

Аффинные преобразования и проецирование в 3D

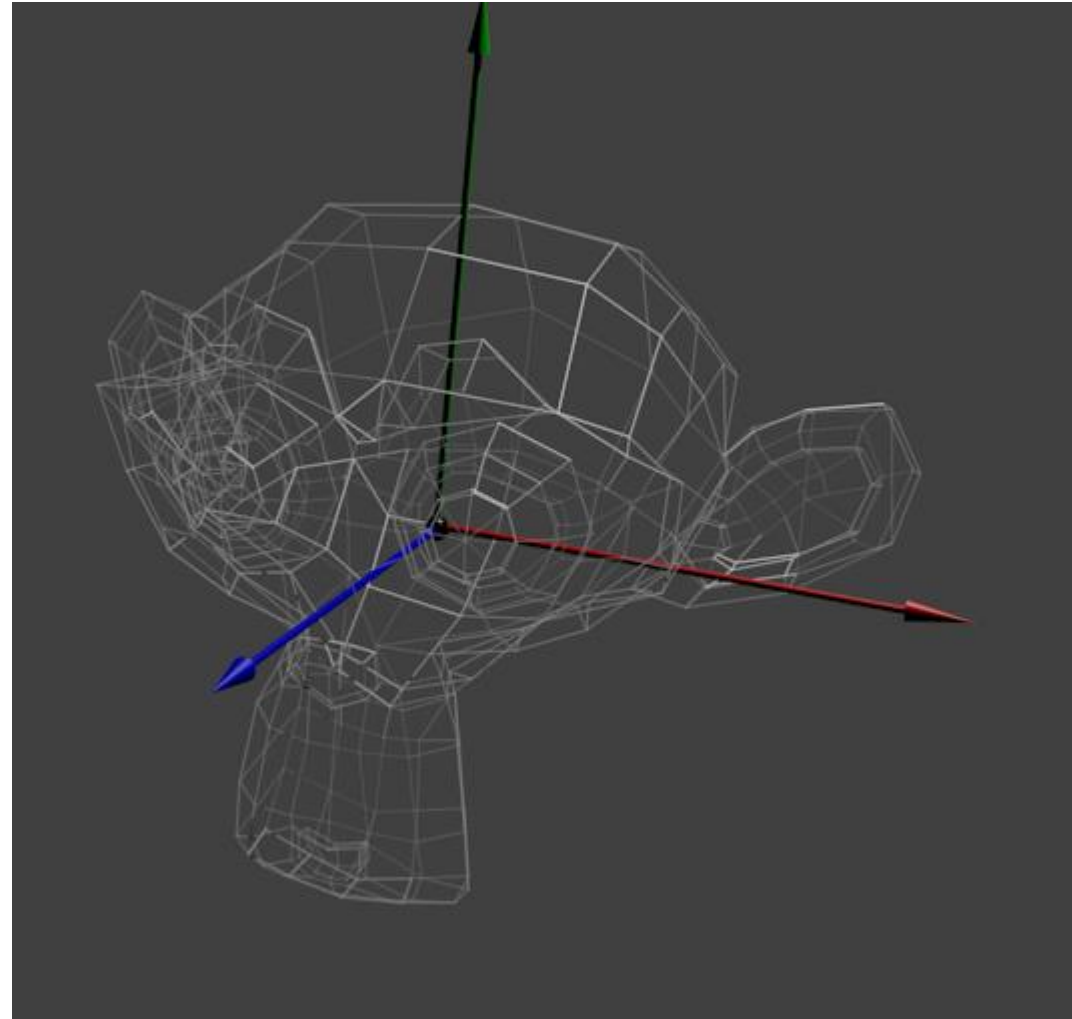
Компьютерная графика

Вопрос

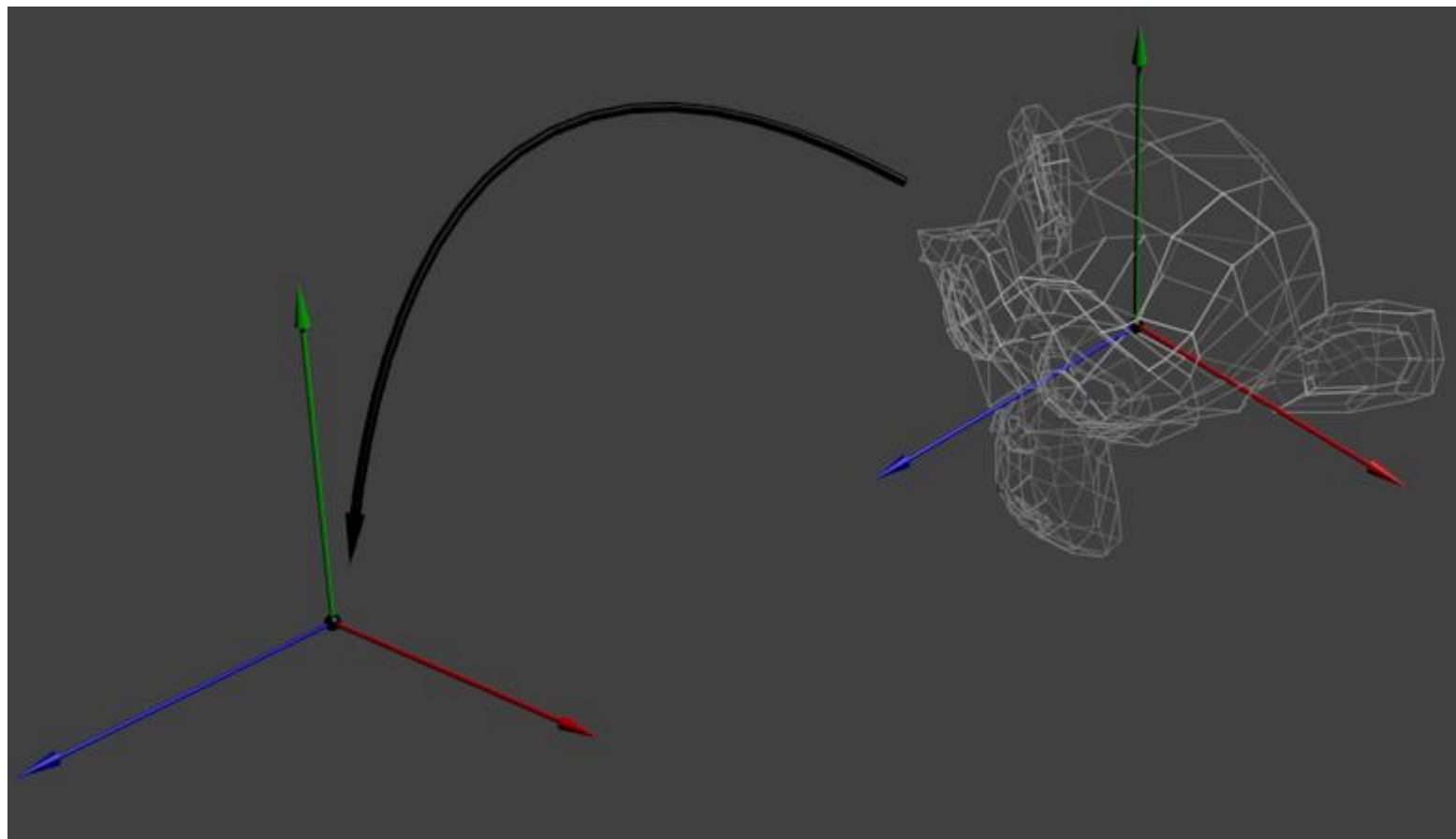
Как 3D объект нарисовать на 2D экране?

Модель в объектных координатах

Модель задается множеством вершин, координаты которых заданы относительно центра объекта, т. е. вершина с координатами $(0, 0, 0)$ будет находиться в центре объекта.

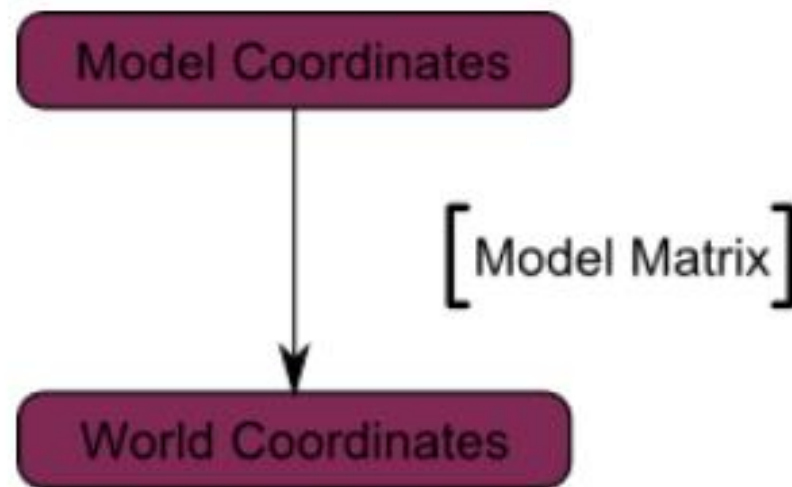


Преобразования к мировым координатам – мировая матрица

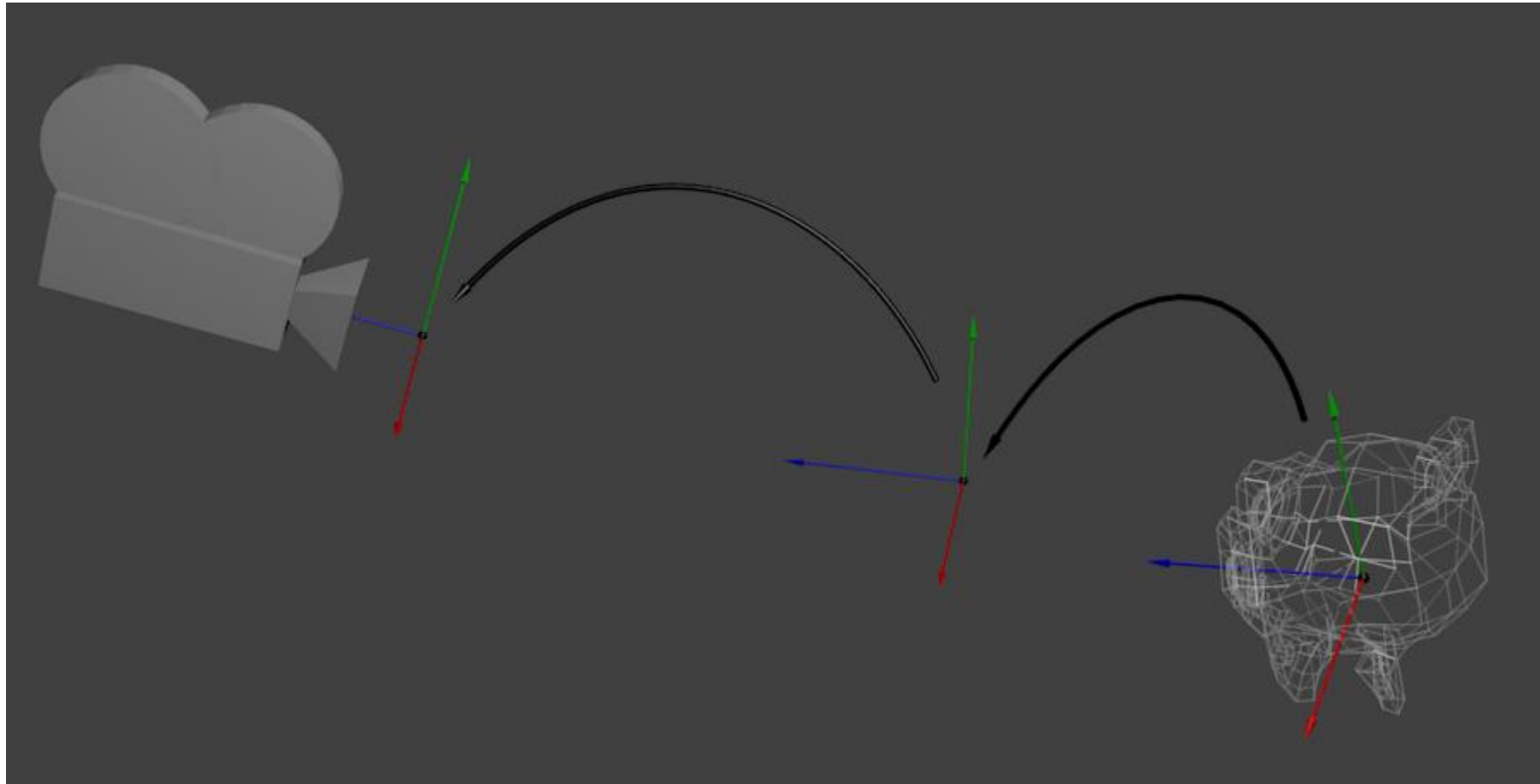


Преобразования к мировым координатам – мировая матрица

Мы перешли из пространства объекта
(все вершины заданы относительно центра объекта)
к мировому пространству
(все вершины заданы относительно центра мира)

