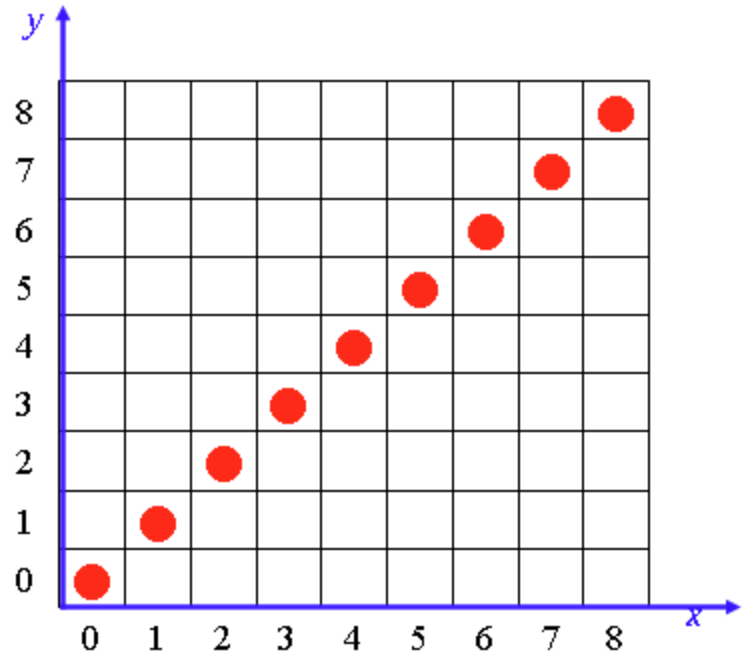
$|m| = 1$

$y = x$

$m = 1$

$c = 0$

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8



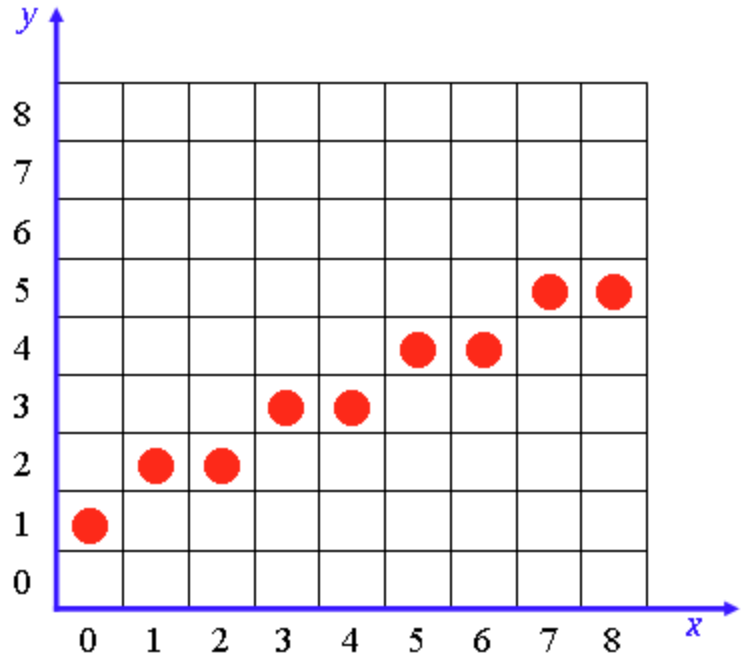
$$|m| < 1$$

$y = ½\,x + 1$

$m = ½$

$c = 1$

x	y	round(y)
0	1	1
1	1.5	2
2	2	2
3	2.5	3
4	3	3
5	3.5	4
6	4	4
7	4.5	5

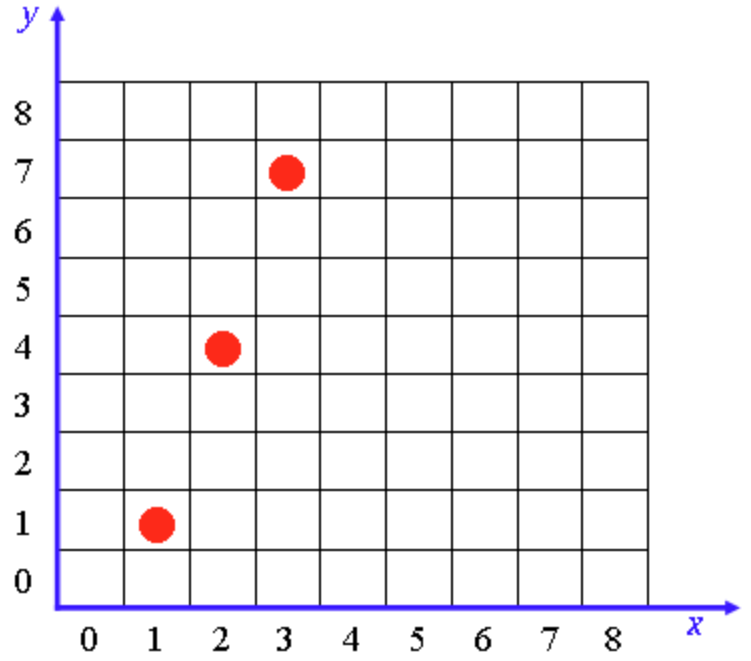


$$|m| > 1$$

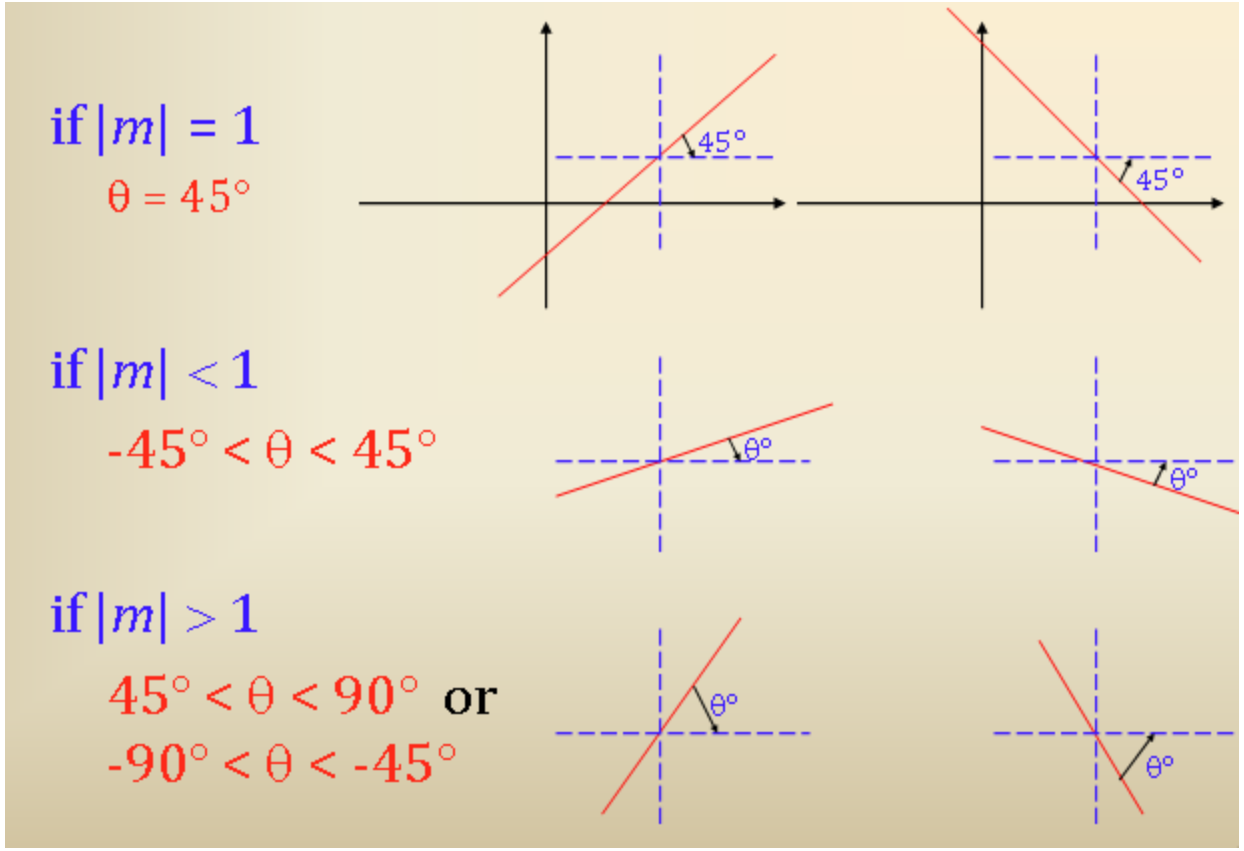
$$y = 3x - 2$$

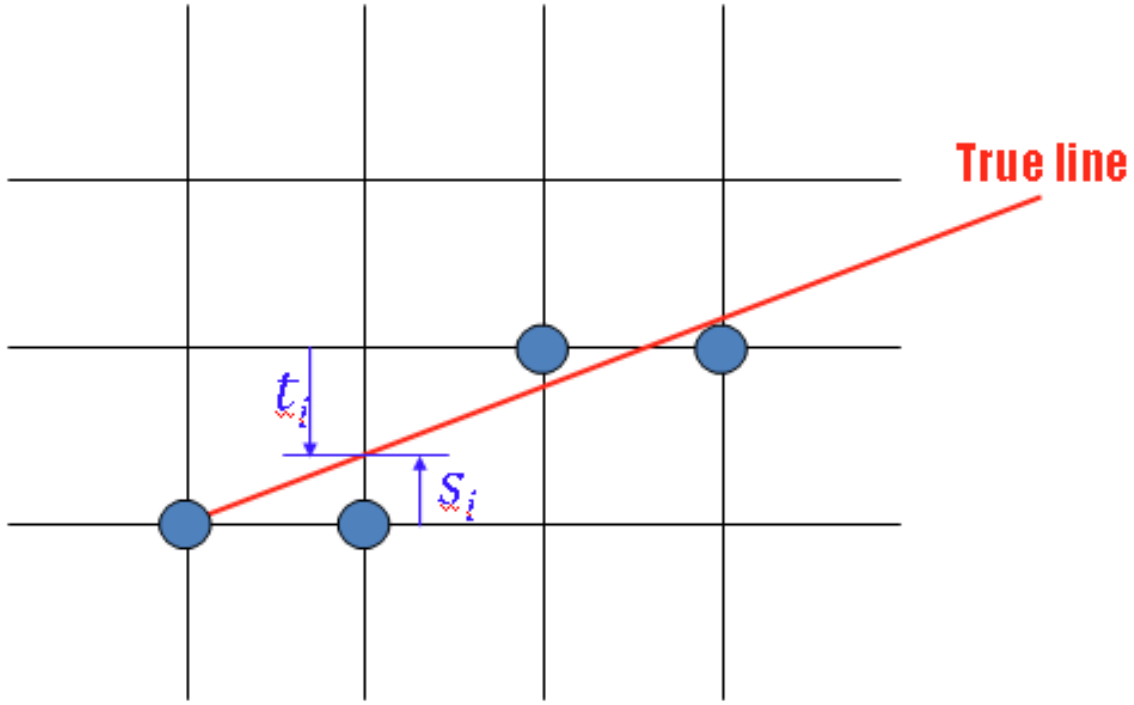
$m = 3$
$c = -2$

x	y	round(y)
0	-2	-2
1	1	1
2	4	4
3	7	7
4	10	10
5	13	13
6	16	16
7	19	outside 19



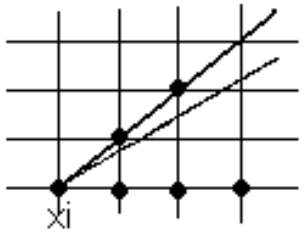
Углы наклона

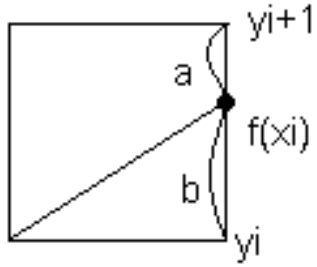



True line
t_i
S_i

Вывод формул

$y=(dy/dx)*x$, где $dy=y_2-y_1$ и $dx=x_2-x_1$





