

Фракталы



в компьютерной графике

Бенуа Мандельброт



1975 год

"Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"

для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур

fractus в переводе означает **состоящий из фрагментов**

Фрактальная геометрия

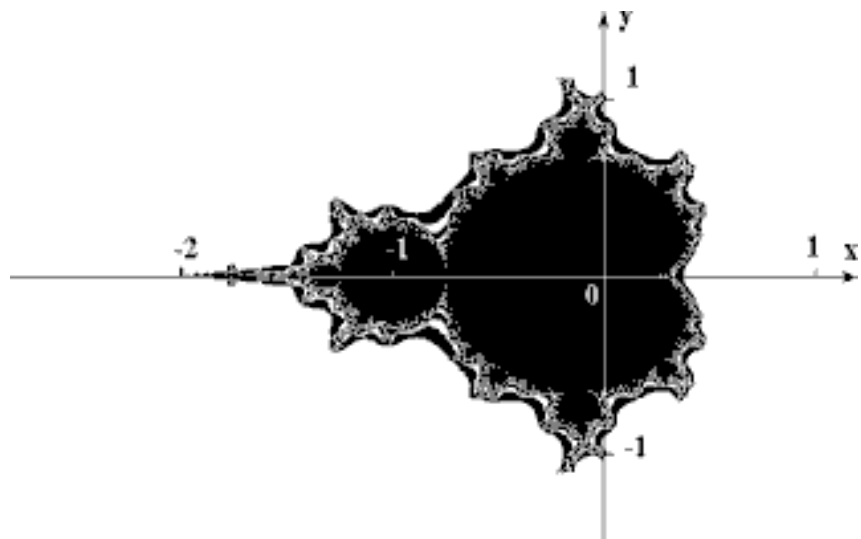
1977 год – книга Мандельброта

The Fractal Geometry of Nature

1875-1925 г.г. – Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф

Впервые множество Мандельброта было описано в [1905 году](#) [Пьером Фату](#) (Pierre Fatou), французским математиком,