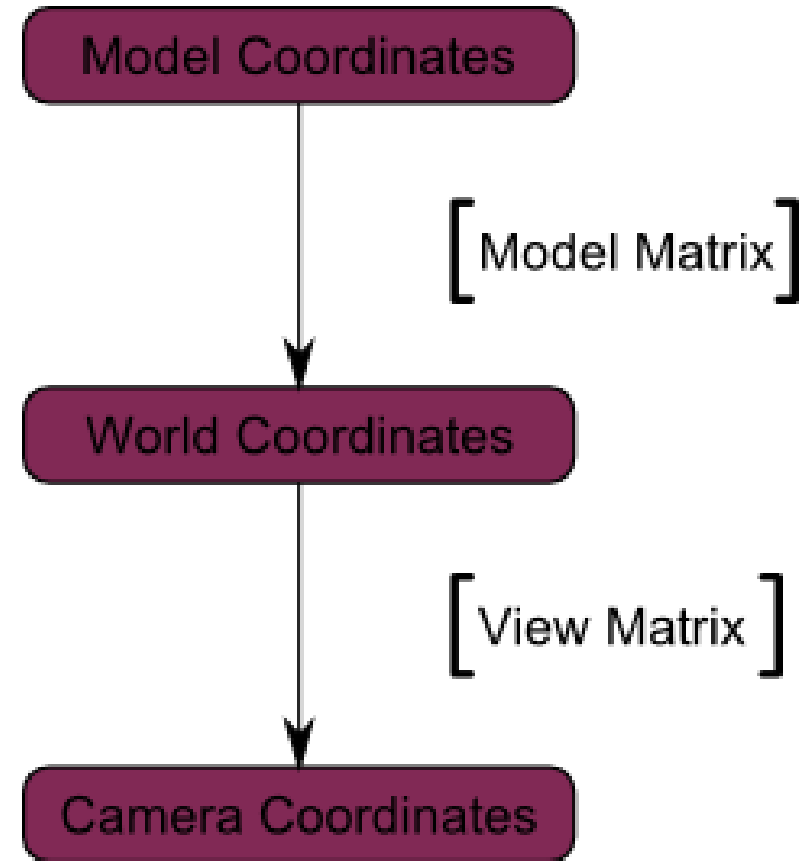


Переход к системе координат камеры – видовая матрица

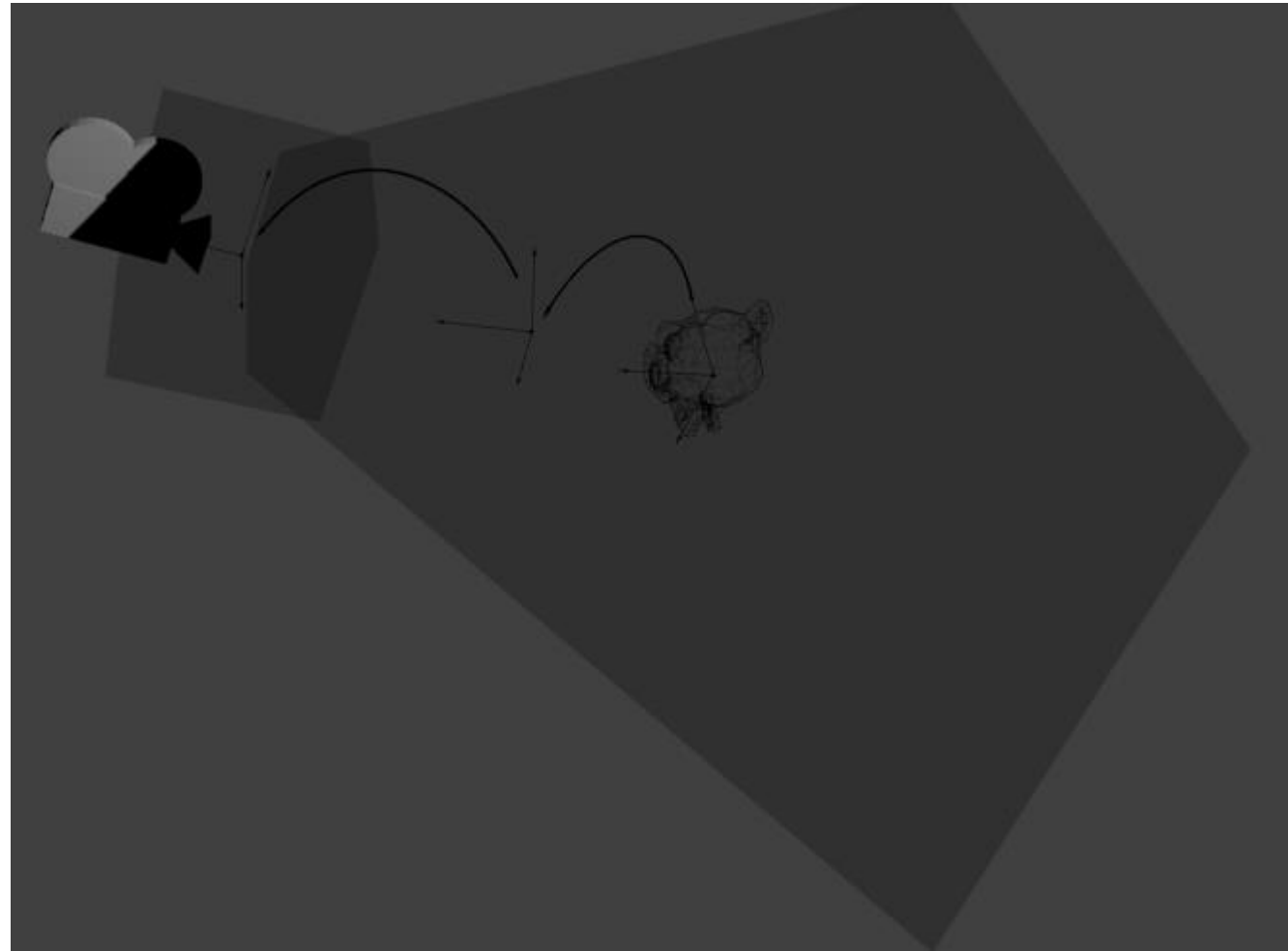


Преобразования к системе координат камеры – видовая матрица

Мы перешли из мировой системы координат
(все вершины заданы относительно центра мировой системы)
к системе координат камеры
(все вершины заданы относительно камеры)

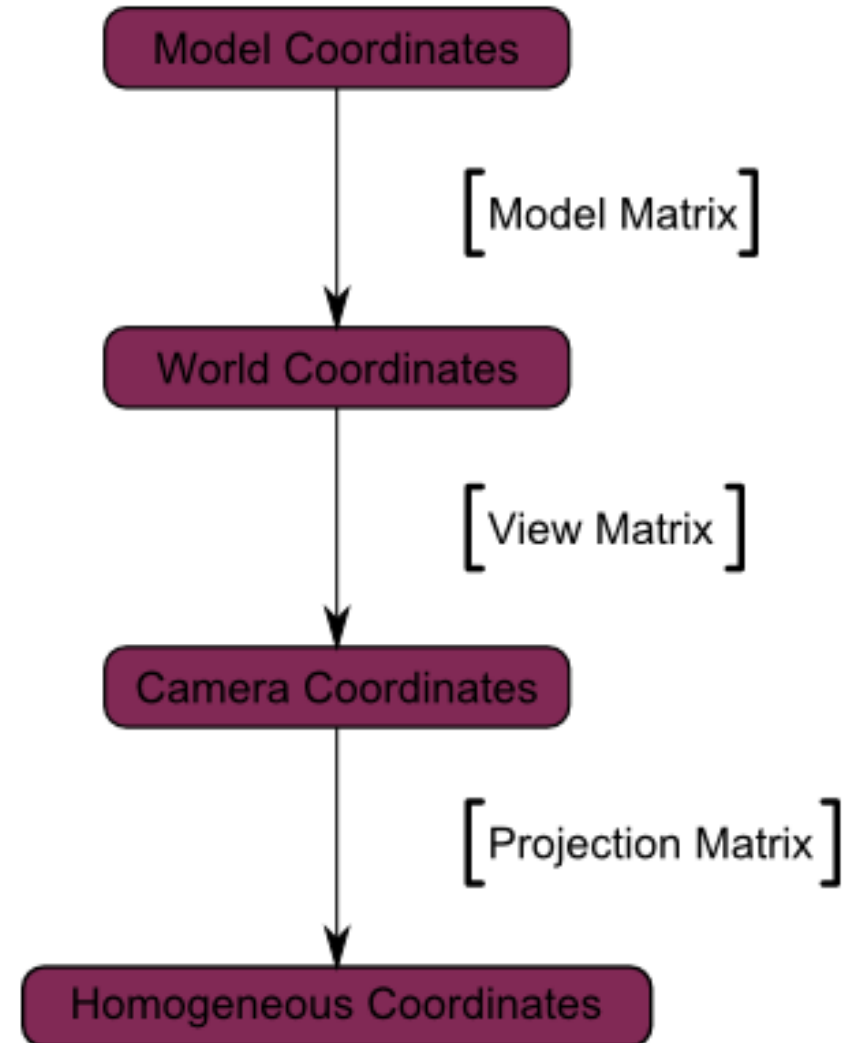


Переход из пространства камеры в однородное пространство



Преобразования к однородным координатам

Мы перешли из пространства камеры
(все вершины заданы относительно камеры)
в однородное пространство
(все вершины находятся в небольшом кубе.
Все, что находится внутри куба - выводится на экран).