Выпишем формулы для расстояний a и b:

$a = y_i+1-f_i = y_i+1-(dy/dx)*x_i$

$b = f_i – y_i = (dy/dx)*x_i-y_i$

Если расстояние *a* меньше расстояния *b*, то к точной прямой ближе y_i+1, если *b* меньше *a*, то ближе yi.

```
if b – a >0 then
   ynext=yi+1
else
   ynext=yi
```

Алгебраические преобразования 1

$a = y_i+1-f_i = y_i+1-(dy/dx)*x_i$ $b = f_i – y_i = (dy/dx)*x_i-y_i$

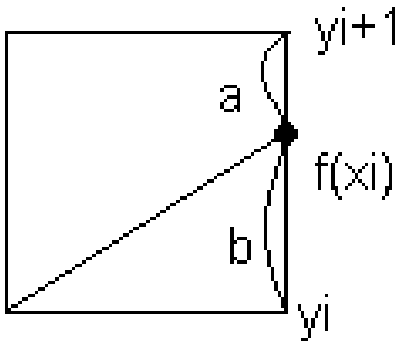
$b – a = 2(dy/dx)x_i –y_i –y_i – 1 = 2(dy/dx)x_i – 2y_i – 1$

Так как x_1 меньше x_2, то приращение dx всегда будет >0.

Следовательно, вместо (b – a) можно использовать (b – a)dx.

$(b – a)dx = 2dyx_i – 2y_idx – dx = 2(dyx_i-y_idx) – dx$

Обозначим: $(b – a)\ dx = d_i$



Тогда в итоге получили алгоритм:

if d_i>0 then

ynext =y_i+1

else

ynext = y_i

Алгебраические преобразования 2

$d_i = 2(dyx_i - y_i dx) - dx$

Для итеративного вычисления d_i+1 необходимо знать, как получить это значение из d_i

$d_{i+1} - d_i = 2(dyx_{i+1} - y_{i+1}dx) - dx - 2(dyx_i - y_i dx) + dx = 2(x_{i+1} - x_i)dy - 2(y_{i+1} - y_i)dx$

$d_{i+1} - di = 2dy - 2(y_{i+1} - y_i)\,dx$, т.к. $(x_{i+1} - x_i) = 1$

Следовательно, d_{i+1} может быть получено путем прибавления к d_i одной из двух констант.

if $d_i > 0$ then

$d_{i+1} = d_i + 2dy - 2dx$

else

$d_{i+1} = d_i + 2dy$

Как вычислить d_1?

Выпишем формулу:

$d_i = 2dyx_i – 2y_idx – dx$

Вспомним, что первый пиксел по договоренности имеет координаты (0,0).