Множество Мандельброта



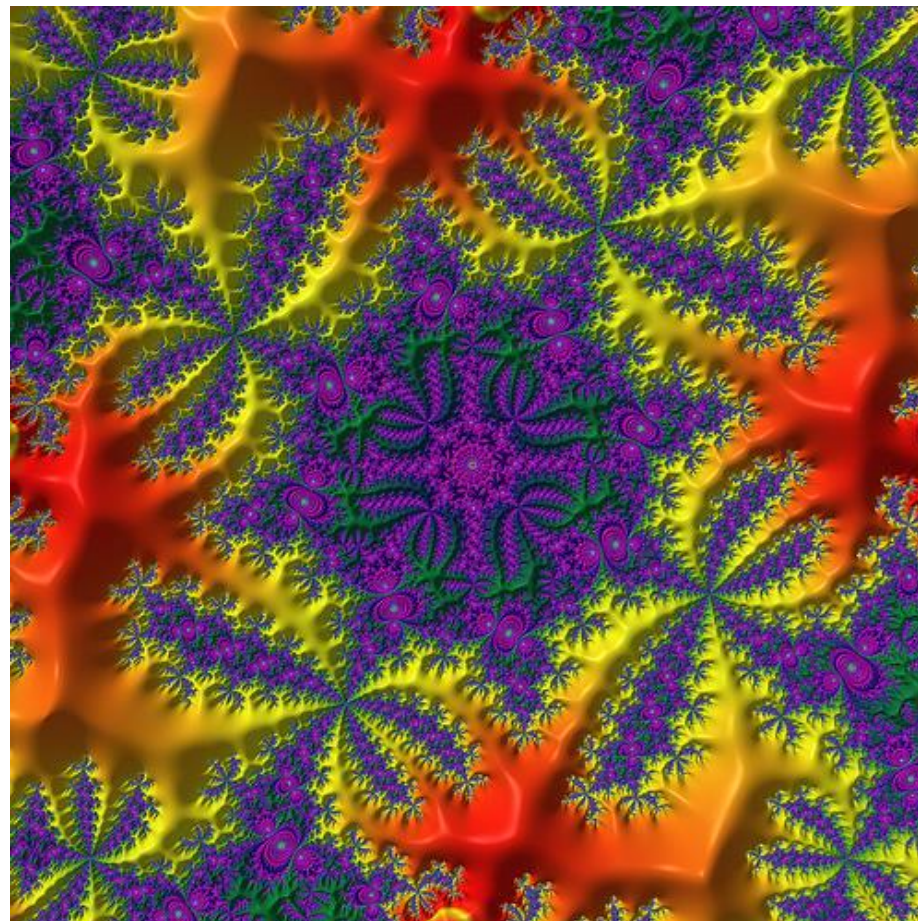
$$Z[i+1]=Z[i]*Z[i]+C$$



Классификация фракталов

- Геометрические фракталы
- Алгебраические фракталы
- Стохастические фракталы

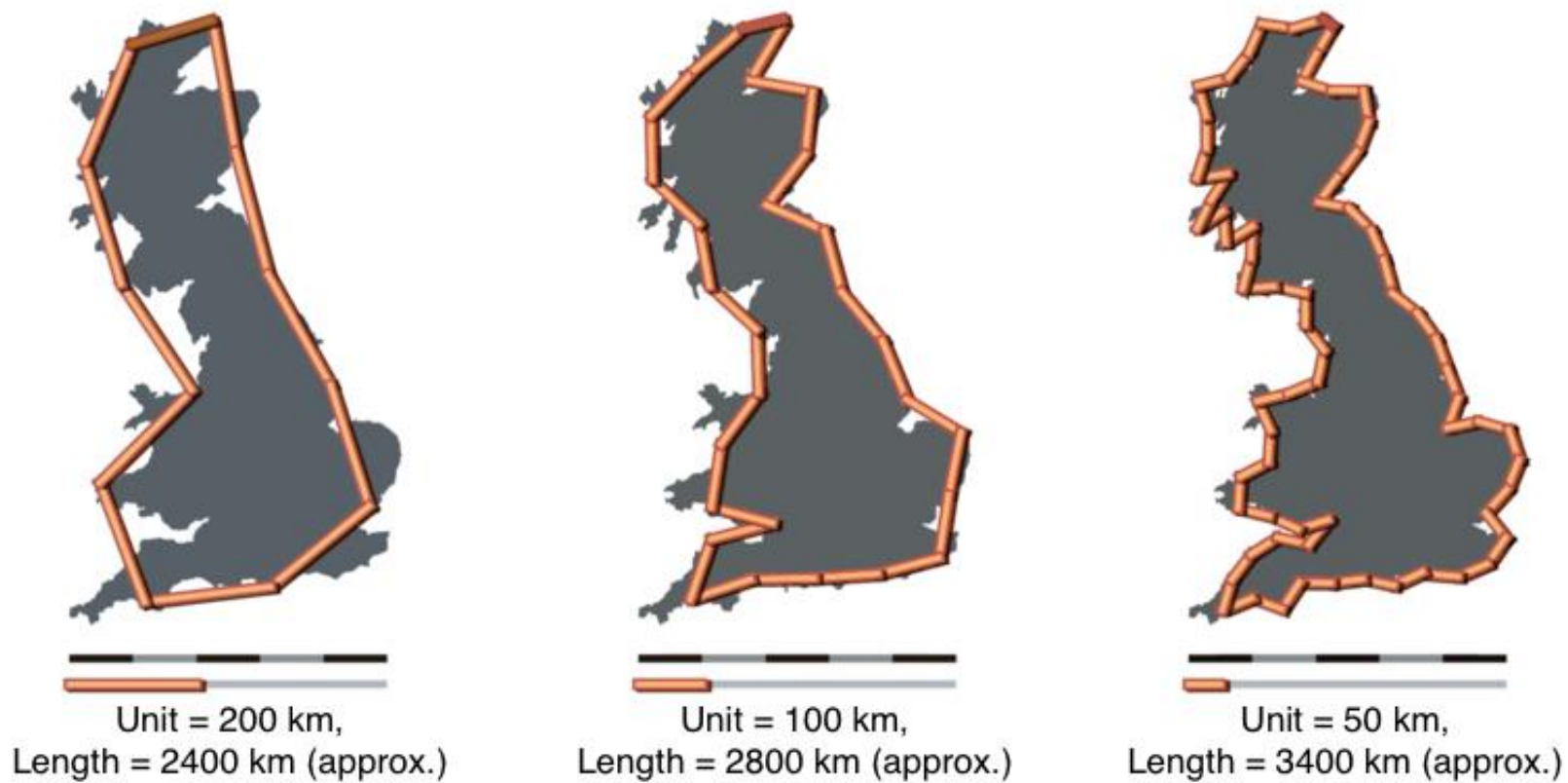
Примеры фракталов



Береговая линия



Построение береговой линии



Болота



Горная система



Капуста

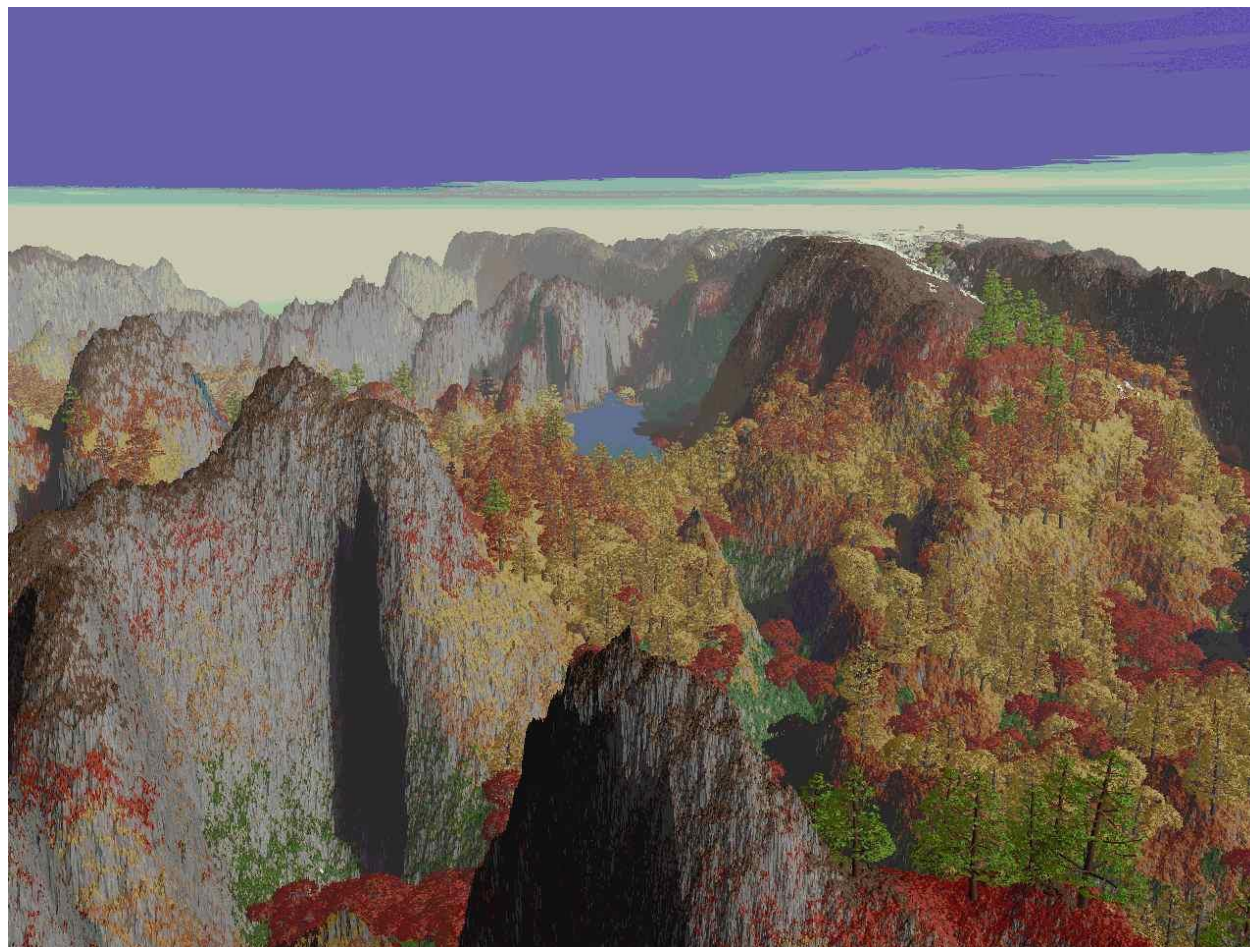




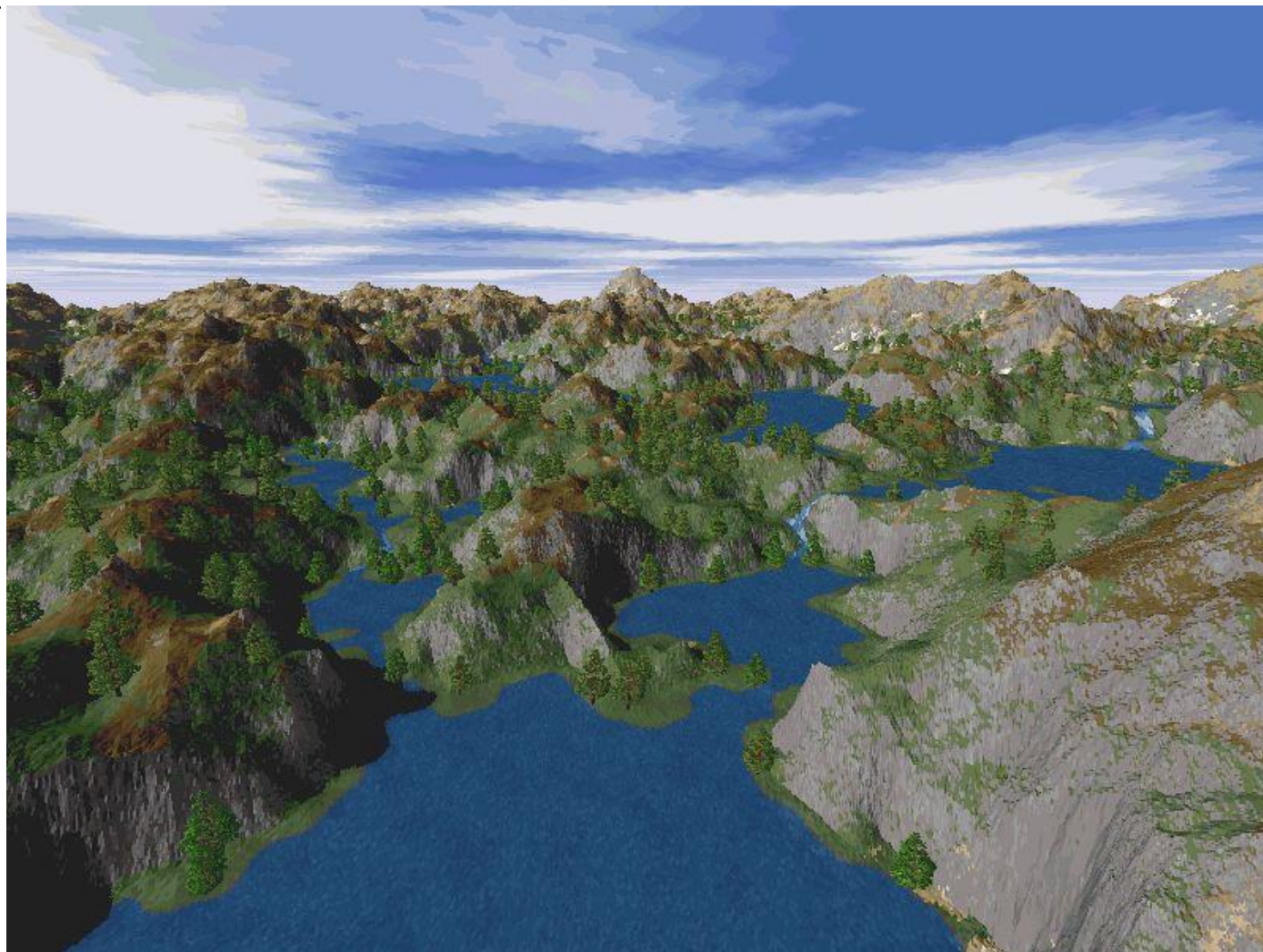
Листья



3D-пейзаж



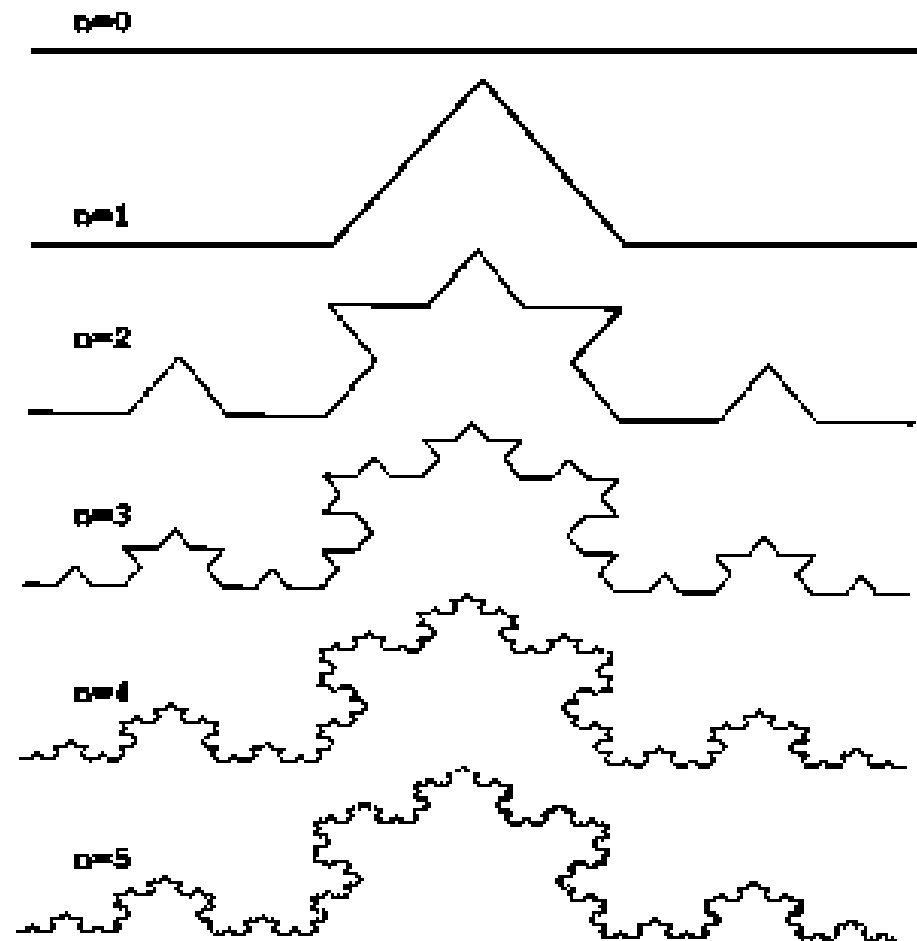
3D-пейзаж



3D-пейзаж



Построение триадной кривой Коха



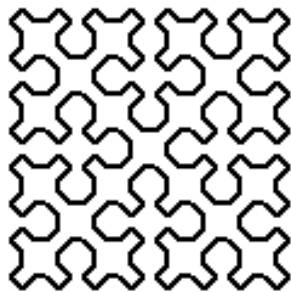
Ковер Серпинского



S_1 – «Ковер Серпинского» первого порядка

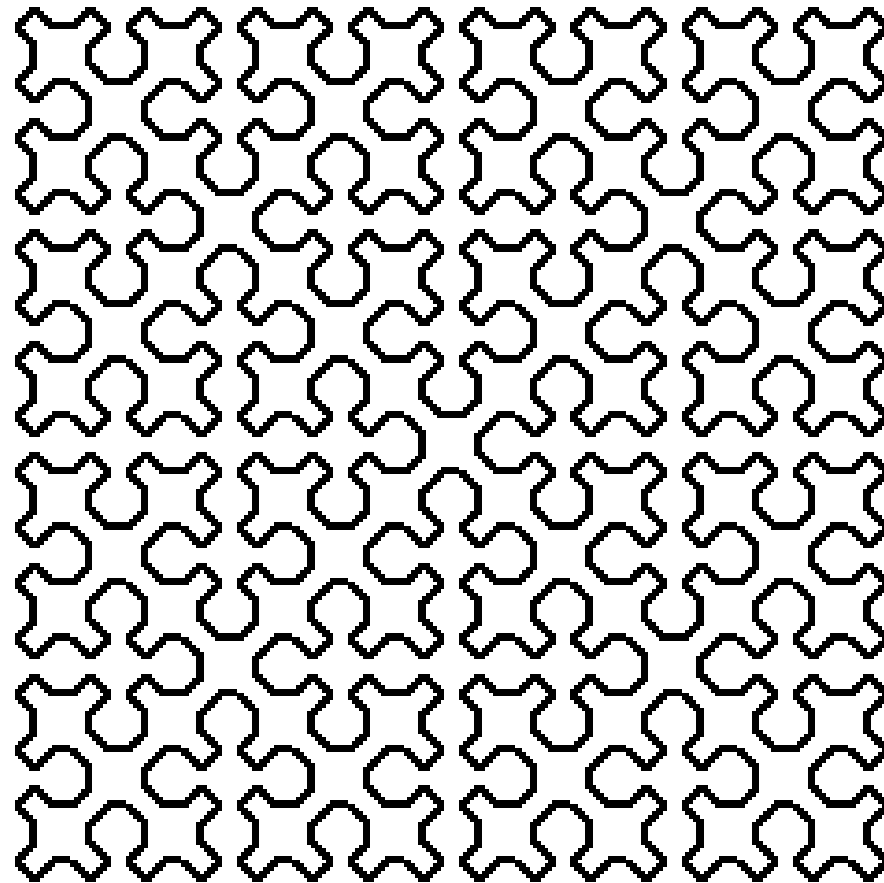


S_2 – «Ковер Серпинского» второго порядка

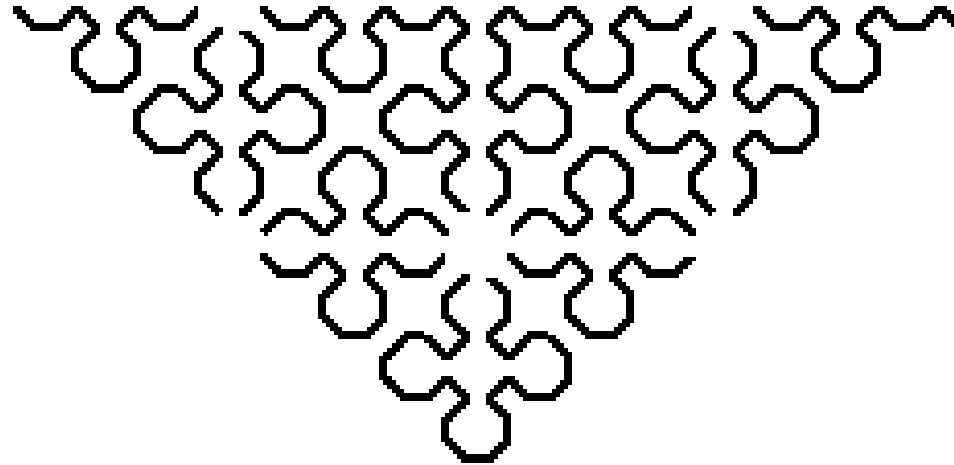


S_3 – «Ковер Серпинского» третьего порядка

S4 – «Ковер Серпинского» четвертого порядка



Составляющая A четвертого порядка



Рекуррентные соотношения

S_0 : A ↘ B ↙ C ↗ D ↖ .

S_i : для $i > 0$ A, B, C, D строятся следующим образом:

A: A ↘ B → D ↗ A

B: B ↙ C ↓ A ↘ B

C: C ↗ D ← B ↙ C

D: D ↖ A ↑ C ↖ D


```
var a, b, x, y, n: integer;

procedure lrel (dx,dy: integer);
begin
  x:=x+dx; y:=y+dy;