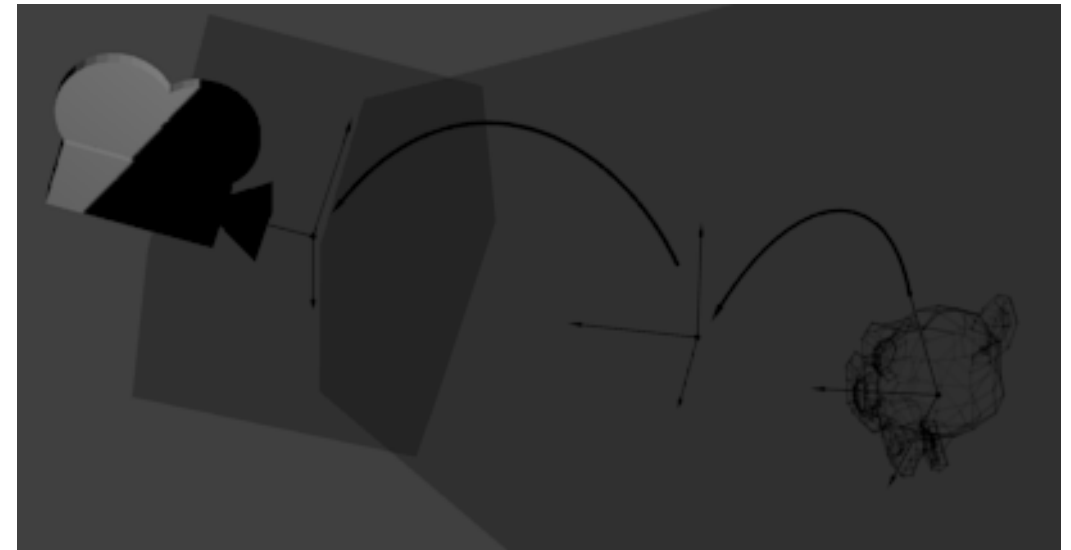


Перспективная проекция

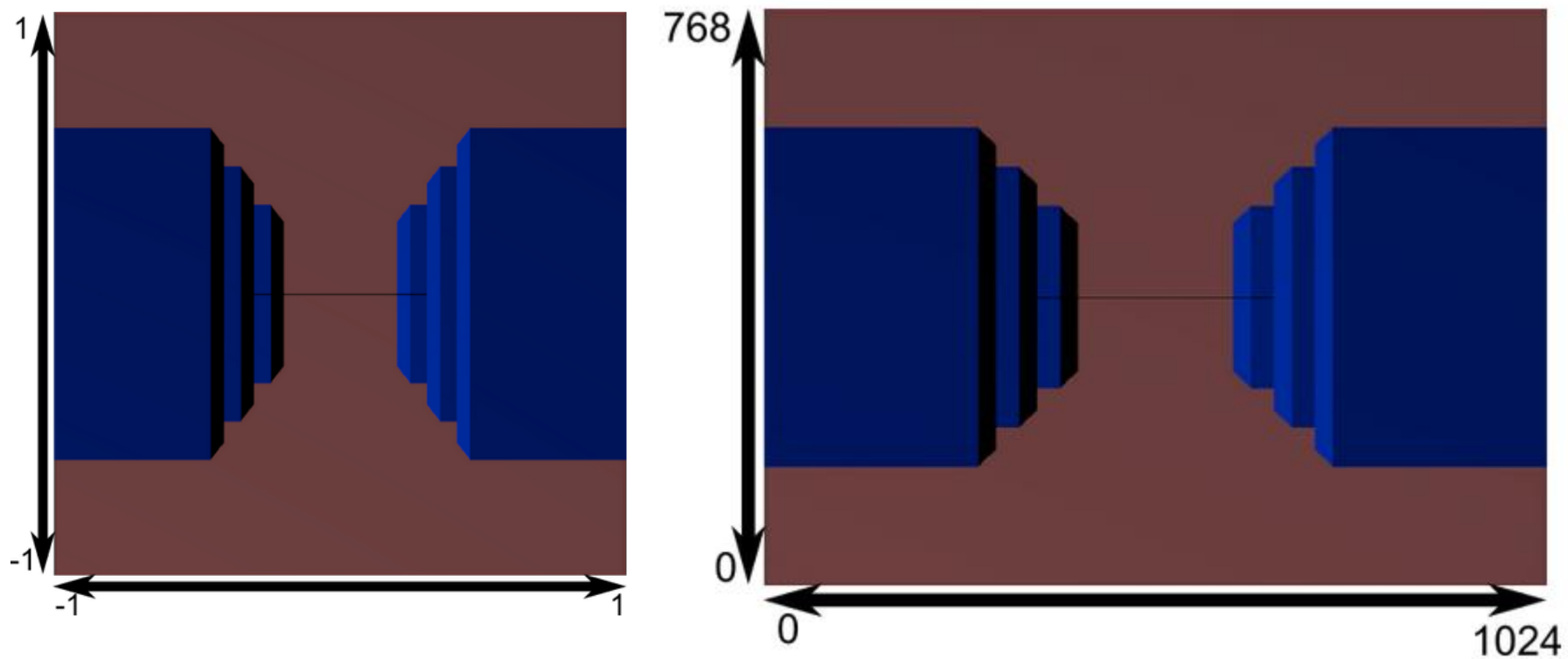
Вершина, которая получит координаты $x == 0$ и $y == 0$ будет отображаться по центру экрана.

Однако, при отображении объекта огромную роль играет также дистанция до камеры (z).

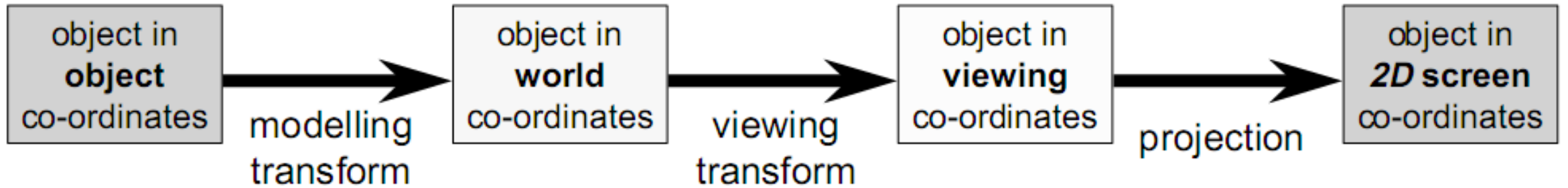
Для двух вершин, с одинаковыми x и y , вершина имеющая большее значение по z будет отображаться ближе, чем другая.



Последний шаг



Разнообразии преобразований – мировая, видовая и проекционная матрицы



- модельно-видовая как одна матрица (мировая x видовая)
- как мировая, так и видовая могут быть единичными

Аффинные преобразования в 3D

- аналогичны аффинным преобразования в 2D
- однородные координаты $(x, y, z, w) \rightarrow (x/w, y/w, z/w)$
- базовые преобразования
 - повороты вокруг осей
 - смещения
 - растяжения
 - отражения

Базовые аффинные преобразования

translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

identity

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about x -axis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

scale

$$\begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

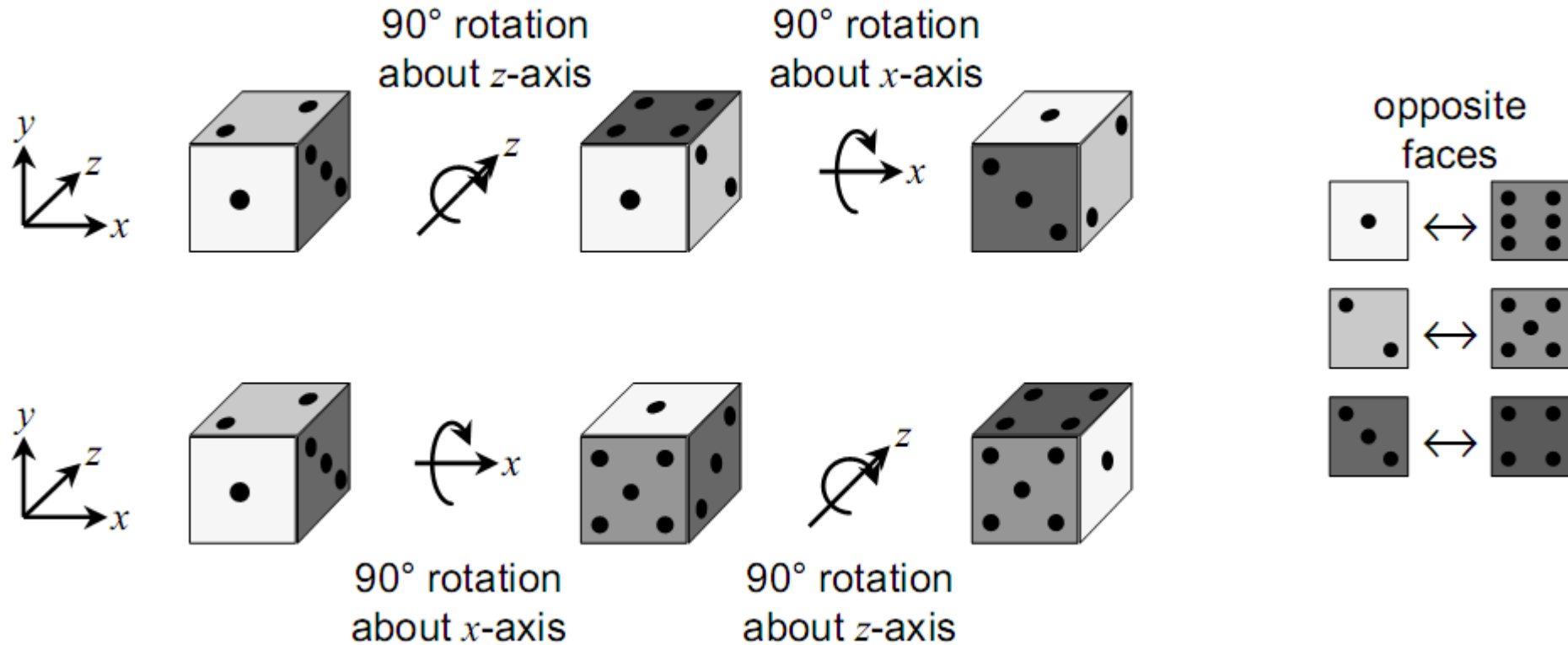
rotation about z -axis

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation about y -axis

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Преобразования некоммутативны



Задача

- Повернуть объект вокруг произвольной прямой L в пространстве на заданный угол.
- Объект задаётся списком вершин и списком рёбер.
- Прямая задаётся точкой $A(a,b,c)$, через которую она проходит, и единичным вектором (l,m,n) .