Подставив $x_i = 1$, а $y_i = 0$, получим

$d_1 = 2dy – dx$

Целочисленный алгоритм Брезенхема

- For a line with gradient ≤ 1

  $d_0 = 2dy - dx$

  if $d_i < 0$ then
  $y_{i+1} = y_i$
  $d_{i+1} = d_i + 2dy$

  if $d_i \geq 0$ then
  $y_{i+1} = y_i + 1$
  $d_{i+1} = d_i + 2(dy - dx)$

  $x_{i+1} = x_i + 1$

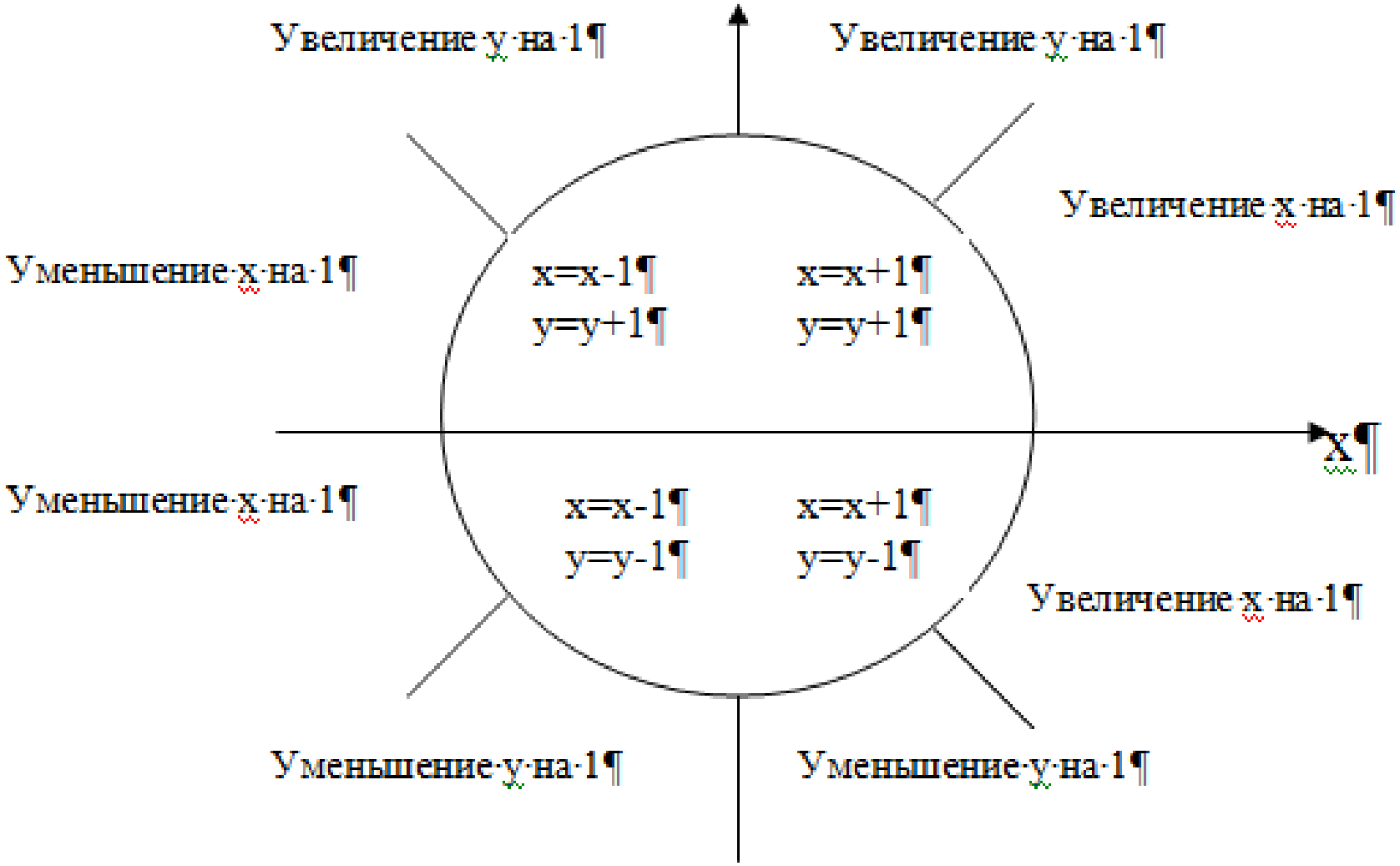
- For a line with gradient > 1

  $d_0 = 2dx - dy$

  if $d_i < 0$ then
  $x_{i+1} = x_i$
  $d_{i+1} = d_i + 2dx$

  if $d_i \geq 0$ then
  $x_{i+1} = x_i + 1$
  $d_{i+1} = d_i + 2(dx - dy)$

  $y_{i+1} = y_i + 1$


Увеличение y на 1
Увеличение y на 1
Увеличение x на 1
Уменьшение x на 1
x=x-1
y=y+1
x=x+1
y=y+1
x
Уменьшение x на 1
x=x-1
y=y-1
x=x+1
y=y-1
Увеличение x на 1
Уменьшение y на 1
Уменьшение y на 1

С накоплением ошибки

```
function line(int x0, int x1, int y0, int y1)
    int deltax := abs(x1 - x0)
    int deltay := abs(y1 - y0)
    real error := 0
    real deltaerr := (deltay + 1) / (deltax + 1)
    int y := y0
    int diry := y1 - y0
    if diry > 0
        diry = 1
    if diry < 0
        diry = -1
    for x from x0 to x1
        plot(x,y)
        error := error + deltaerr
        if error >= 1.0
            y := y + diry
            error := error - 1.0
```

