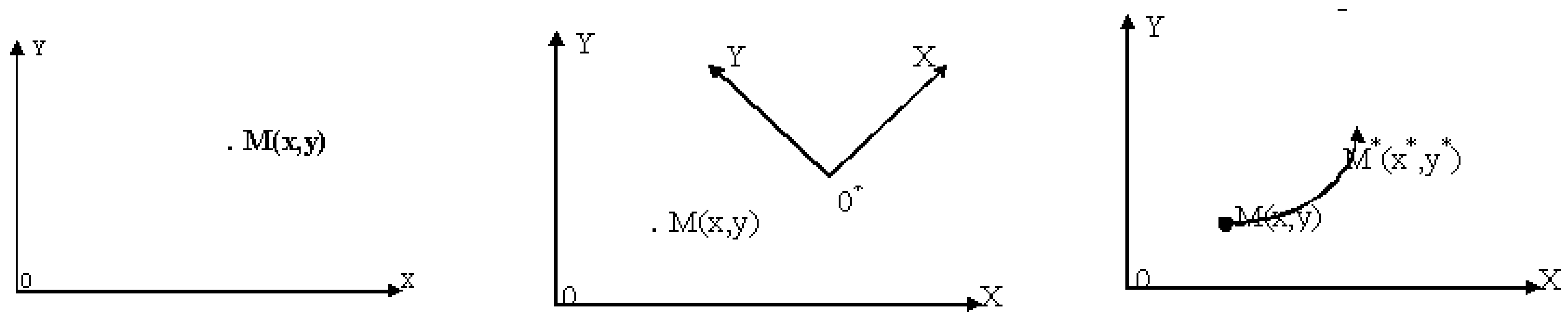
АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Компьютерная графика