Результирующая матрица

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos \varphi (1 - l^2) & l(1 - \cos \varphi)m + n \sin \varphi & l(1 - \cos \varphi)n - m \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)m - n \sin \varphi & m^2 + \cos \varphi (1 - m^2) & m(1 - \cos \varphi)n + l \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)n + m \sin \varphi & m(1 - \cos \varphi)n - l \sin \varphi & n^2 + \cos \varphi (1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

План

1. Перенести прямую L в центр координат на $-A$ ($-a, -b, -c$)
2. Совместить прямую L с одной из координатных осей
3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
4. Выполнить преобразования 1 и 2 в обратной последовательности

Решение

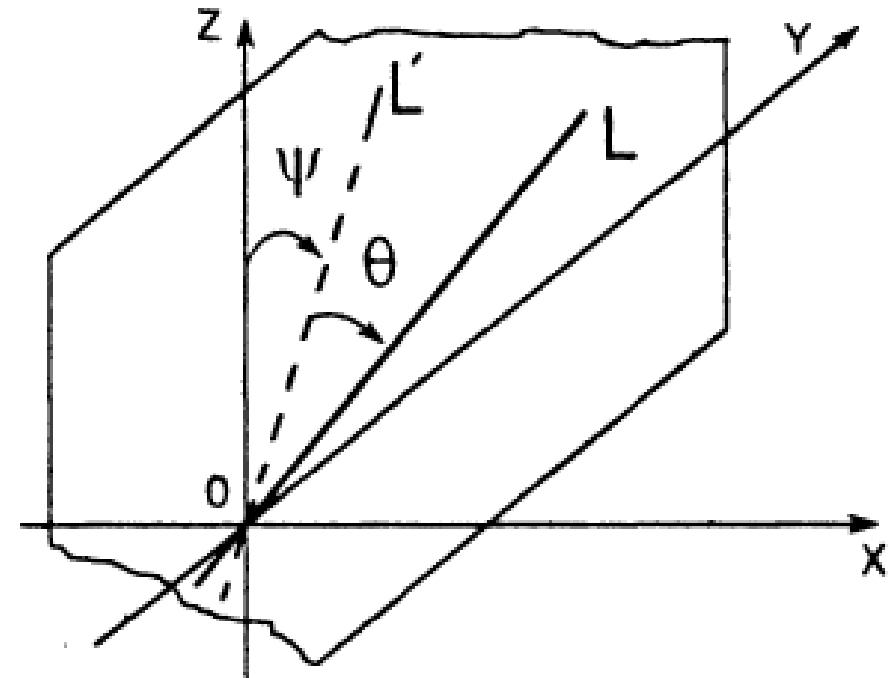
1. Перенести прямую L в центр координат на $-A (-a, -b, -c)$
2. Совместить прямую L с одной из координатных осей, например, Z
 - Повернуть прямую L вокруг Ox
 - Повернуть прямую L вокруг Oy
3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L
4. Выполнить повороты 2 в обратной последовательности на обратные углы
5. Выполнить перенос на $A (a, b, c)$

Перенос на $-A$ ($-a, -b, -c$)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

Совмещение прямой L с осью Z

- Повернуть прямую L вокруг Ox на угол ψ
- Повернуть прямую L вокруг Oy на угол θ

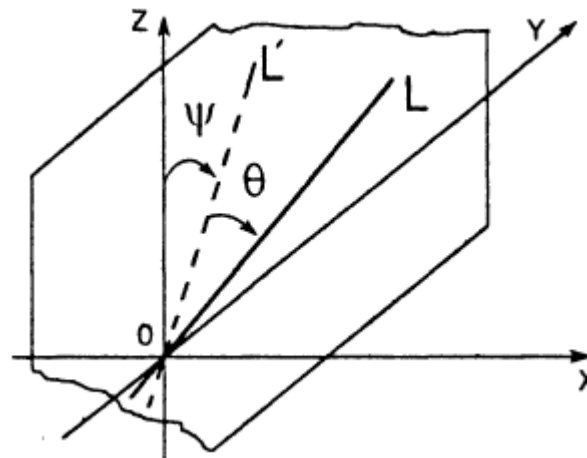


Поворот прямой L вокруг Oх на угол ψ

Рассмотрим L' – проекцию на YZ – (0,m,n)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & \frac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(l, m, n, 1)[R_x] = (l, 0, d, 1)$$



$$\cos \psi = \frac{n}{d}, \quad \sin \psi = \frac{m}{d},$$

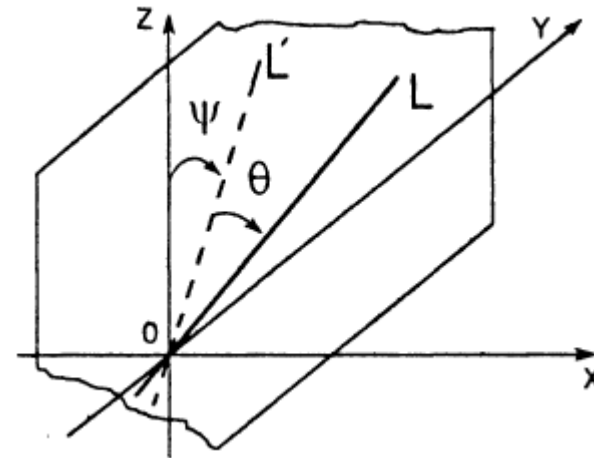
$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Поворот прямой L вокруг Oy на угол θ

$$(l, m, n, l)[R_x] = (l, 0, d, l)$$

$$\cos \theta = l, \quad \sin \theta = -d.$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$d = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Поворот объекта вокруг прямой L на угол φ

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратные преобразования

- Поворот прямой L вокруг Oх на угол $-\theta$
- Поворот прямой L вокруг Oу на угол $-\psi$
- Перенос на A (a, b, c)

$$[T][R_x][R_y][R_z][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1}$$

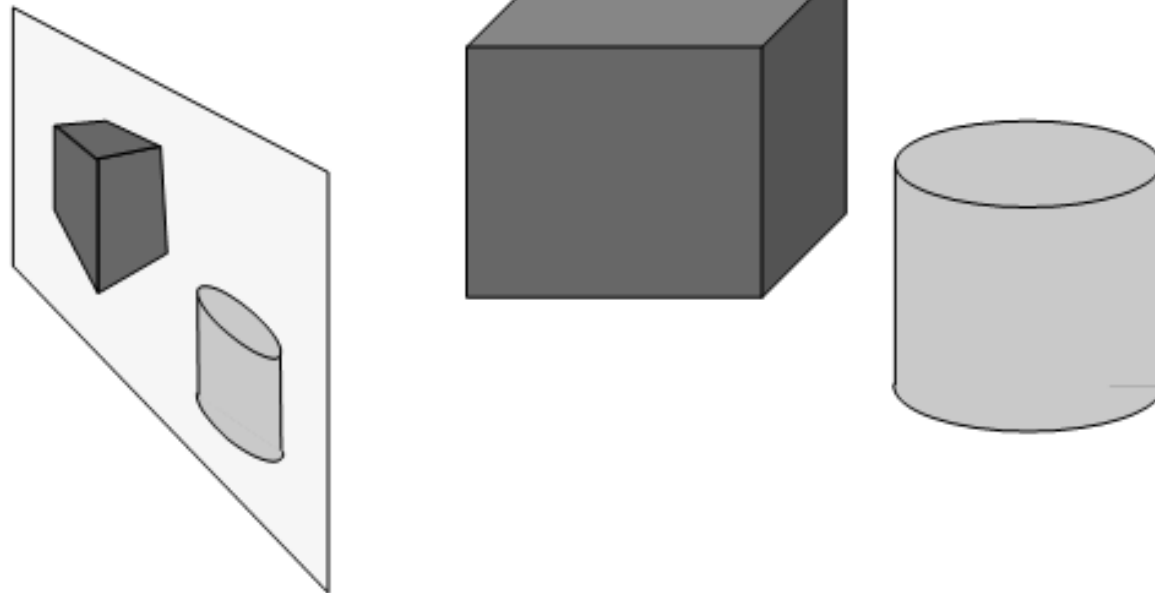
Результирующая матрица

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos \varphi (1 - l^2) & l(1 - \cos \varphi)m + n \sin \varphi & l(1 - \cos \varphi)n - m \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)m - n \sin \varphi & m^2 + \cos \varphi (1 - m^2) & m(1 - \cos \varphi)n + l \sin \varphi & 0 \\ l(1 - \cos \varphi)n + m \sin \varphi & m(1 - \cos \varphi)n - l \sin \varphi & n^2 + \cos \varphi (1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для других задач (в общем виде)

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

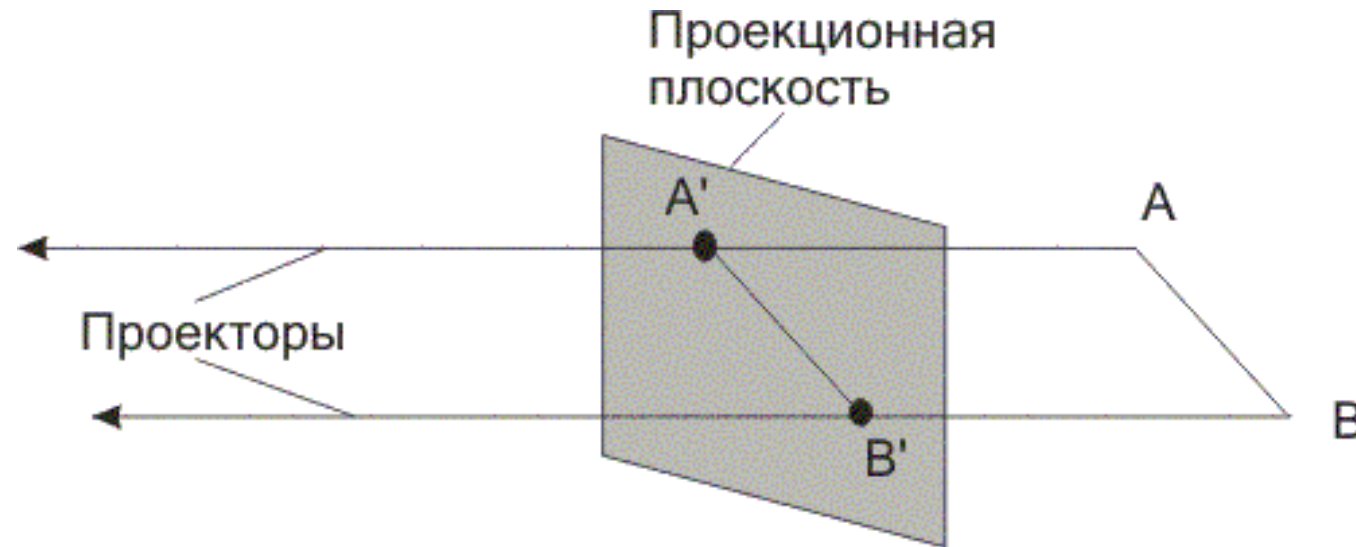
Проецирование



Основные типы проекций

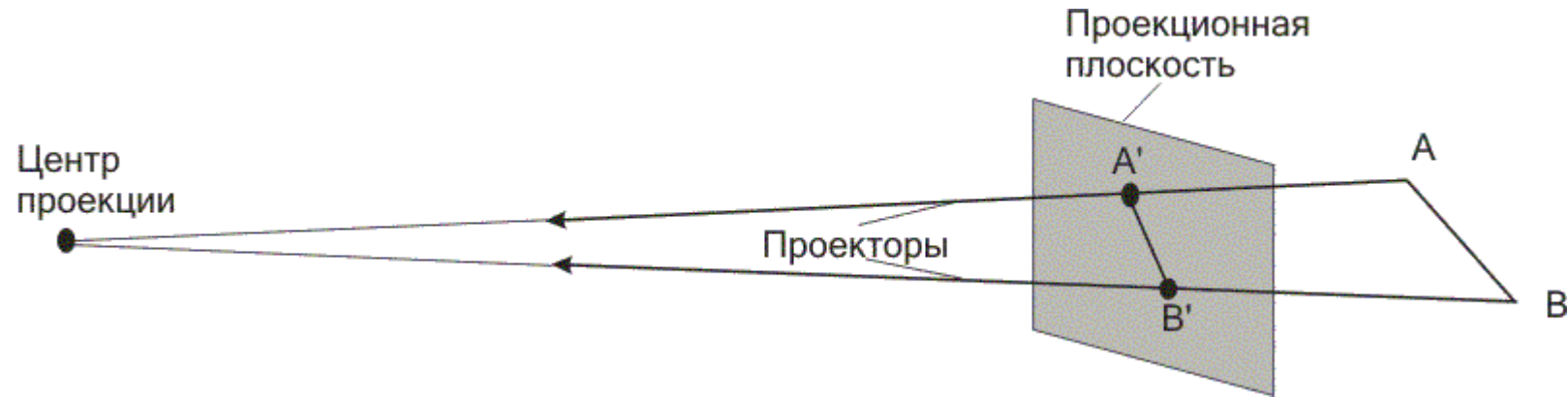
- Параллельная
- Центральная (перспективная)