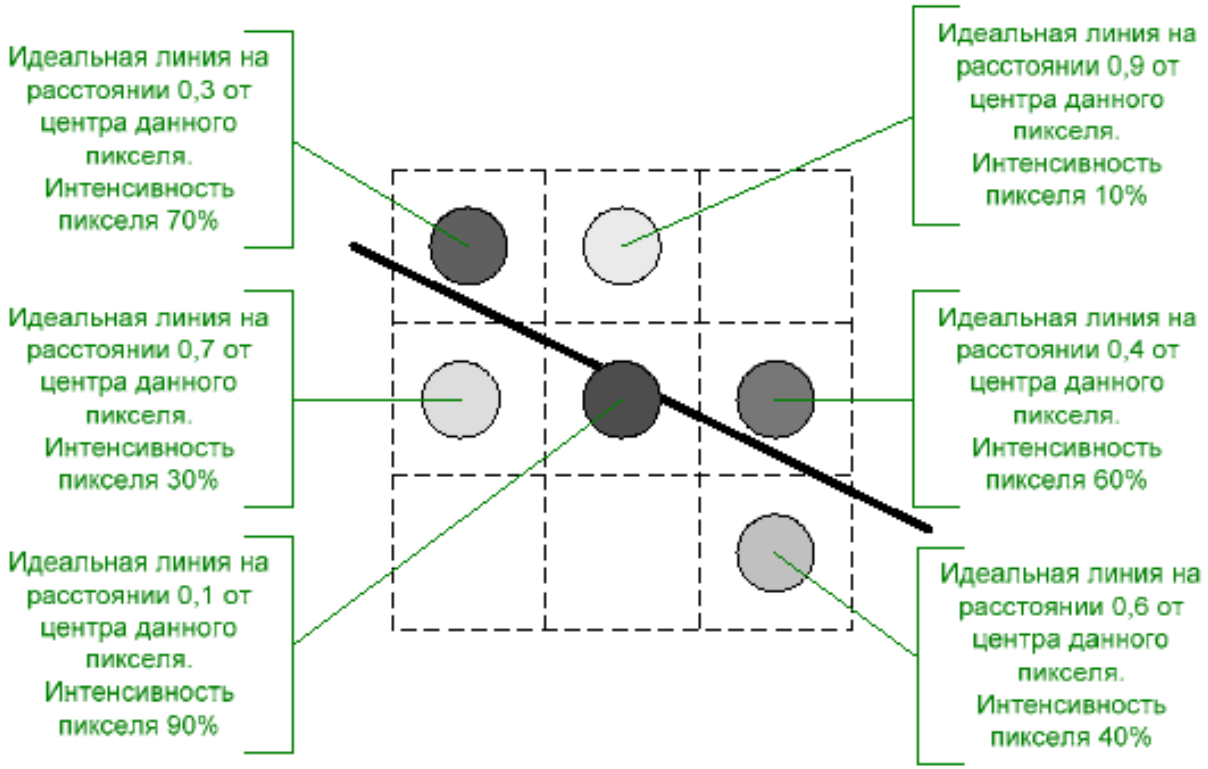
Избавились от накопления ошибки

```
function line(int x0, int x1, int y0, int y1)
    int deltax := abs(x1 - x0)
    int deltay := abs(y1 - y0)
    int error := 0
    int deltaerr := (deltay + 1)
    int y := y0
    int diry := y1 - y0
    if diry > 0
        diry = 1
    if diry < 0
        diry = -1
    for x from x0 to x1
        plot(x,y)
        error := error + deltaerr
        if error >= (deltax + 1)
            y := y + diry
            error := error - (deltax + 1)
```

Сглаживание - Алгоритм Ву
(У Сяолиня)