  LineTo(x,y)
end;

procedure BB(k: integer);
procedure CC(k: integer);
procedure DD(k: integer);
```

```
procedure AA(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      AA(k-1); lrel(a,b);  
      BB(k-1); lrel(a,0);  
      DD(k-1); lrel(a,-b);  
      AA(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
procedure BB(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      BB(k-1); lrel(-a,b);  
      CC(k-1); lrel(0,b);  
      AA(k-1); lrel(a,b);  
      BB(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
procedure CC(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      CC(k-1); lrel(-a,-b);  
      DD(k-1); lrel(-a,0);  
      BB(k-1); lrel(-a,b);  
      CC(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
procedure DD(k: integer);  
begin  
  if k>0 then  
    begin  
      DD(k-1); lrel(a,-b);  
      AA(k-1); lrel(0,-b);  
      CC(k-1); lrel(-a,-b);  
      DD(k-1)  
    end  
  end;  
end;
```

```
begin
  n:=6;           {порядок кривой}
  a:=3; b:=a;    {длины сторон}
  x:=10; y:=10;  {координаты начальной точки}
  SetWindowCaption('Ковер Серпинского');
  SetWindowSize(590,590);
  MoveTo(x,y);
  AA(N); lrel(a,b);
  BB(N); lrel(-a,b);