План

- Аффинные преобразования
- Вспомогательные векторные алгоритмы

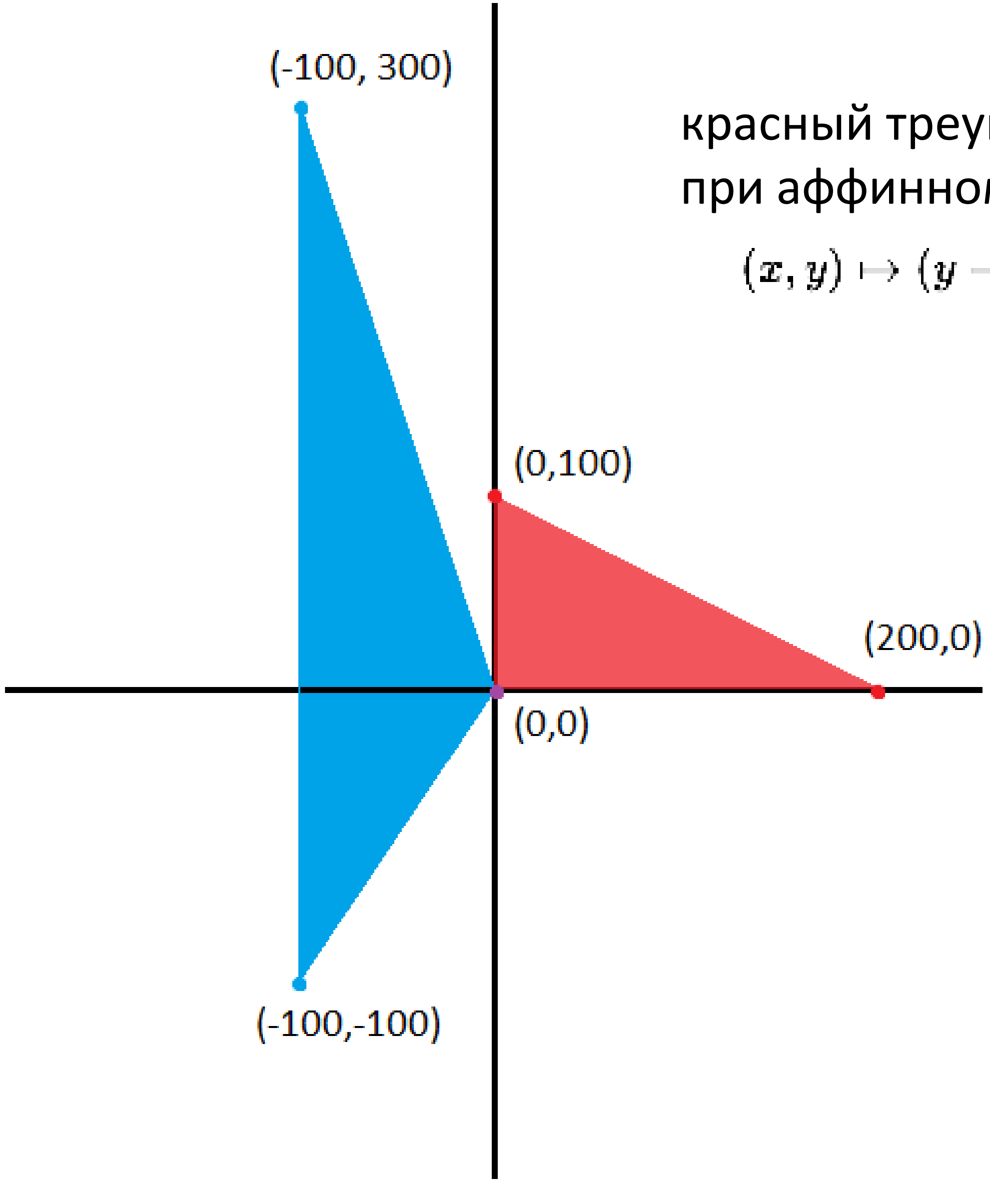
Переход



от одной прямолинейной системы координат к другой описывается следующими соотношениями:

$x^* = \alpha x + \beta y + \lambda$, $\quad y^* = \gamma x + \delta y + \mu$, (*)

где α, β, γ, δ — произвольные числа, связанные неравенством $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$



красный треугольник переходит в синий при аффинном преобразовании

$$(x, y) \mapsto (y - 100, 2 \cdot x + y - 100)$$

Аффинное преобразование (из википедии)

(от лат. *affinis* —соприкасающийся, близкий, смежный) —

отображение плоскости или пространства в себя, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые, пересекающиеся в пересекающиеся, скрещивающиеся в скрещивающиеся.

Преобразование плоскости называется **аффинным**

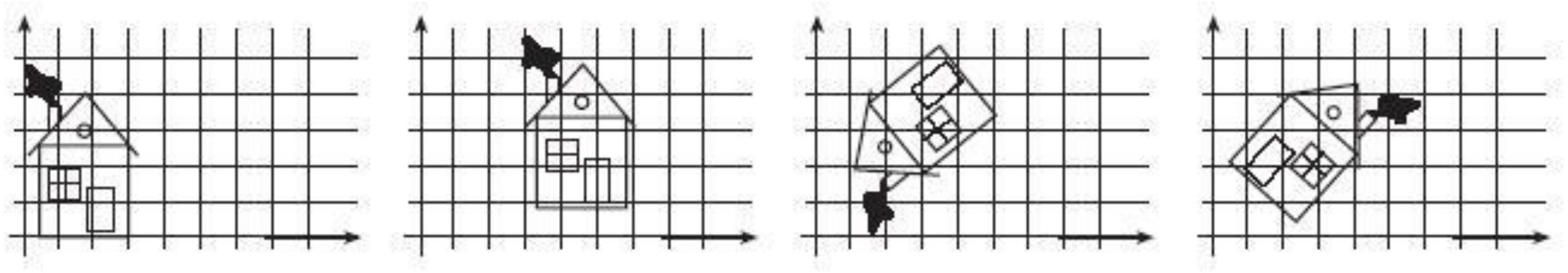
- если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.
- Преобразование (отображение) называется **взаимно однозначным** (биективным), если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.