s

Идея алгоритма Ву

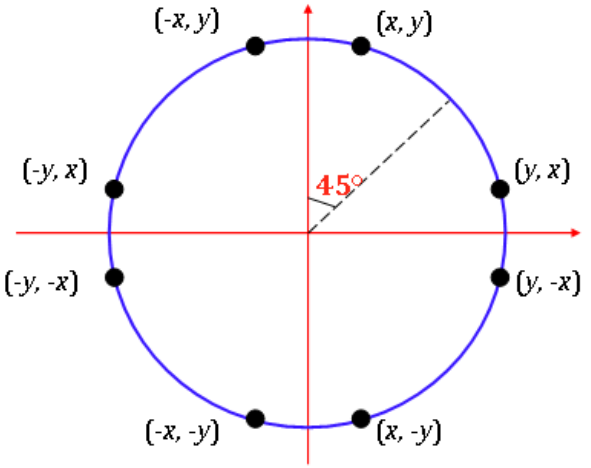


Одна из реализаций алгоритма By

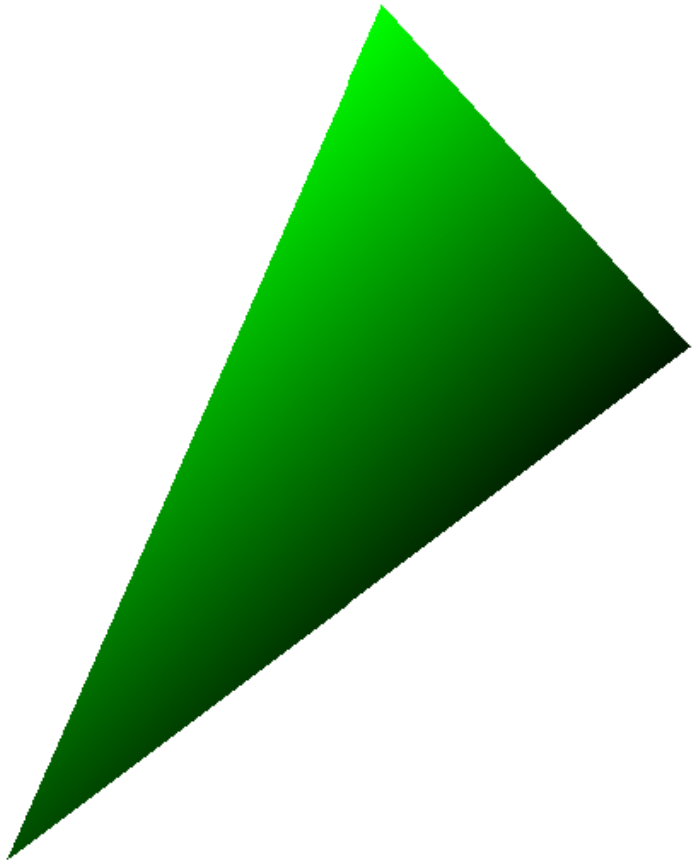
```
DrawPoint(x1, y1, 1);
// Последний аргумент — интенсивность в долях единицы
 float dx = x1 - x0; float dy = y1 - y0;
 float gradient = dy / dx;
 float y = y0 + gradient;
 for (var x = x0 + 1; x <= x1 - 1; x++) {
    DrawPoint(x, (int)y, 1 - (y - (int)y));
    DrawPoint(x, (int)y + 1, y - (int)y);
    y += gradient;
 }
```

Модификация для рисования окружностей

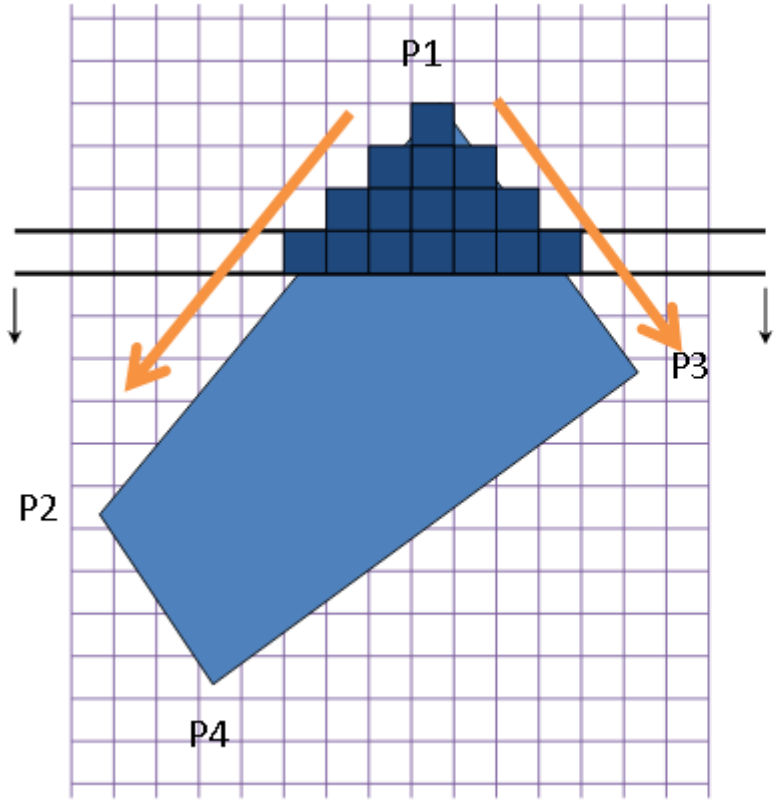
```
void BresenhamCircle(int x0, int y0, int radius) {
    int x = radius; int y = 0;
    int radiusError = 1 - x;
    while (x >= y) {
            DrawPoint(x + x0, y + y0);  DrawPoint(y + x0, x + y0);
            DrawPoint(-x + x0, y + y0);  DrawPoint(-y + x0, x + y0);
            DrawPoint(-x + x0, -y + y0); DrawPoint(-y + x0, -x + y0);
            DrawPoint(x + x0, -y + y0);  DrawPoint(y + x0, -x + y0);
            y++;
            if (radiusError < 0)
                    radiusError += 2 * y + 1;
            else {
                    x--;
                    radiusError += 2 * (y - x + 1);
            }
     }
}
```