  CC(N); lrel(-a,-b);
  DD(N); lrel(a,-b)
end.
```


Системы построения фрактальных изображений

- Iterated function systems (IFS) — Системы итерируемых функций, итерированных функций, повторяющихся функций
- L-системы

Метод IFS

середина 80-х годов

Наиболее простая версия IFS состоит из аффинных преобразований плоскости:

$$X_1 = A * X + B * Y + C$$

$$Y_1 = D * X + E * Y + F$$

Также для построения IFS применяют

проективные:

$$X1=(A1*X+B1*Y+C1)/(D1*X+E1*Y+F1)$$

$$Y1=(A2*X+B2*Y+C2)/(D2*X+E2*Y+F2)$$

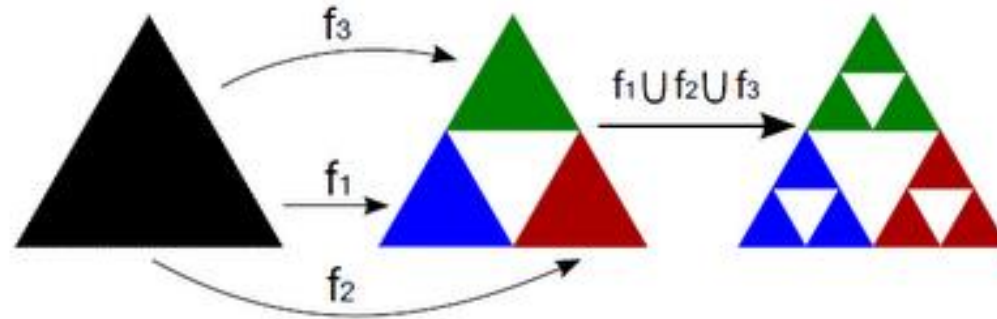
или квадратичные:

$$X1=A1*X*X+B1*X*Y+C1*Y*Y+D1*X+E1*Y+F1$$

$$Y1=A2*X*X+B2*X*Y+C2*Y*Y+D2*X+E2*Y+F2$$

преобразования на плоскости.

Пример построения треугольника Серпинского с помощью IFS



$$f_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$f_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$f_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$

L-системы (Lindenmayer System)

В 1968г. Венгерский биолог и ботаник Аристид Линденмайер



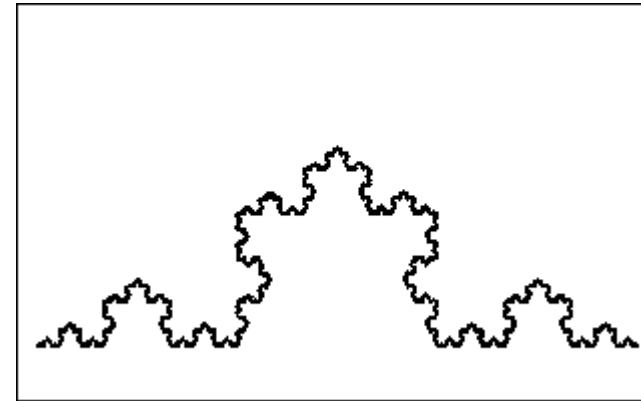
Простейшие L-системы
Растения и ветвящиеся структуры
Стохастические L-системы
Контекстно-зависимые L-системы
Параметрические L-системы