Аффинные преобразования

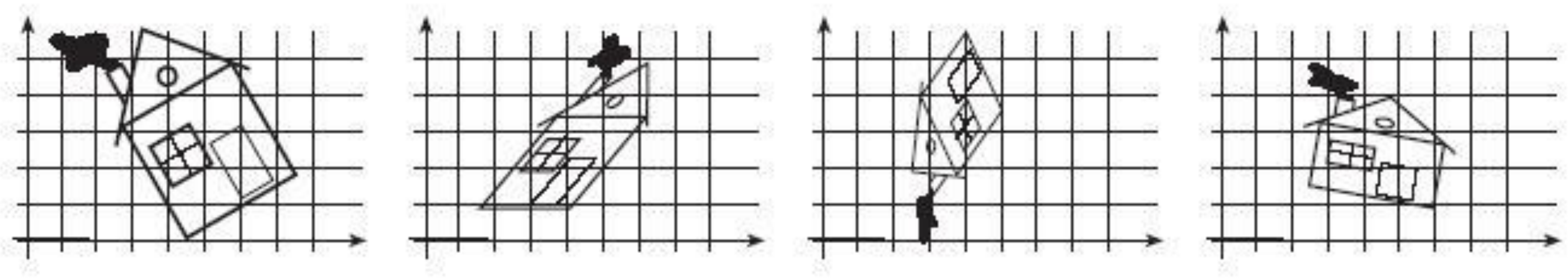
- Движения
- Растяжения и сжатия относительно прямой

Движения

- это такие преобразования, которые сохраняют расстояние между любыми двумя точками неизменным, а именно **параллельные переносы, повороты, различные симметрии и их комбинации**.



Растяжения и сжатия относительно прямой



Свойства аффинных преобразований

- Композиция аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование.
- Преобразование, обратное к аффинному, есть снова аффинное преобразование.
- Отношение площадей сохраняется.
- Отношение длин отрезков на прямой сохраняется.

Базовые аффинные преобразования

- Поворот вокруг начала координат на угол φ
- Растяжение/Сжатие относительно осей координат
- Отражение
- Перенос

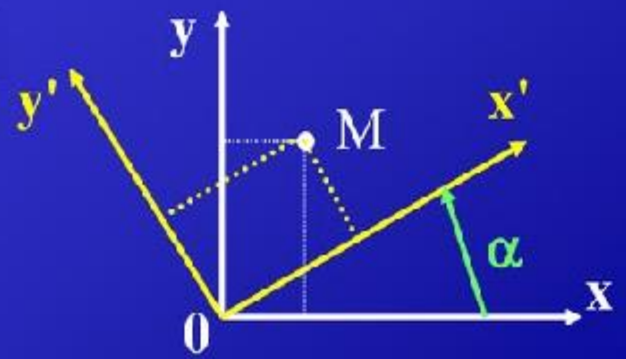
Определение

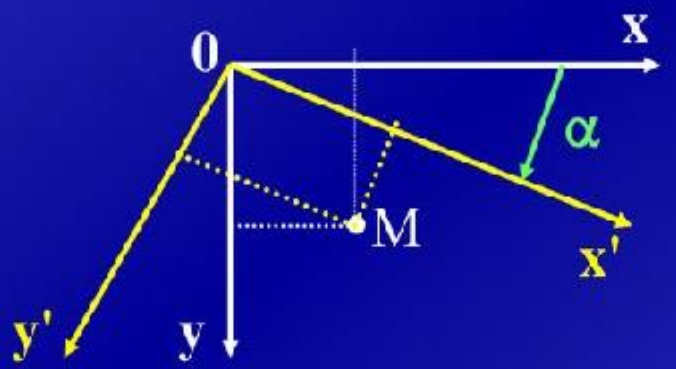
Аффи́нное преобразование $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть преобразование вида

$$f(x) = M \cdot x + v,$$

где M — обратимая матрица и $v \in \mathbb{R}^n$.

1. Поворот.