Параллельная проекция



- $(x,y,z) \rightarrow (x,y)$
- используется в САПР (CAD), архитектуре и т.п.
- выглядит нереалистично

Центральная (перспективная) проекция



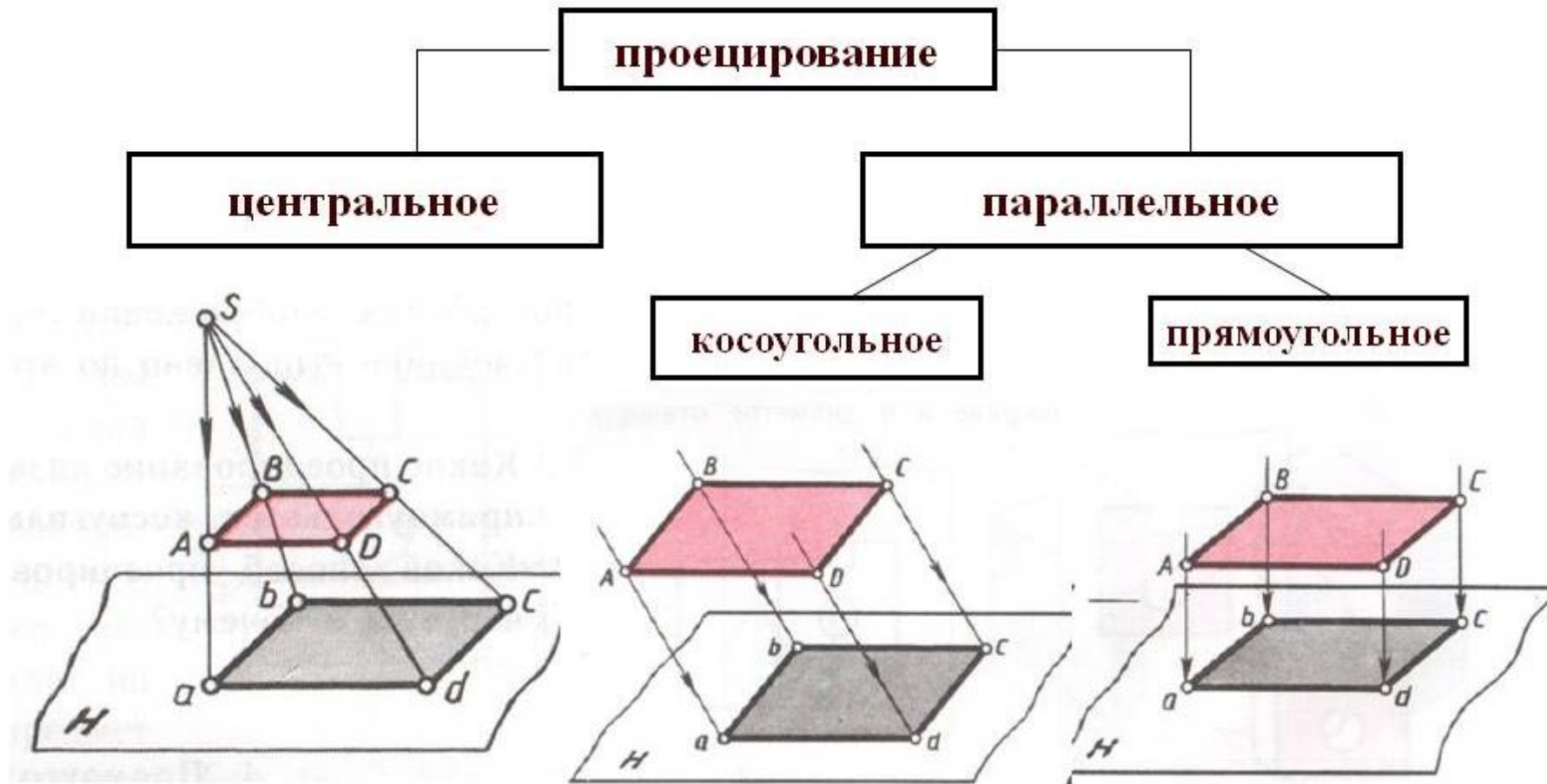
- $(x,y,z) \rightarrow (x/z,y/z)$
- уменьшение с удалением
- выглядит реалистично
- так работают камеры

Перспективное преобразование

ПП – это преобразование одного трёхмерного пространства в другое, при котором:

- параллельные прямые сходятся,
- размер объекта уменьшается с увеличением расстояния до центра наблюдения,
- и происходит неоднородное искажение линий объекта, зависящее от ориентации и расстояния от объекта до центра проекции.

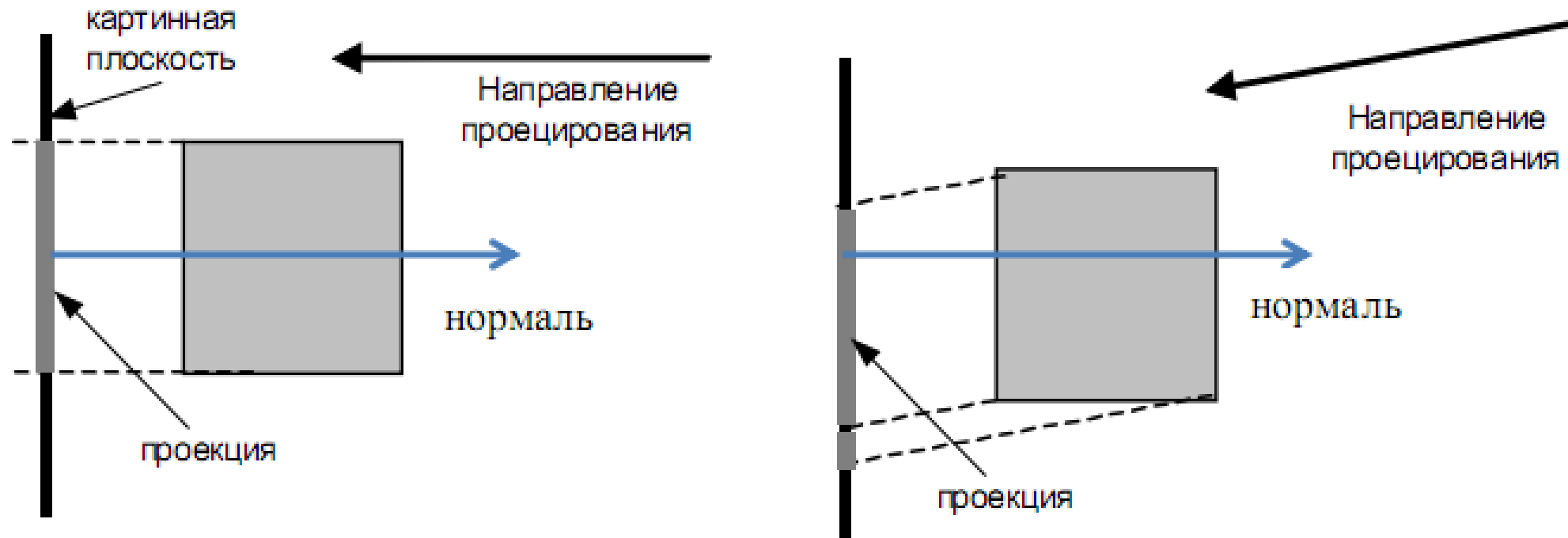
Это помогает нашему восприятию глубины, но не сохраняет форму объекта.