Детерминированная контекстонезависимая L-система

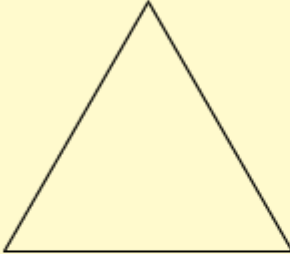
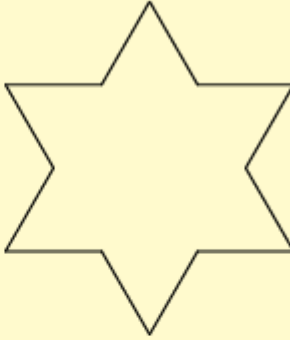
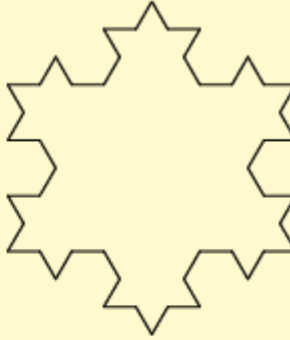
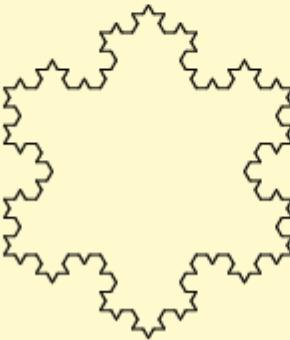
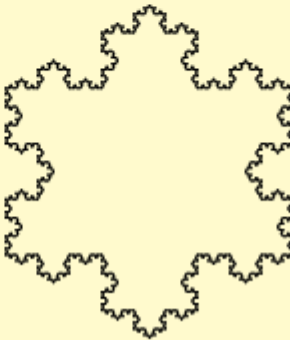
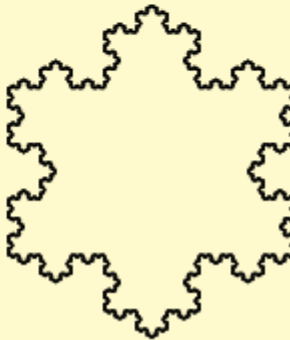
- алфавит, аксиомы и множества правил

КРИВАЯ КОХА

- F
- $F \rightarrow F-F++F-F$
- 60°



Поколения снежинки Коха

| поколения | изображения | | |
|-----------|---|--|--|
| 0, 1, 2 |  |  |  |
| 3, 4, 5 |  |  |  |


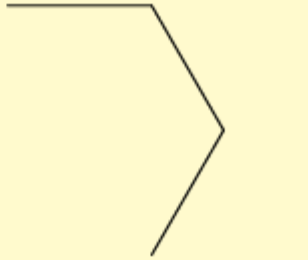
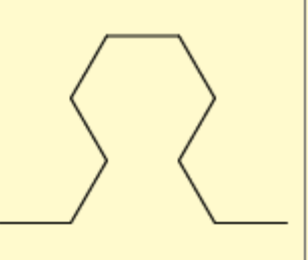
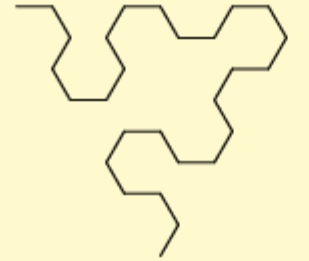
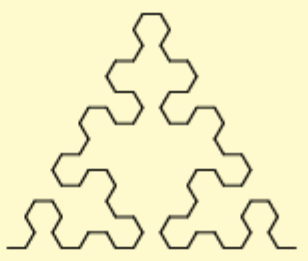
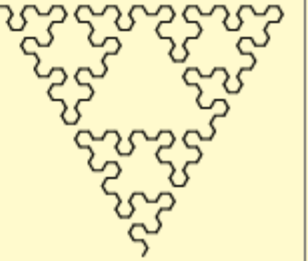
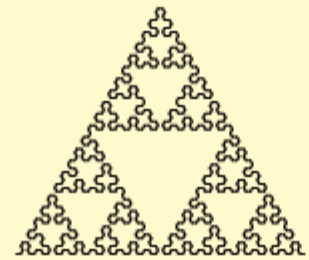


| аксиома | правило |
|---------------------------|--|
| $\text{「}F++F++F\text{」}$ | $\text{「}F\text{」} \rightarrow \text{「}F-F++F-F\text{」}$ |

Квадратный остров Коха

- $F+F+F+F$
- $F \rightarrow F+F-F-FF+F+F-F$
- 90°

Ковер Серпинского

- $FXF--FF--FF$
- $F \rightarrow FF$
- $X \rightarrow --FXF++FXF++FXF--$
- 60°

| поколения | изображение | | |
|-----------|--|--|--|
| 0, 1, 2 |  |  |  |
| 3, 4, 5 |  |  |  |
| 6, 7, 8 |  |  |  |

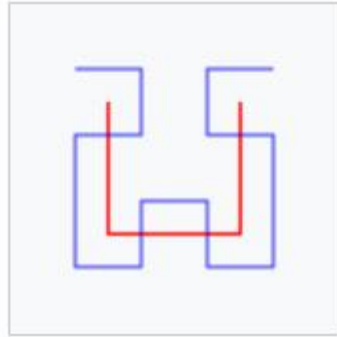
Наконечник Серпинского

- YF
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow YF + XF + Y$
- $Y \rightarrow XF - YF - X$
- 60°

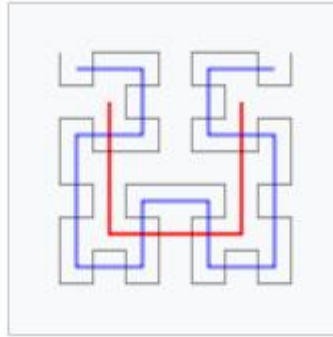
Кривая Гильберта



Кривая Гильберта,
первый шаг



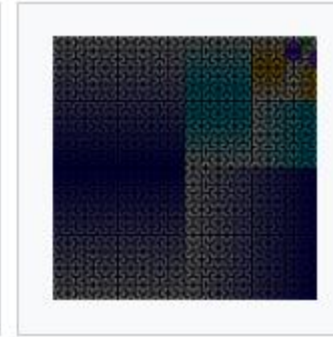
Кривые Гильберта,
первый и второй шаги



Кривые Гильберта, с
первого по третий шаги



Ниточная графика



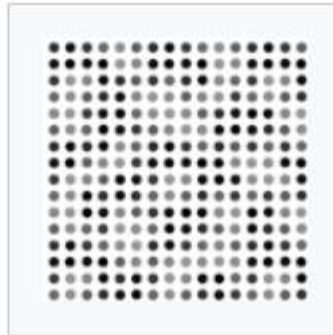
Кривая Гильберта в
цвете



Трёхмерная кривая
Гильберта



Трёхмерная кривая
Гильберта в цвете,
указывающем
последовательность

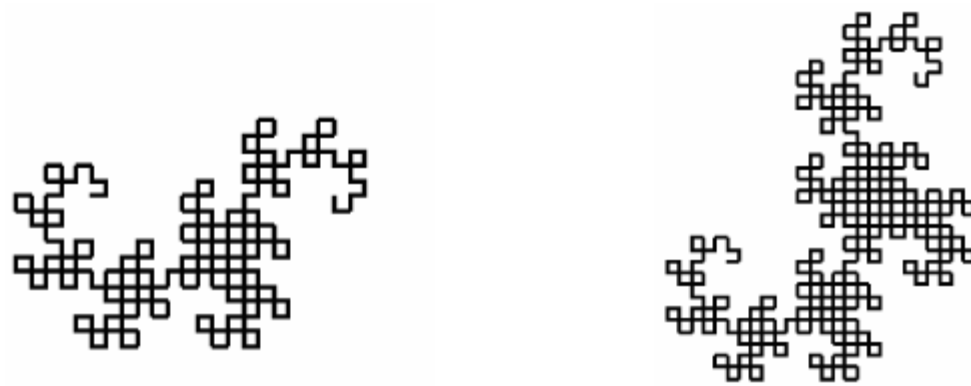
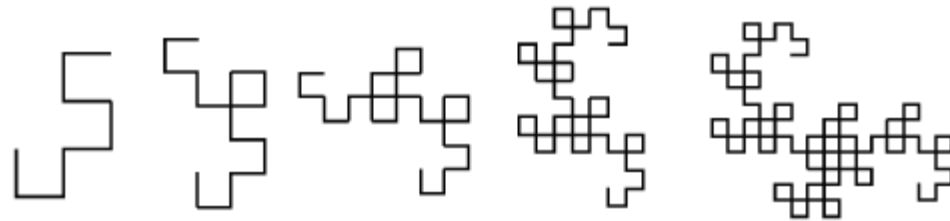


Анимационная
иллюстрация,
показывающая
прохождение кружков
по кривой.