$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Растяжение-сжатие осей координат.

$$\begin{cases} x' = x / k_x \\ y' = y / k_y \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример:

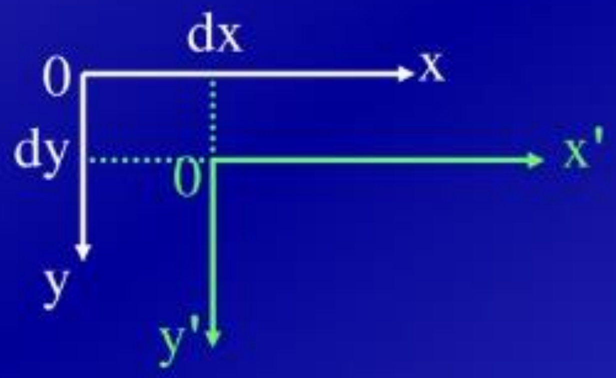
k_x = -1 *соответствует зеркальному отражению относительно оси* ***y.***

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' \, k_x \\ y = y' \, k_y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Параллельный сдвиг координат.



$$\begin{cases} x' = x - dx \\ y' = y - dy \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -dx & -dy & 1 \end{pmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' + dx \\ y = y' + dy \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты точки

- Однородными координатами точки называется любая тройка одновременно не равных нулю чисел $x1, x2, x3$, связанных с заданными числами x и y следующими соотношениями:
- $x1 / x3 = x, \quad x2 / x3 = y$.

Произвольная матрица аффинного преобразования

$$(x^* \ y^* \ 1) = (x \ y \ 1)\begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \vartheta & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

- A. Матрица вращения (rotation)

$$[R]=\begin{bmatrix}\cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- B. Матрица растяжения /сжатия (dilatation).

$$[D]=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \delta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- C. Матрица отражения (reflection).

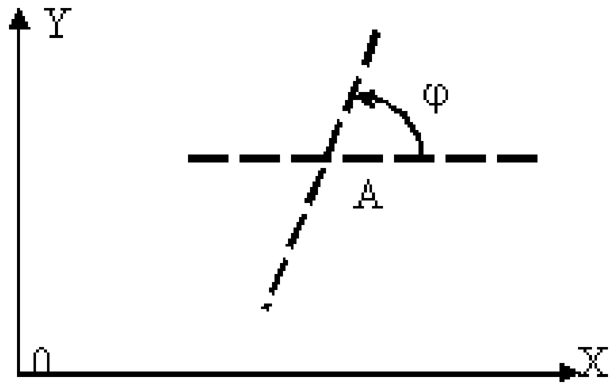
$$[M]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- D. Матрица переноса (translation).

$$[T]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & \mu & 1\end{bmatrix}$$

Пример1

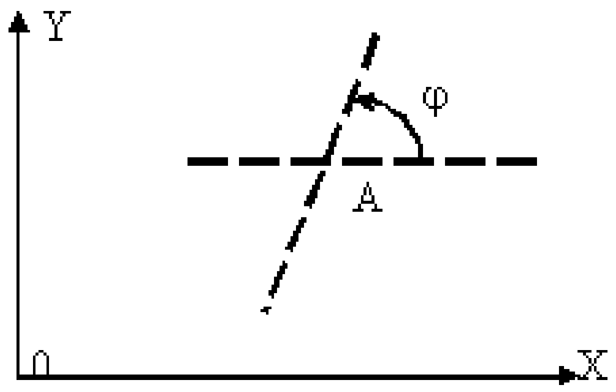
- Построить матрицу поворота вокруг точки *A(a, b)* на угол φ



Решение

- **1-й шаг.** Перенос на вектор *A(-a,-b)* для совмещения центра поворота с началом координат.