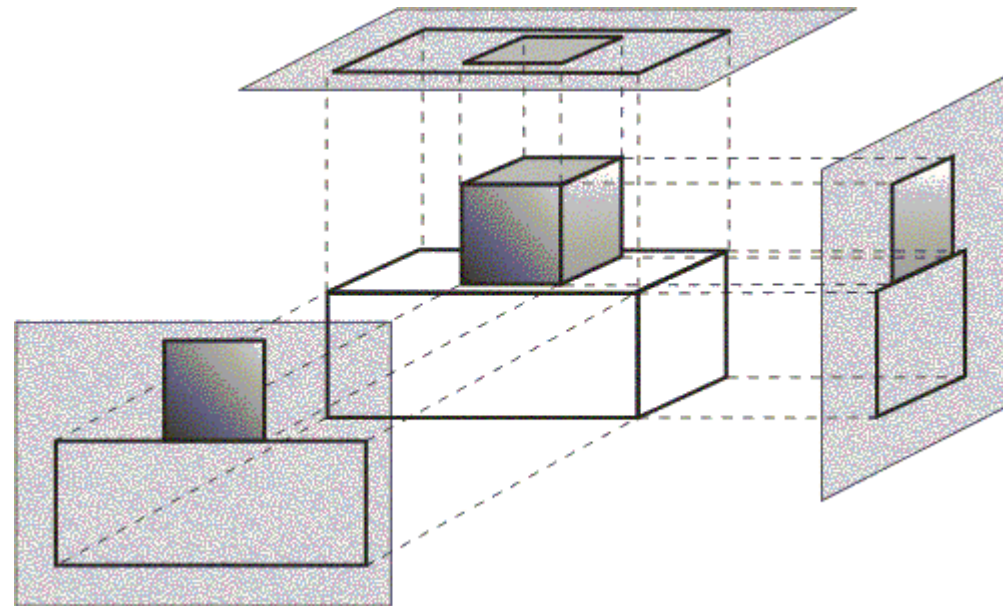
Классификация параллельных проекций



Ортографические, аксонометрические и косоугольные проекции



Ортографические проекции

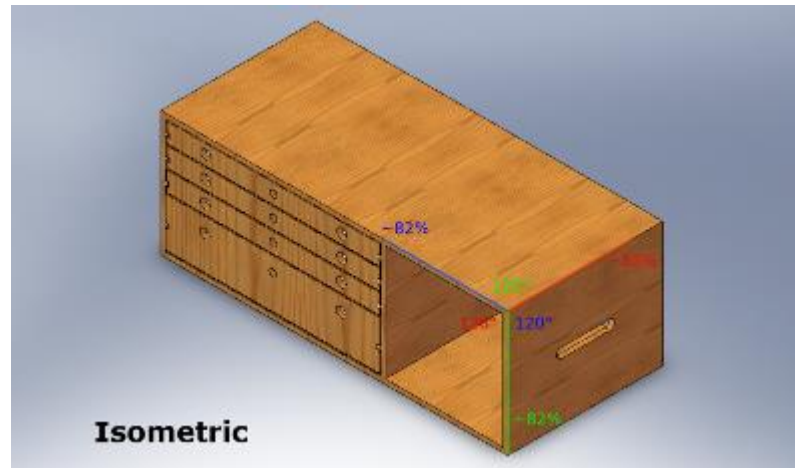
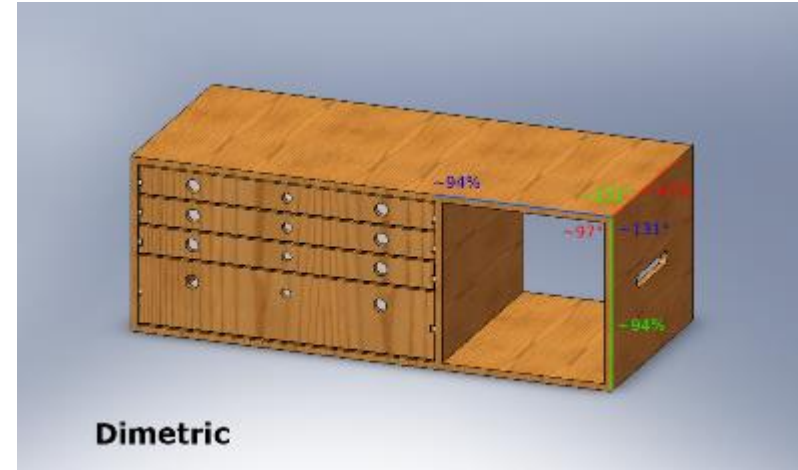
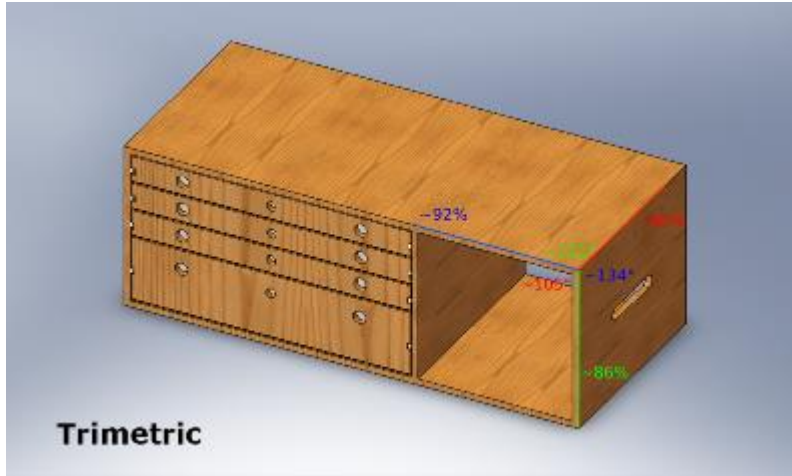


Ортографические проекции

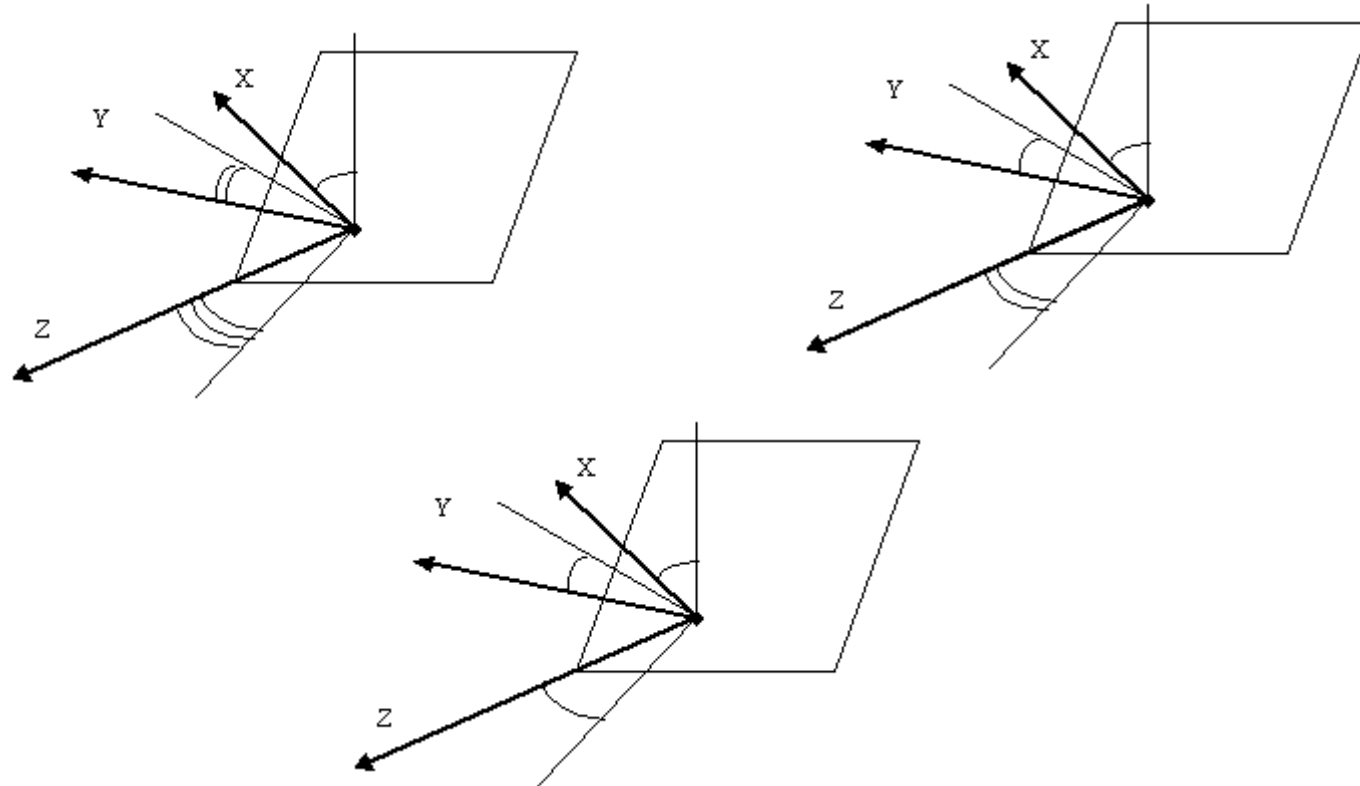
$$[P_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [P_x] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{bmatrix}$$

АксонOMETрические проекции



АксонOMETрические проекции



АксонOMETрические проекции

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\varphi\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\ \sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

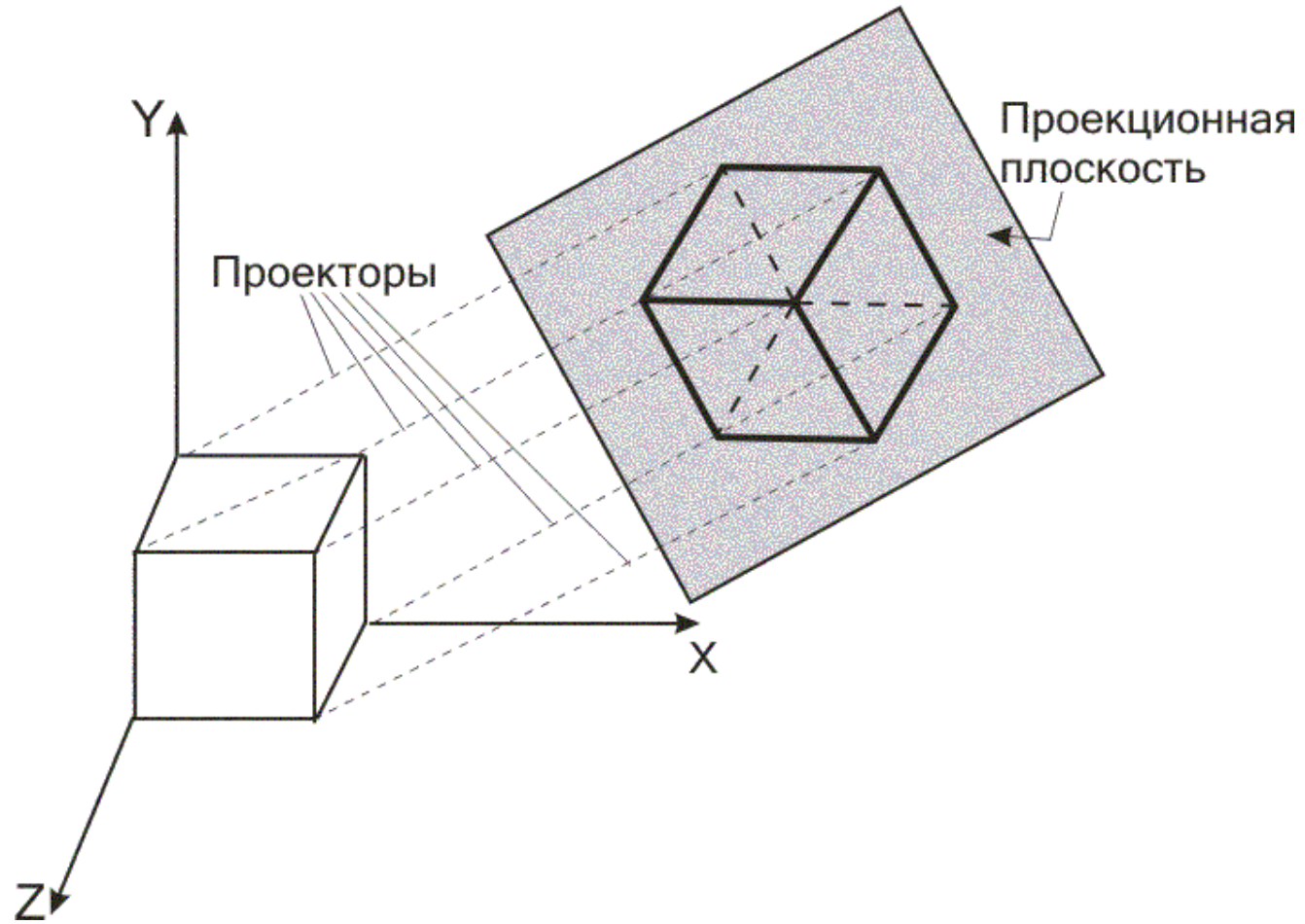
Преобразование единичных орт координатных осей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * [M] = (\cos\psi \quad \sin\varphi\sin\psi \quad 0 \quad 1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * [M] = (0 \quad \cos\varphi \quad 0 \quad 1)$$

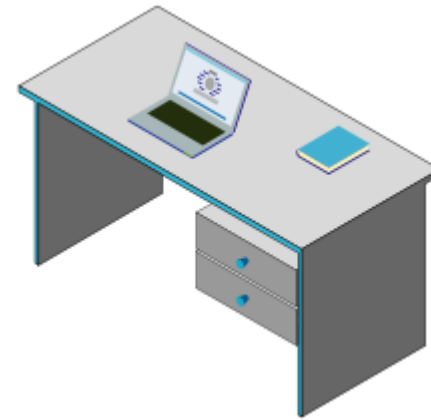
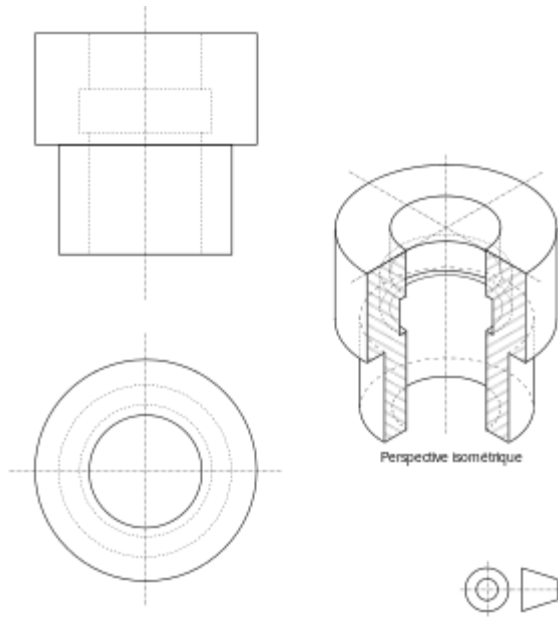
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * [M] = (\sin\psi \quad -\sin\varphi\cos\psi \quad 0 \quad 1)$$