- X
- F → F
- X → -YF + XFX + FY-
- Y → +XF - YFY - FX+
- 90°

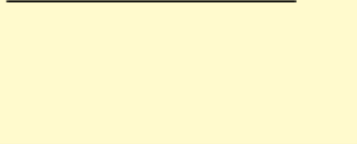
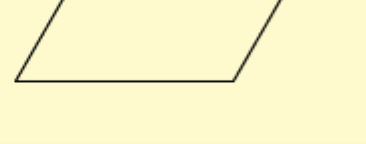

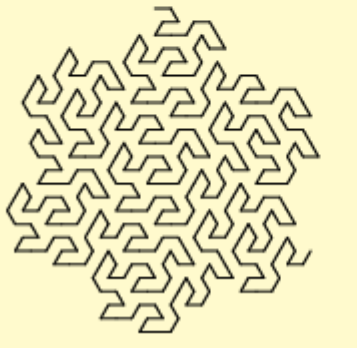
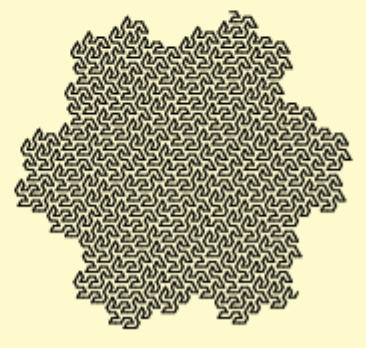

Кривая дракона Хартера-Хейтуэя

- X
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow X + YF +$
- $Y \rightarrow -FX - Y$
- 90°





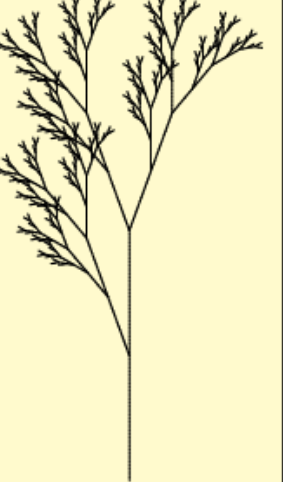



ШЕСТИУГОЛЬНАЯ КРИВАЯ ГОСПЕРА

- XF
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow X+YF++YF-FX--FXFX-YF+$
- $Y \rightarrow -FX+YFYF++YF+FX--FX-Y$
- 60°

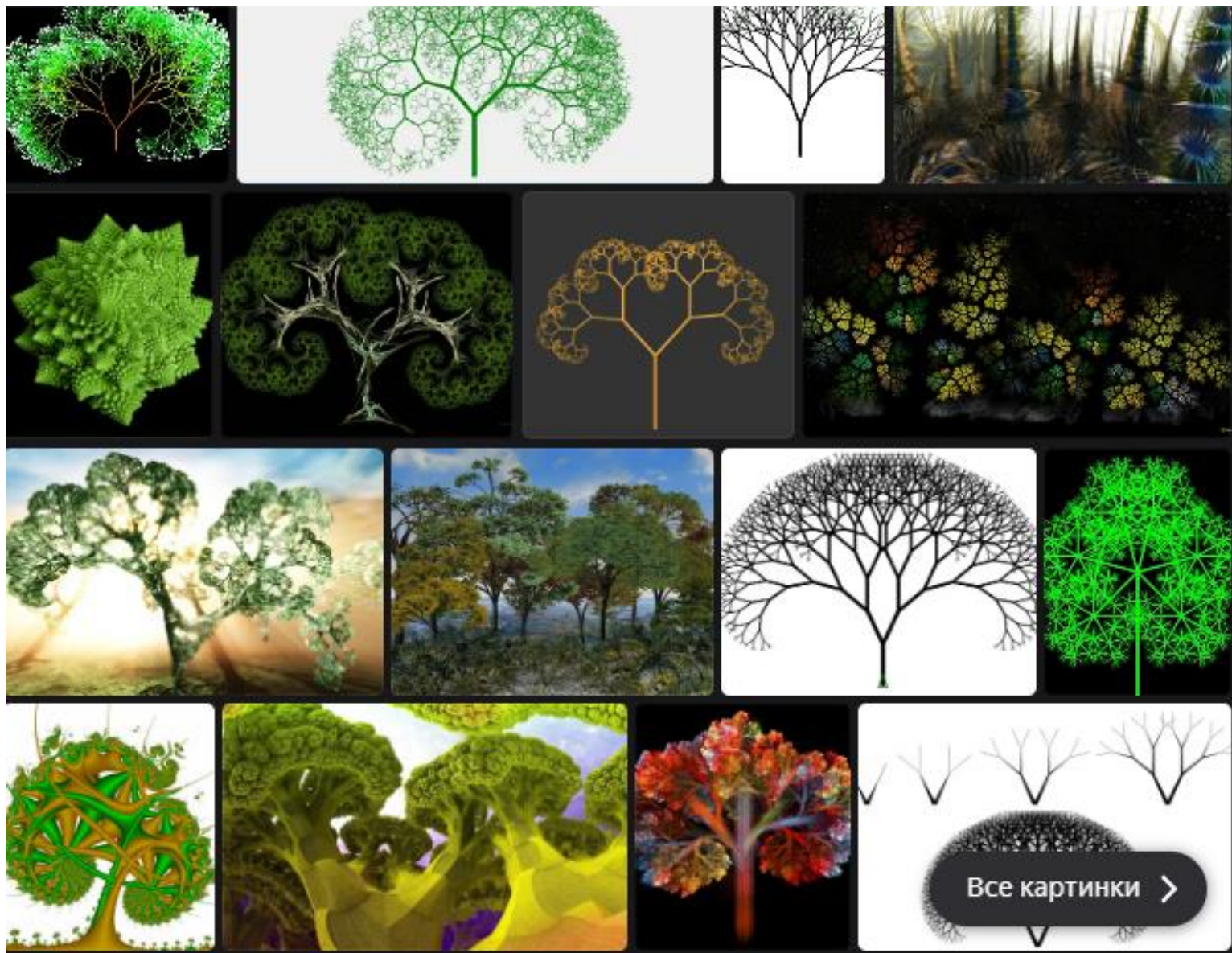
| поколения | изображение | | |
|-----------|--|--|--|
| 0, 1, 2 |  |  |  |
| 3, 4, 5 |  |  |  |

Скобочные L-системы и деревья

| поколения | изображение | | | |
|------------|---|--|--|--|
| 0, 1, 2, 3 | | |  |  |
| 4, 5, 6, 7 |  |  |  |  |