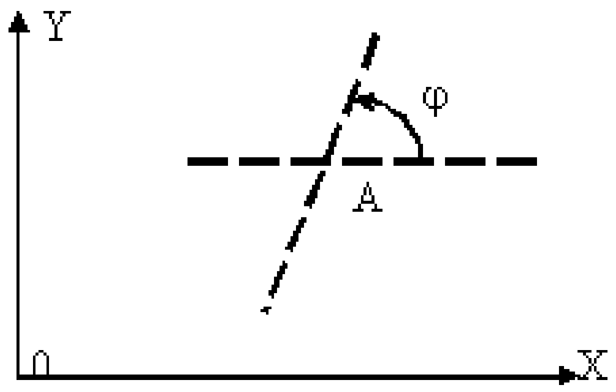
$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$



Решение

- **2-й шаг.** Поворот на угол φ**.**

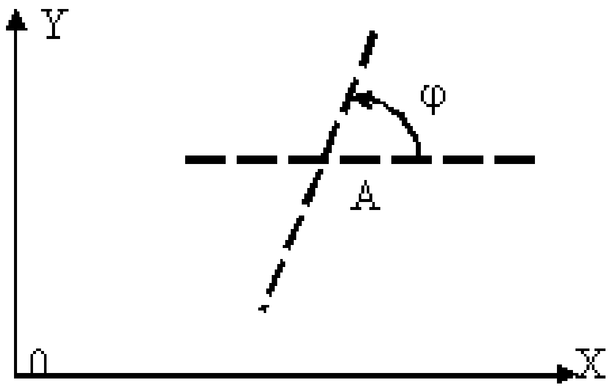
$$[R_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Решение

3-й шаг. Перенос на вектор *A(a,b)* для возвращения центра поворота в прежнее положение

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$



Итоговая матрица

$$[T_{-A}R_fT_A]$$

$$[T_{-A}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-a&-b&1\end{bmatrix}\qquad [R_\varphi]=\begin{bmatrix}\cos(\varphi)&\sin(\varphi)&0\\-\sin(\varphi)&\cos(\varphi)&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad [T_A]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&b&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x^* & y^* & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y & 1\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos(\varphi)&\sin(\varphi)&0\\-\sin(\varphi)&\cos(\varphi)&0\\-a\times\cos(\varphi)+b\times\sin(\varphi)+a&-a\times\sin(\varphi)-b\times\cos(\varphi)+b&1\end{bmatrix}$$

Пример 2

- Построить матрицу растяжения с коэффициентами растяжения α вдоль оси абсцисс и β вдоль оси ординат и с центром в точке *A(a, b)*.

Решение

1-й шаг. Перенос на вектор *–A(-a, -b)* для совмещения центра растяжения с началом координат

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

2-й шаг. Растяжение вдоль координатных осей с коэффициентами α и δ соответственно.

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-й шаг. Перенос на вектор *A(a, b)* для возвращения центра растяжения в прежнее положение.

$$[T_{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

Итоговая матрица

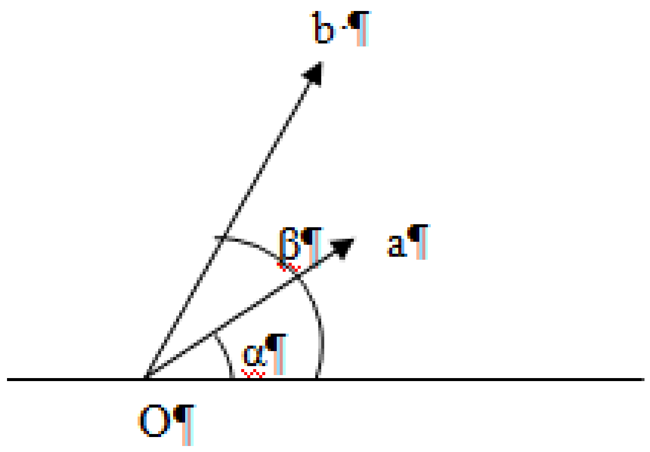
$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ (1-\alpha)\times a & (1-\delta)\times b & 1 \end{bmatrix}$$

Вспомогательные векторные алгоритмы

- **Определить, где находится точка: справа или слева от ребра.** (Ребро должно быть направленным.)