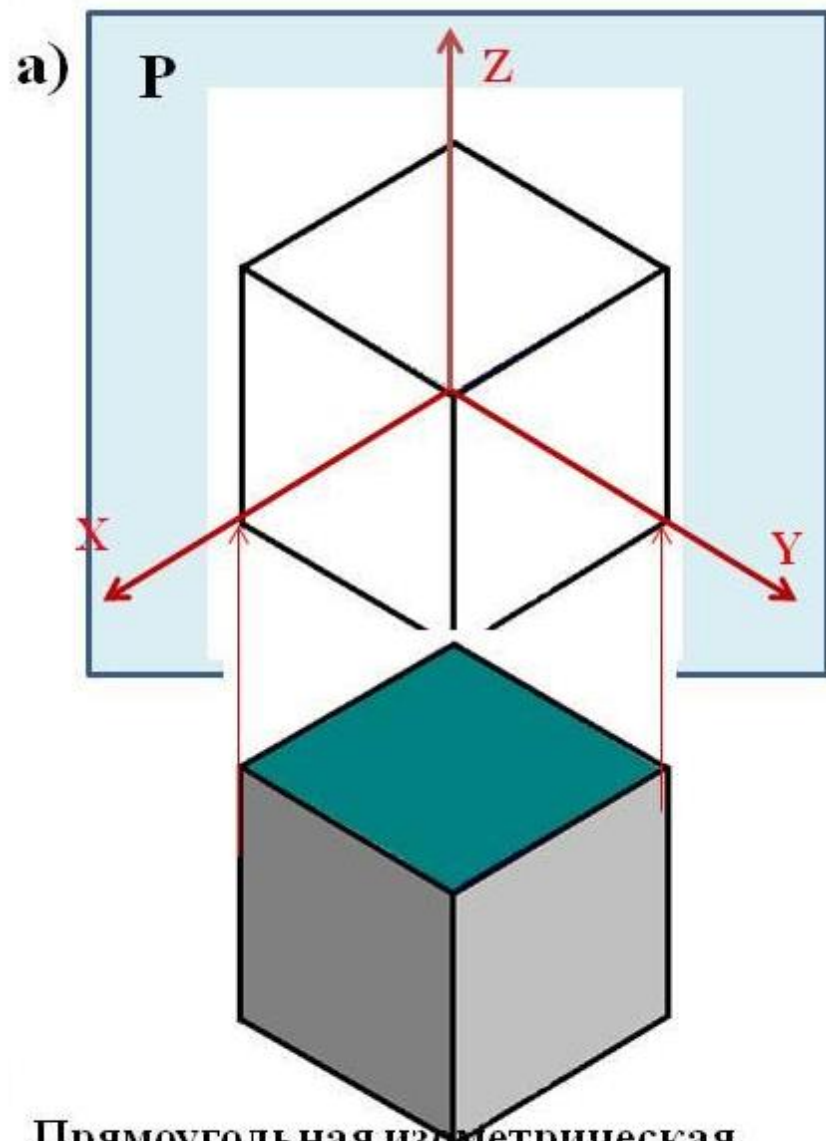
Изометрическая проекция



Изометрическая проекция

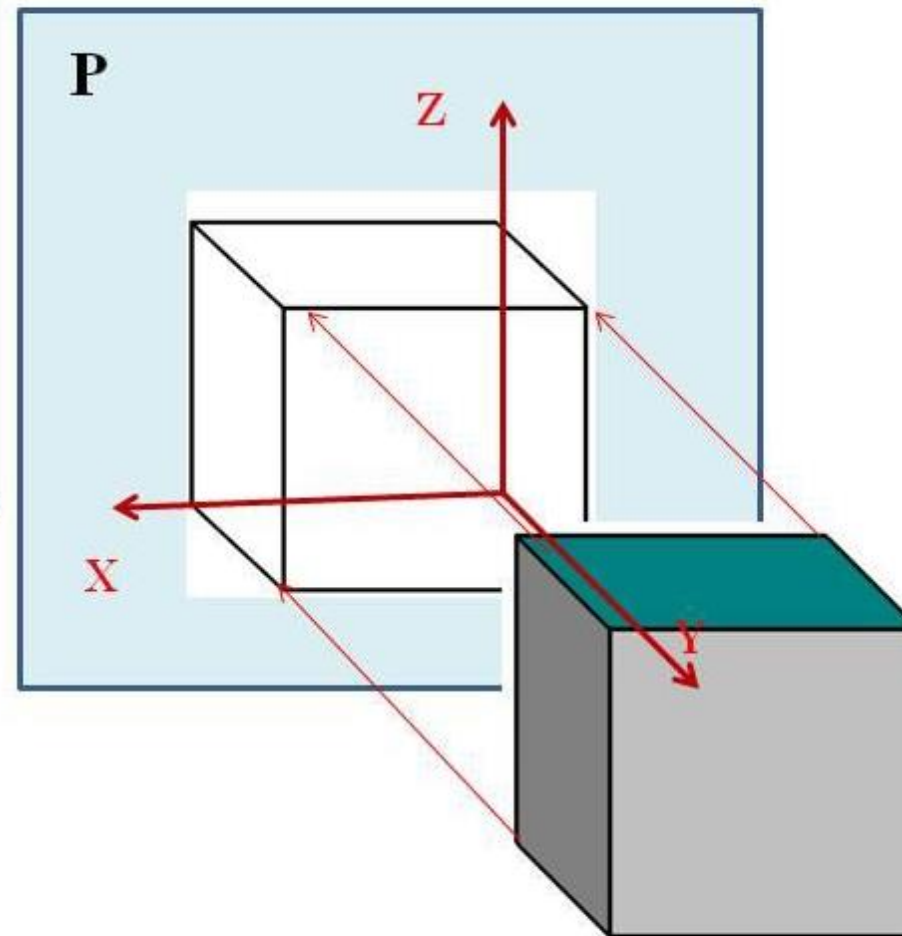
- Используется
 - в машиностроительном черчении и САПР для построения наглядного изображения детали на чертеже,
 - а также в компьютерных играх для трёхмерных объектов и панорам.



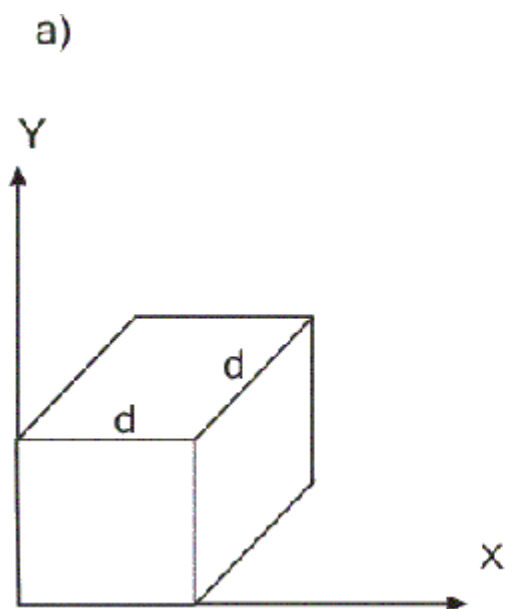


Прямоугольная изометрическая проекция

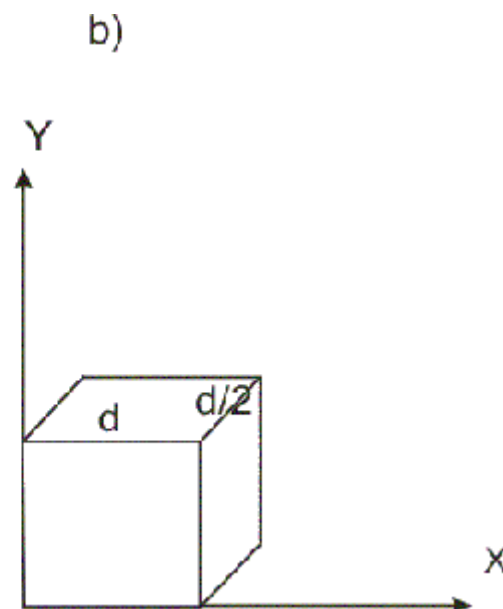
б) Косоугольная фронтальная диметрическая проекция



Проекции: кавалье (cavalier) и кабине (cabinet)