Скобочные L-системы и деревья

| аксиома | правила | интерпретация |
|---------------------|--|---|
| $\text{「}X\text{」}$ | $\text{「}F\text{」} \rightarrow \text{「}FF\text{」}$ $\text{「}X\text{」} \rightarrow \text{「}F[+X]F[-X]+X\text{」}$ | $\text{「}F\text{」} \rightarrow \langle \text{FORWARD } 1 \rangle$ $\text{「}+\text{」} \rightarrow \langle \text{ROTATE } 20 \rangle$ $\text{「}-\text{」} \rightarrow \langle \text{ROTATE } -20 \rangle$ $\text{「}[\text{」} \rightarrow \langle \text{SAVE} \rangle$ $\text{「}]\text{」} \rightarrow \langle \text{RESTORE} \rangle$ |





Куст 1

- F
- $F \rightarrow FF - [-F + F + F] + [+F - F - F]$
- 22°

Куст 2

- X
- $F \rightarrow FF$
- $X \rightarrow F[+X]F[-X]+X$
- 20°

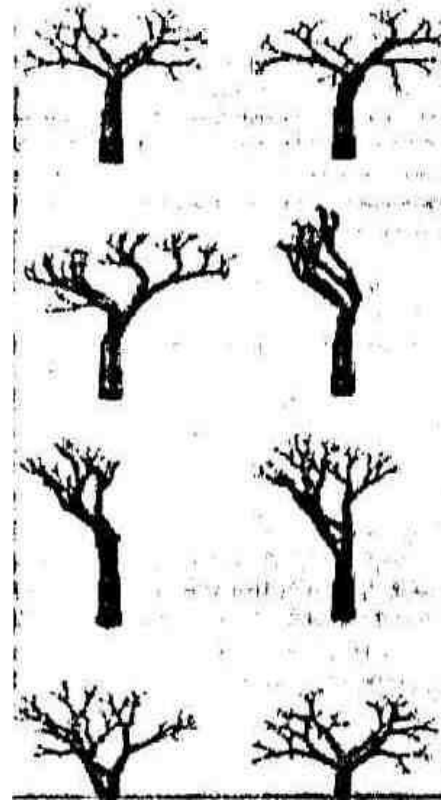
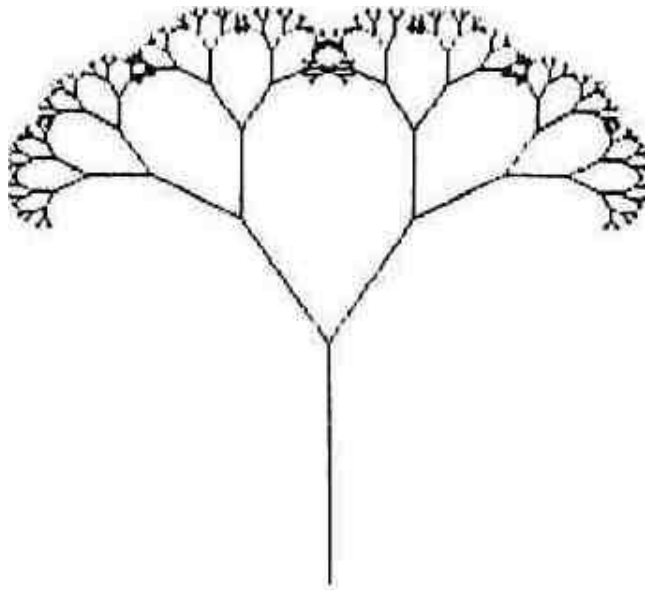
Куст 3

- X
- $F \rightarrow FF$
- $X \rightarrow F - [[X] + X] + F [+FX] - X$
- 22.5°

Шестиугольная мозаика




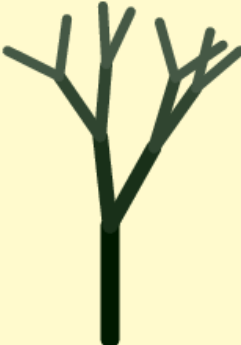
- X
- $F \rightarrow F$
- $X \rightarrow [-F + F[Y] + F][+F - F[X] - F]$
- $Y \rightarrow [-F + F[Y] + F][+F - F - F]$
- 60°

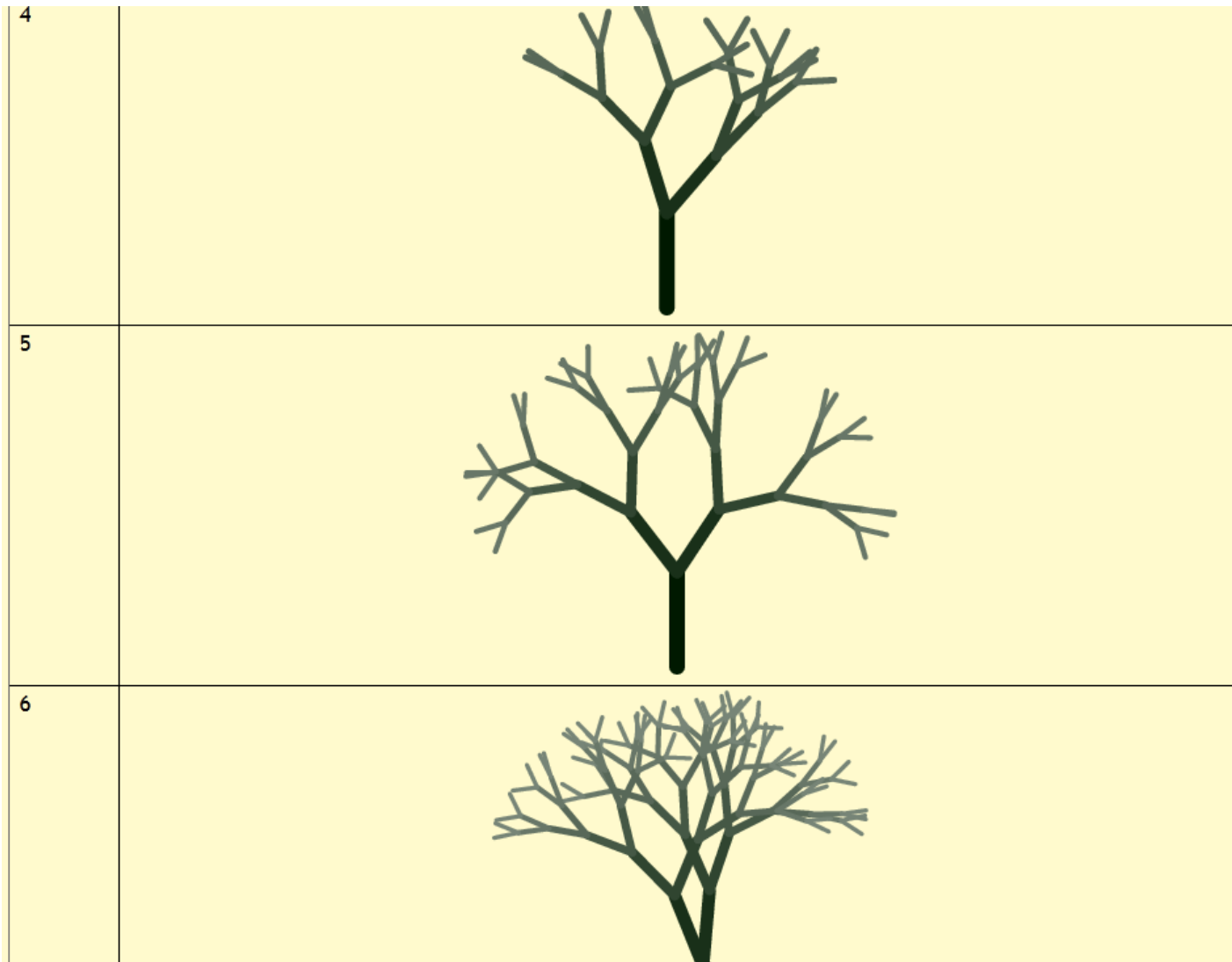
Пример построения дерева с помощью L – системы