Определить, где находится точка: справа или слева от ребра

Ребро должно быть направленным



Точка b находится слева, если sin(β-α)>0, то есть (sinβcosα-cosβsinα)>0

Вывод: где находится точка

- Обозначим: x_b, y_b, x_a, y_a — координаты точек.
  sinβ = y_b/|b| , cosα = x_a/|a| , cosβ = x_b/|b| , sinα = y_a/|a|

$$\sin(\beta - \alpha) = (\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha),$$ и

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|},\ \sin\alpha = \frac{a_y}{|a|},\ \cos\beta = \frac{b_x}{|b|},\ \sin\beta = \frac{b_y}{|b|},$$ то

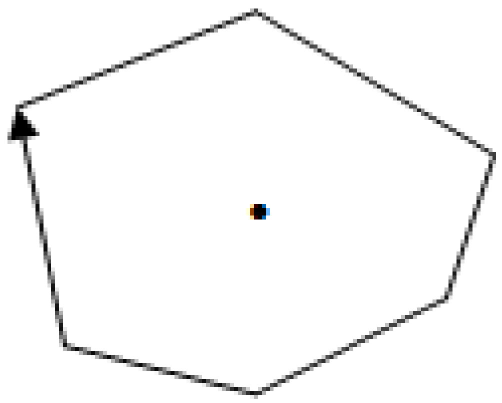
$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{\|a\|\,\|b\|}\left(x_a y_b - x_b y_a\right).$$

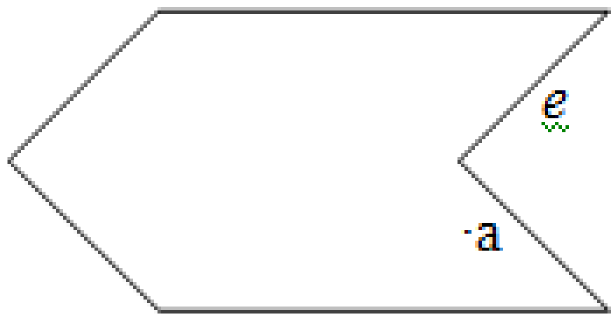
Получили условие:

если $\mathbf{y_b \cdot x_a - x_b \cdot y_a > 0}$ => b **слева** от Oa

если $\mathbf{y_b \cdot x_a - x_b \cdot y_a < 0}$ => b **справа** от Oa

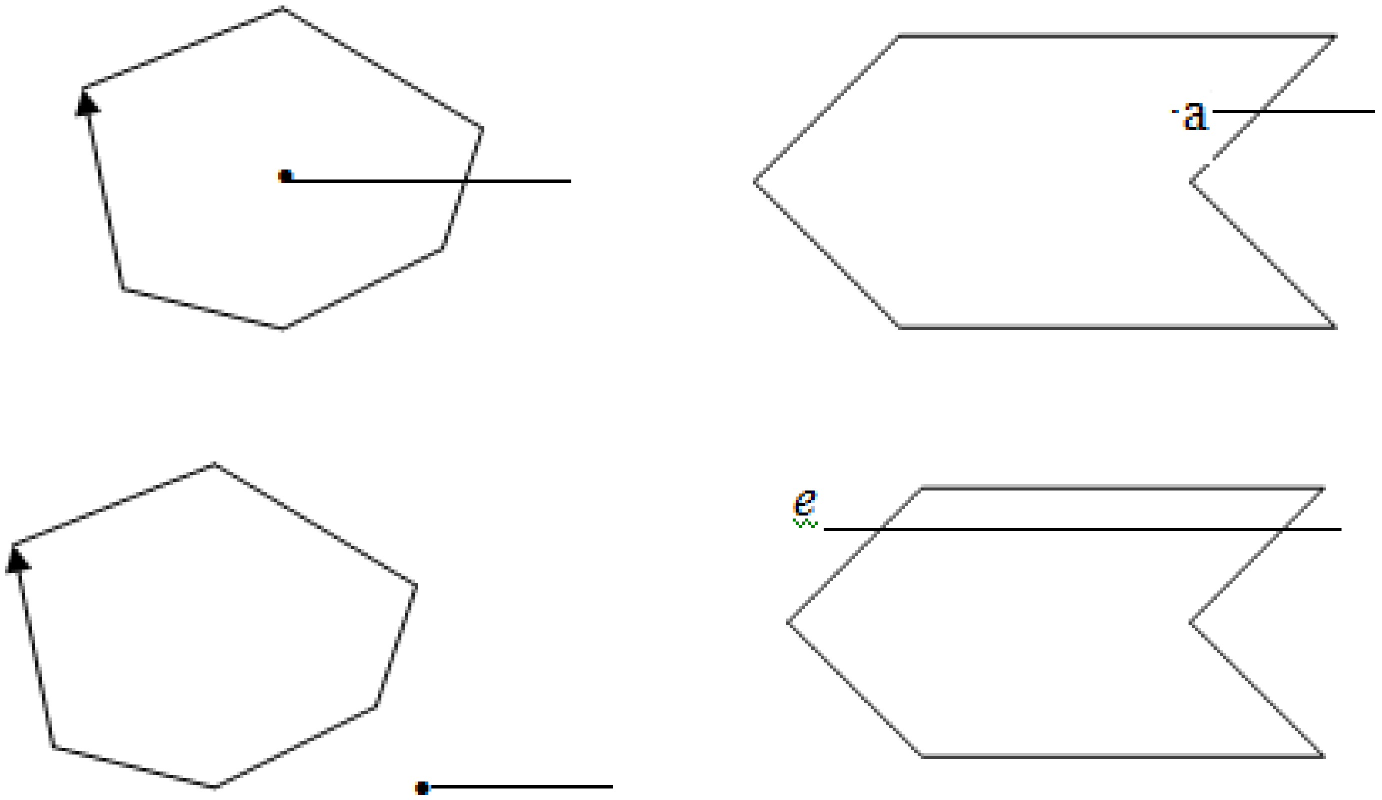
Проверить, принадлежат ли точки выпуклому полигону