Градиентная заливка через растеризацию



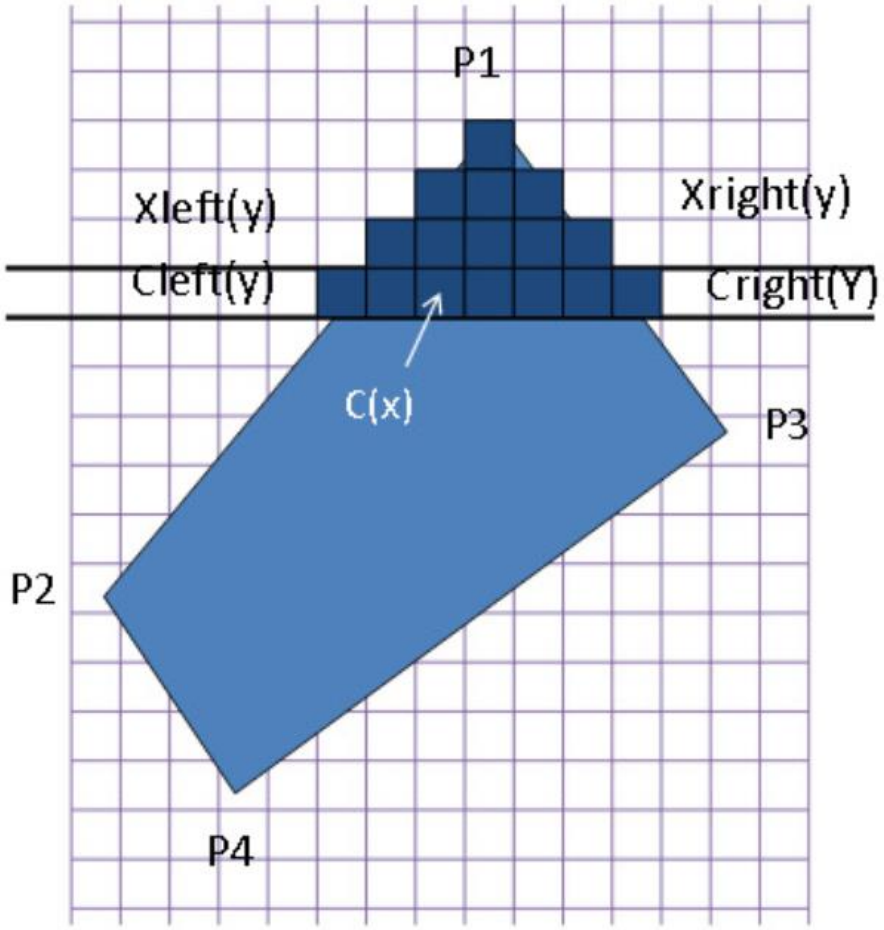
Растеризация граней



Линия развертки (scanline)

Алгоритм построчной развертки

Процесс вычисления пикселей растра, принадлежащих примитиву



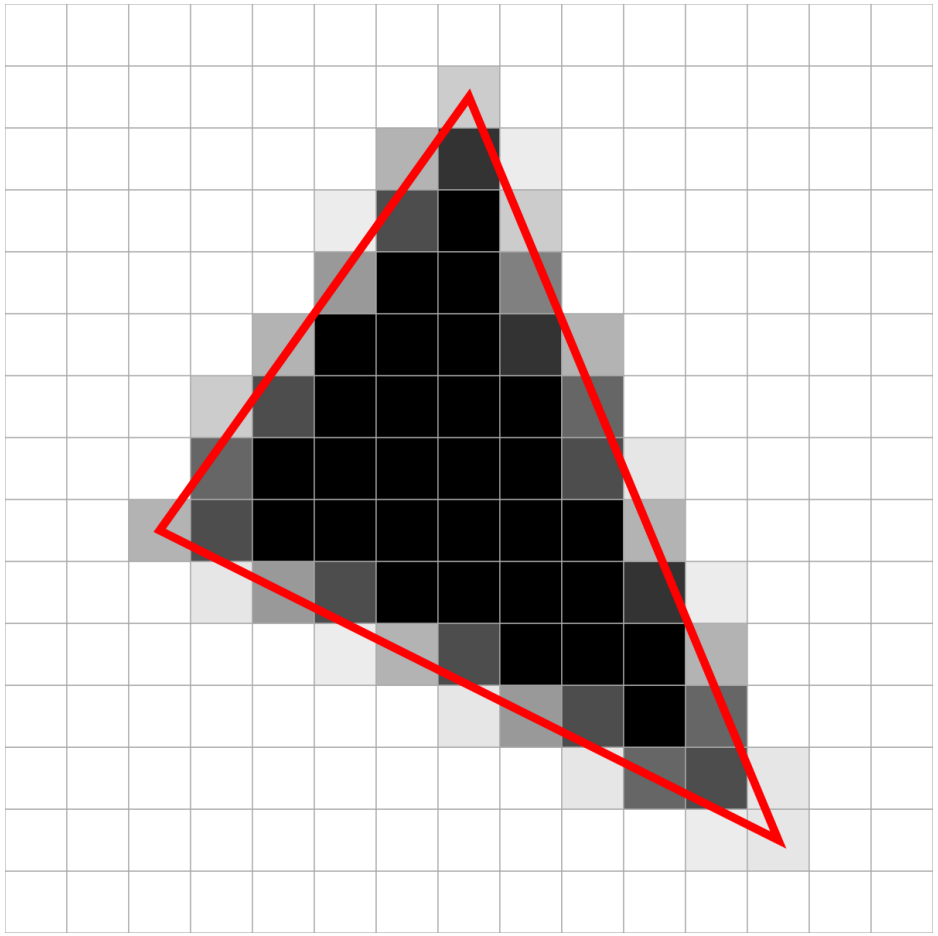
Вход:

- Координаты P1,P2,P3,P4 (экранные)
- Цвета вершин Ci или другие атрибуты

1. **Строим уравнения отрезков P1-P2 и P1-P3**
2. **Для Y от P.y до P3.y**
   1. Находим Xleft(y) и Xright(y)
   2. Находим Cleft(y) и Cright(Y) через линейную интерполяцию
   3. Интерполируем между Cleft(y) и Cright(y) для получения C(x)
3. **При достижении P3.y P1-P3 заменяется на P3-P4**

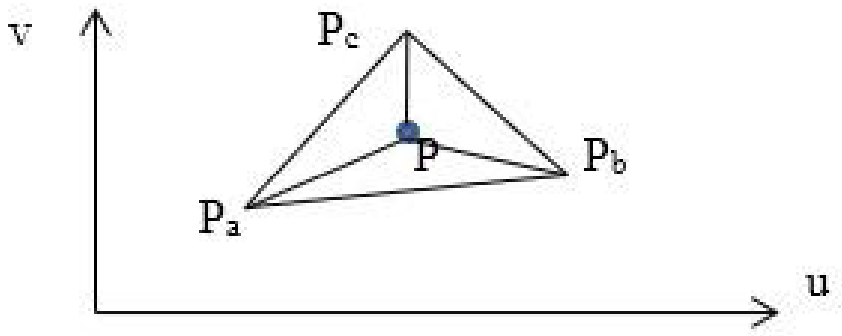
Растеризация треугольника

- А в чем отличие?
- Какие пограничные состояния могут быть?
- Что нужно проверить?
- Что нужно сделать?



Барицентрические координаты

Пусть треугольник, расположенный в параметрическом пространстве, ограничен вершинами $P_a = [u_a, v_a]$, $P_b = [u_b, v_b]$, $P_c = [u_c, v_c]$



Представим точку P , находящуюся внутри треугольника

$P = a \cdot P_a + b \cdot P_b + c \cdot P_c$

a, b, c называют барицентрическими координатами

Требование к барицентрическим координатам

a+b+c =1

Свойства барицентрических координат

Точка **P принадлежит** треугольнику $P_a P_b P_c$ — **все барицентрические координаты не отрицательны**

Точка **P** совпадает с одной из вершин треугольника $P_a P_b P_c$ — две барицентрические координаты равны нулю

Точка **P** лежит на стороне треугольника $P_a P_b P_c$ или лежит на ее продолжении — одна из барицентрических координат равна нулю.

Точка **P** не принадлежит треугольнику $P_a P_b P_c$ — по крайней мере одна барицентрическая координата отрицательная.

Растеризация через барицентрические координаты

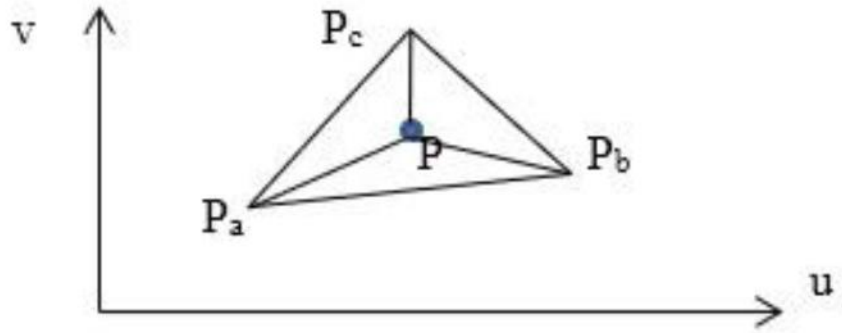
- Находит прямоугольник, ограничивающий наш треугольник.
- Для каждого пикселя в прямоугольнике вычисляет три барицентрических координаты.
- Если все координаты неотрицательны, пиксель рисуется.
- С помощью этих же координат плавно интерполируются атрибуты вершин (цвет, текстурные координаты и т.д.) для получения цвета пикселя.
- Этот алгоритм лежит в основе многих растеризаторов, в том числе и современных графических процессоров.

Два способа вычисления барицентрических координат

Способ **1**. **Через площади** — самый интуитивно понятный способ

Способ **2**. **Через систему уравнений** — более эффективный для вычислений

Способ 1. Вычисление через площади



a = (Площадь подтреугольника PBC) / (Площадь всего треугольника ABC)

b = (Площадь подтреугольника PCA) / (Площадь всего треугольника ABC)

c = (Площадь подтреугольника PAB) / (Площадь всего треугольника ABC)

Площадь треугольника можно легко вычислить с помощью векторного произведения
Площадь ABC = ((B.x - A.x)*(C.y - A.y) - (C.x - A.x)*(B.y - A.y)) / 2

Способ 2. Через систему уравнений

Решаем систему уравнений для точки P(x, y)

$$x = a * A.x + b * B.x + c * C.x$$
$$y = a * A.y + b * B.y + c * C.y$$
$$a + b + c = 1$$