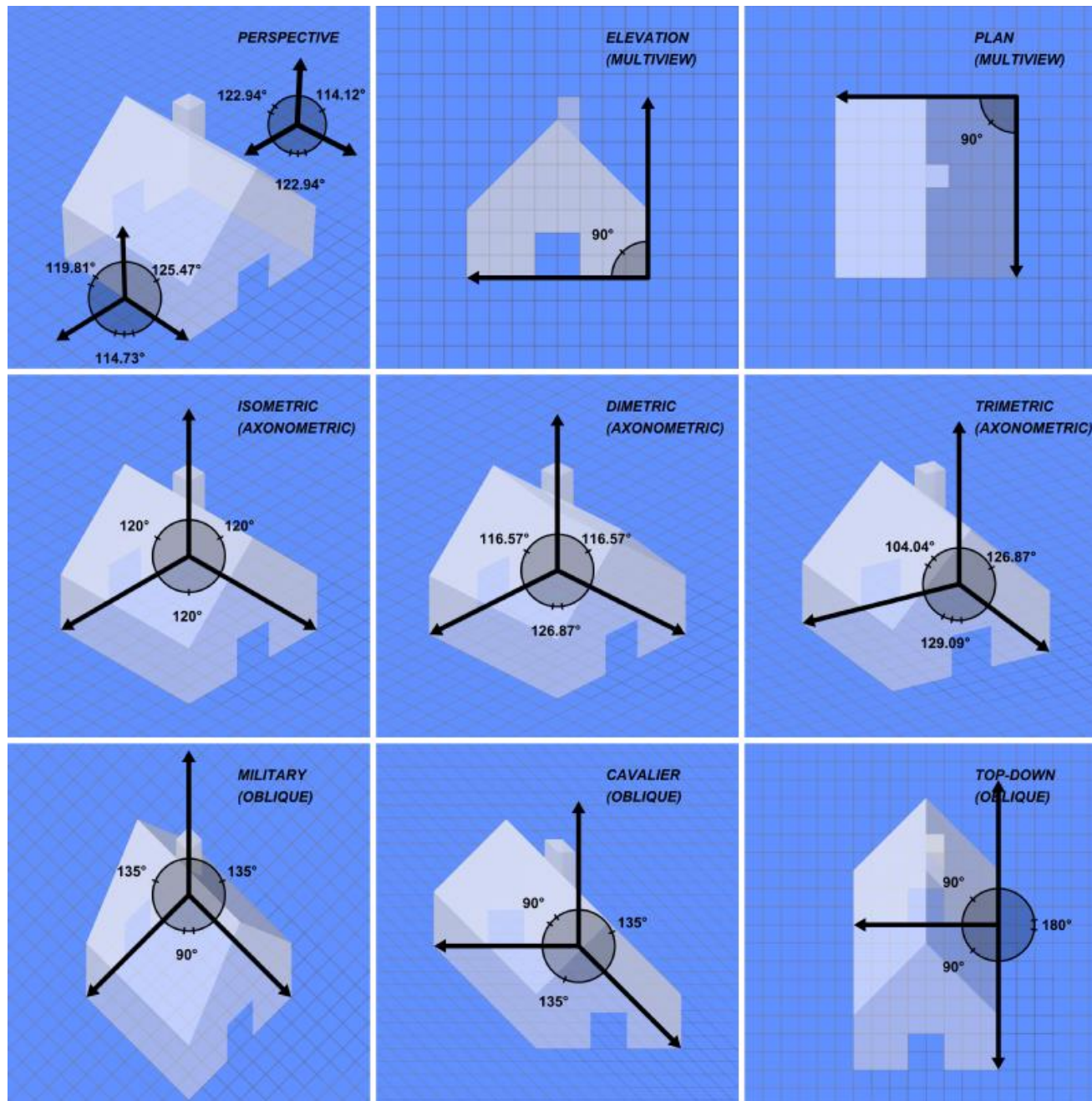


$$\alpha = \beta = \cos \frac{\pi}{4}$$



$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

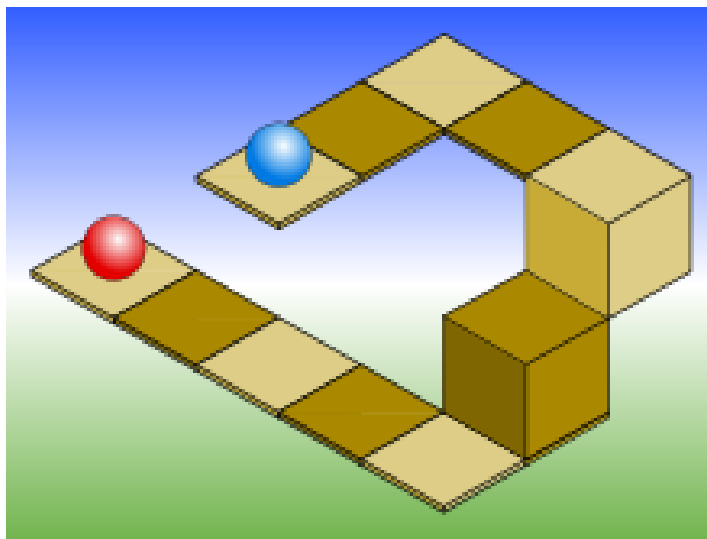


Ограничения аксонометрической проекции

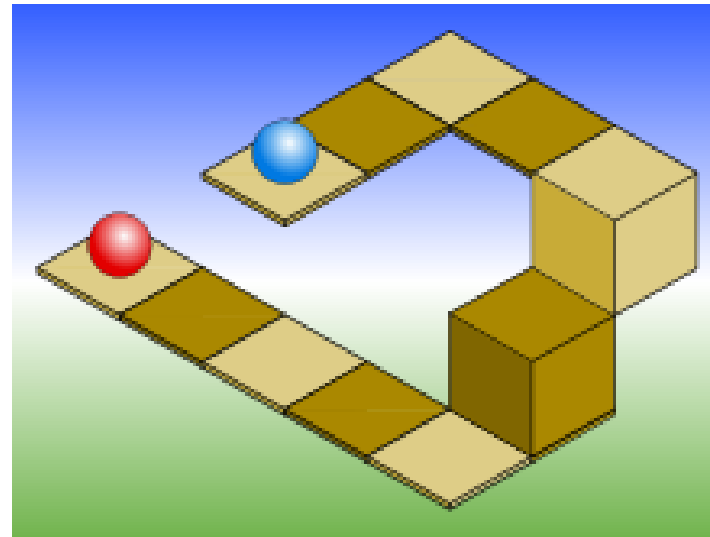
Как и в других видах параллельных проекций, объекты в аксонометрической проекции не выглядят больше или меньше при приближении или удалении от наблюдателя.

Это удобно в спрайто-ориентированных компьютерных играх, но, в отличие от перспективной проекции, приводит к ощущению искривления, поскольку человеческий глаз работает иначе.

Ограничения аксонометрической проекции: что вы видите?



Ограничения аксонометрической проекции: что на самом деле



Голубой шар на два уровня выше красного

«Водопад» — литография голландского художника Эшера (октябрь 1961)



«Водопад» — парадокс



Изображён парадокс — падающая вода водопада управляет колесом, которое направляет воду на вершину водопада. Водопад имеет структуру «невозможного» треугольника Пенроуза: Водопад на литографии работает как вечный двигатель.

Треугольник Пенроуза

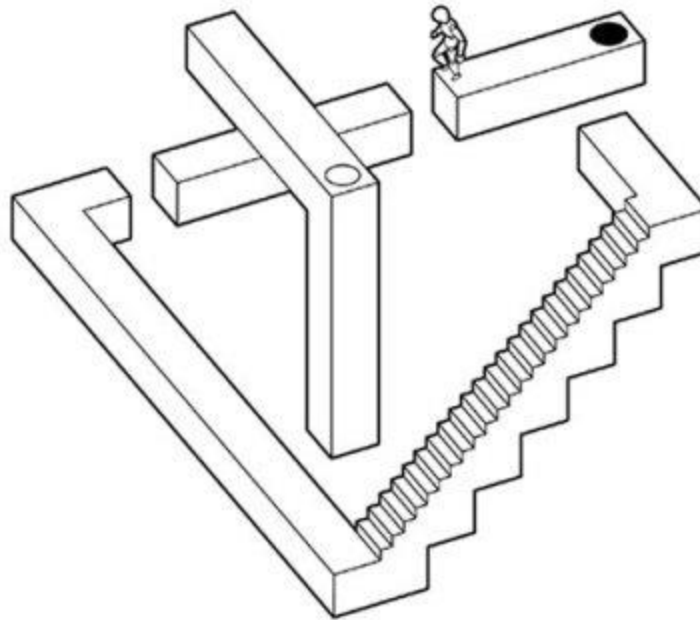


Скульптура, кажущийся
треугольник, [Немецкий
технический музей](#)



Та же скульптура при
изменении точки
просмотра

Кадр из игры «echochrome»



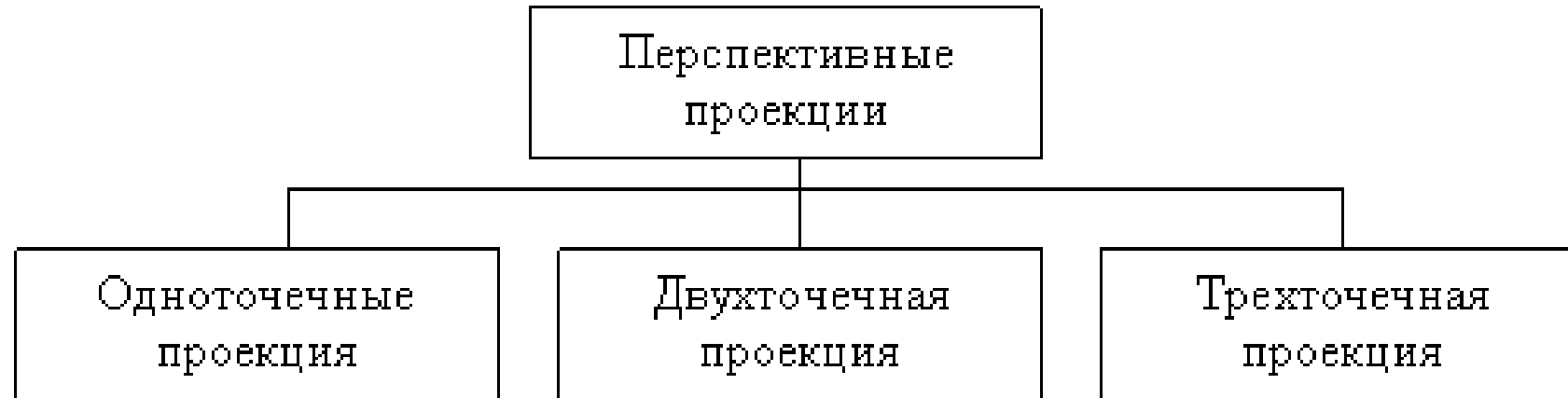
Слоган игры — «В этом мире то, что ты видишь, становится реальностью»

Аркадные игры начала 1980-х

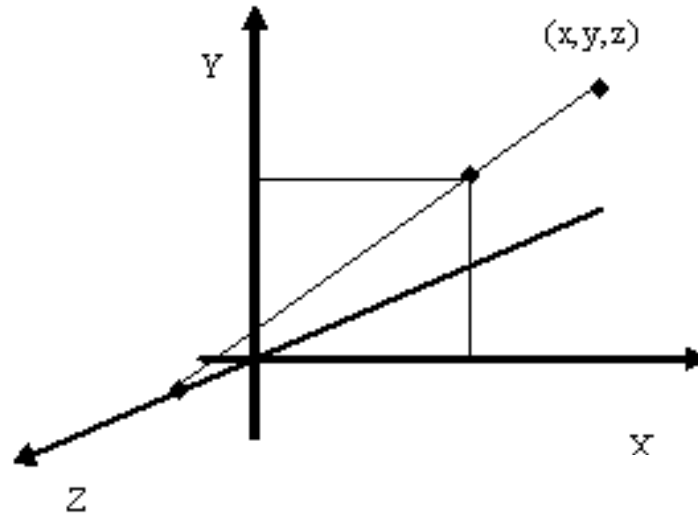


Q*bert (1982) — одна из первых игр с изометрической графикой

Классификация центральных проекций



Центральные проекции

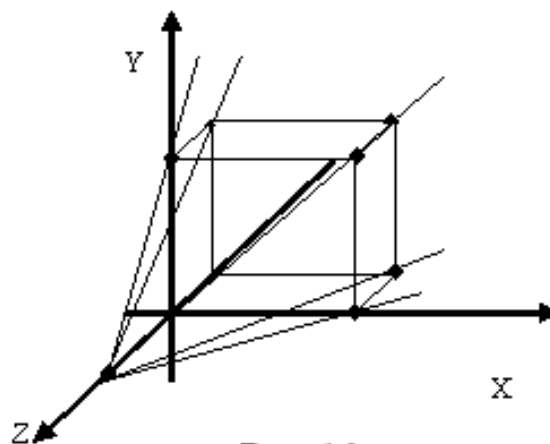


$$X^* = xt, \quad Y^* = yt, \quad Z^* = c + (z - c)t$$

$$X^* = \frac{1}{1 - \frac{z}{c}} x, \quad Y^* = \frac{1}{1 - \frac{z}{c}} y, \quad t^* = \frac{1}{1 - \frac{z}{c}}$$

$$(x \ y \ z \ 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (x \ y \ 0 \ 1 - z/c) \begin{pmatrix} \frac{x}{1 - \frac{z}{c}} & \frac{y}{1 - \frac{z}{c}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицы перспективных преобразований



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a \\ 0 & 1 & 0 & -1/b \\ 0 & 0 & 1 & -1/c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Одноточечная, двухточечная и трёхточечная проекции