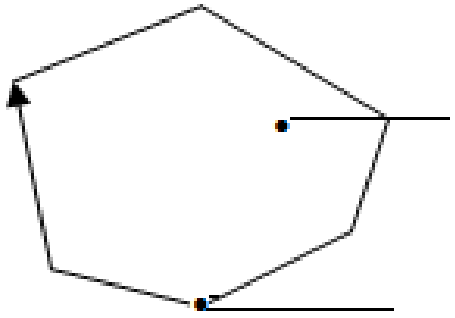


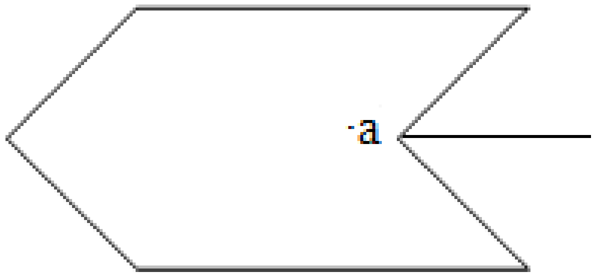
Всегда справа от ребра

Принадлежность точки полигону — метод лучей

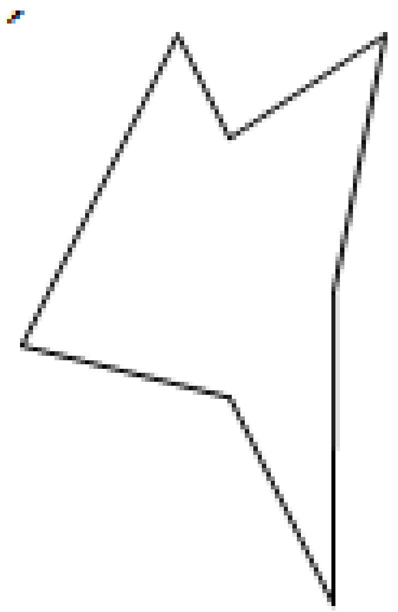


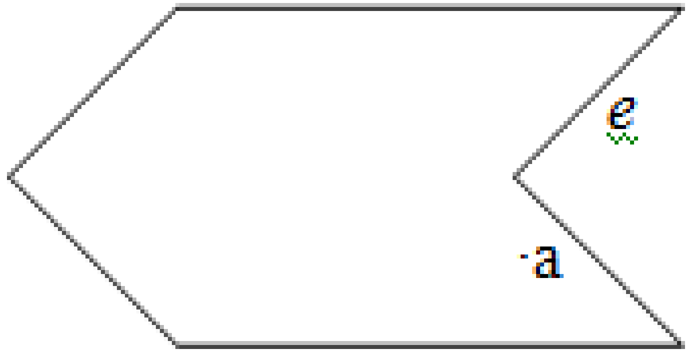
Пограничные случаи метода лучей

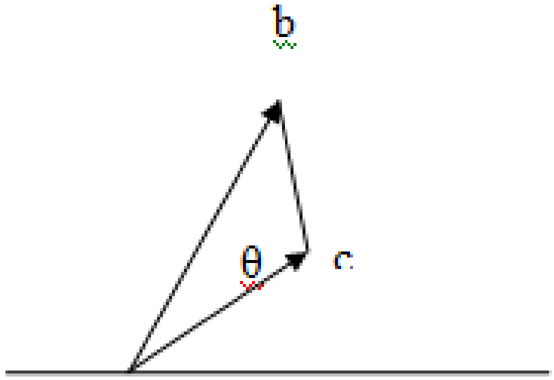




Принадлежность точки полигону — метод углов

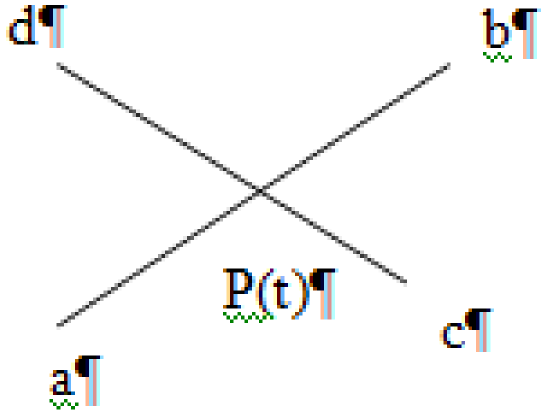






Проверить, пересекаются ли прямые

- Можно использовать способ определения прямых через параметрические уравнения.
- Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:



$$P(t) = (1-t)a + tb \quad \text{или} \quad P(t) = a + t(b-a)$$

Если прямая линия *ab* описывается уравнением *P(t) = a+ t(b-a)*,
то будем искать значение t такое,
что прямые линии *ab* и *cd* пересекаются в точке *P(t)*.

Определение точки пересечения двух прямых

Поскольку вектор *P(t)-c* должен совпадать с прямой линией *cd*,

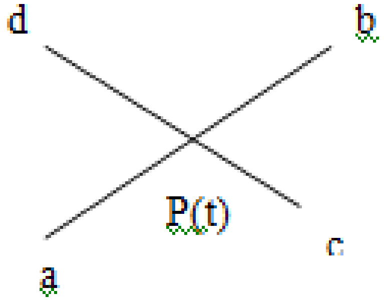
то и вектор *P(t)-c* и прямая линия *cd* должны быть перпендикулярны одному и тому же вектору *n*

Векторы (p(t)-c) и (d-c) – параллельны и коллинеарны

Если вектор n – нормаль к dc, то чтобы узнать координаты n нужно в уравнении прямой заменить (x,y) на (–y, x).

$$n(p(t) - c) = 0;$$

$$a \cdot b \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0, \quad \text{если, и олько если} \quad \theta \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 90 \text{ градусов.}$$



Определение точки пересечения двух прямых

Следовательно, на основании теоремы о скалярном произведении нам необходимо решить относительно t уравнение

$$n(P(t) - c) = 0$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде $n(a+t\cdot(b-a)-c)=0.$

Учитывая основные свойства скалярного произведения, получим

$$n\cdot(a-c)+n\cdot(t\,(b-a))=0.$$

Выводя за скобки параметр t, имеем $n\cdot(a-c)+t\,[n\,(b-a)]=0.$

Откуда следует

$$t=-\frac{n\cdot(a-c)}{n\cdot(b-a)},\quad n\cdot(b-a)\neq 0.$$