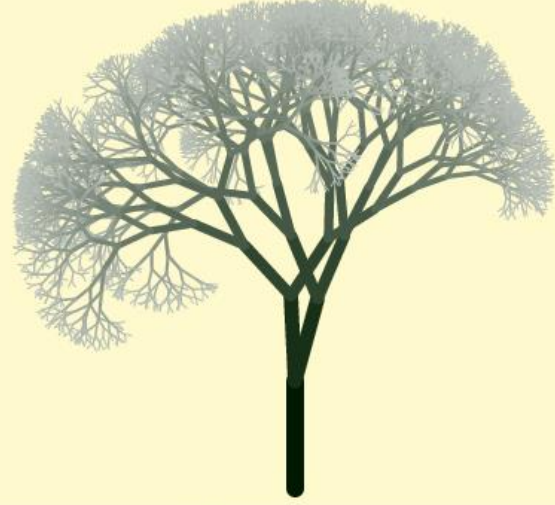
Добавим случайность в дерево

| аксиома | правило | интерпретация |
|------------------|-------------------------------|--|
| <code>「X」</code> | <code>「X」→「F[@[-X]+X]」</code> | <code>「F」→<FORWARD 1></code> <code>「X」→<FORWARD 1></code> <code>「+」→<ROTATE RANDOM 45></code> <code>「-」→<ROTATE -RANDOM 45></code> <code>「[」→<SAVE></code> <code>「]」→<RESTORE></code> <code>「@」→<...></code> |

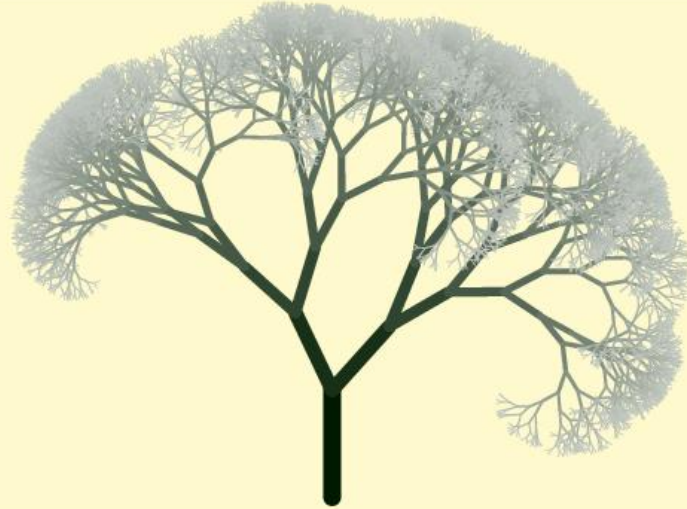
| поколения | изображение |
|-----------|--|
| 0 |  |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |



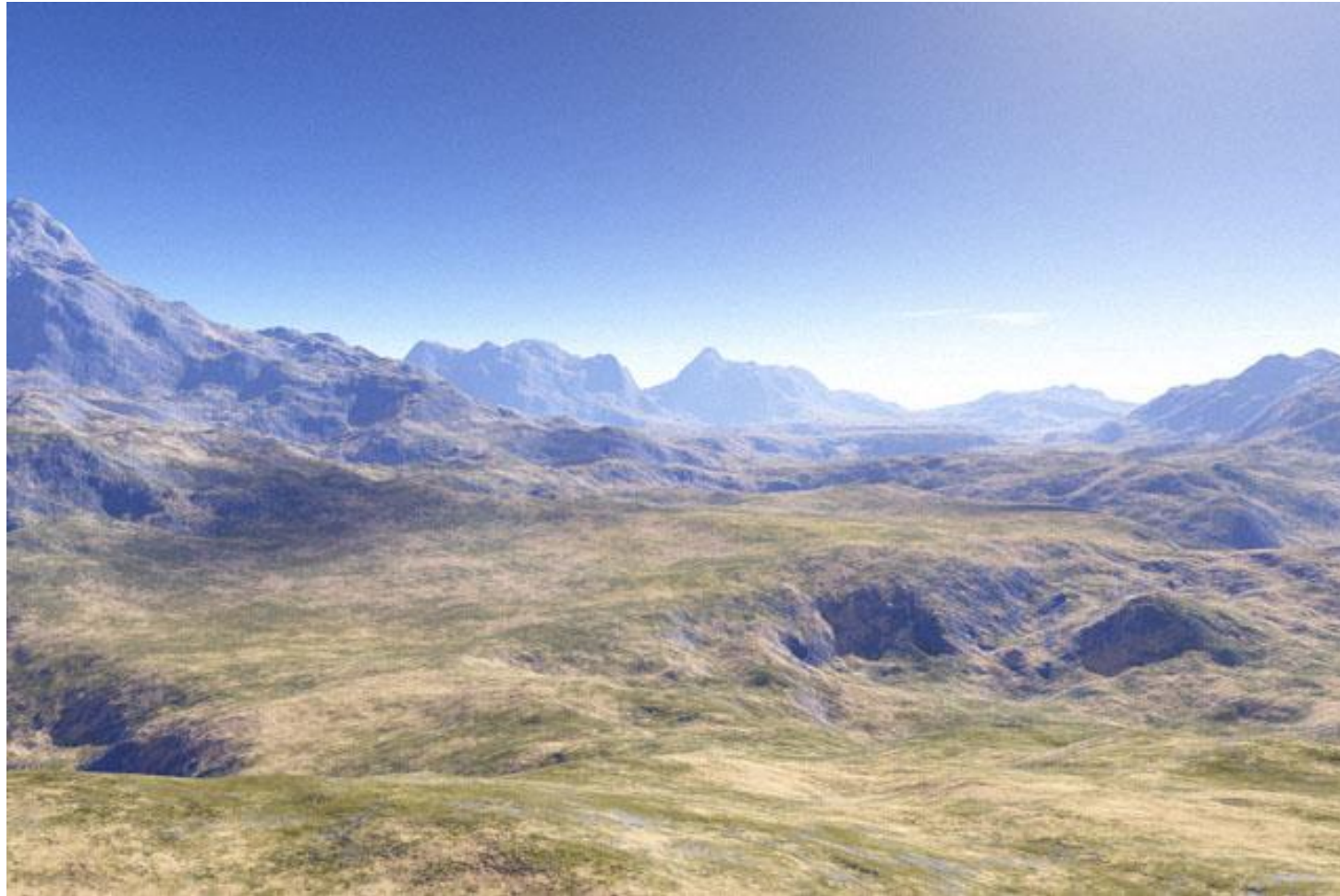
12



13



Сгенерированная компьютером фрактальная поверхность







Фрактальная поверхность (Fractal landscape)

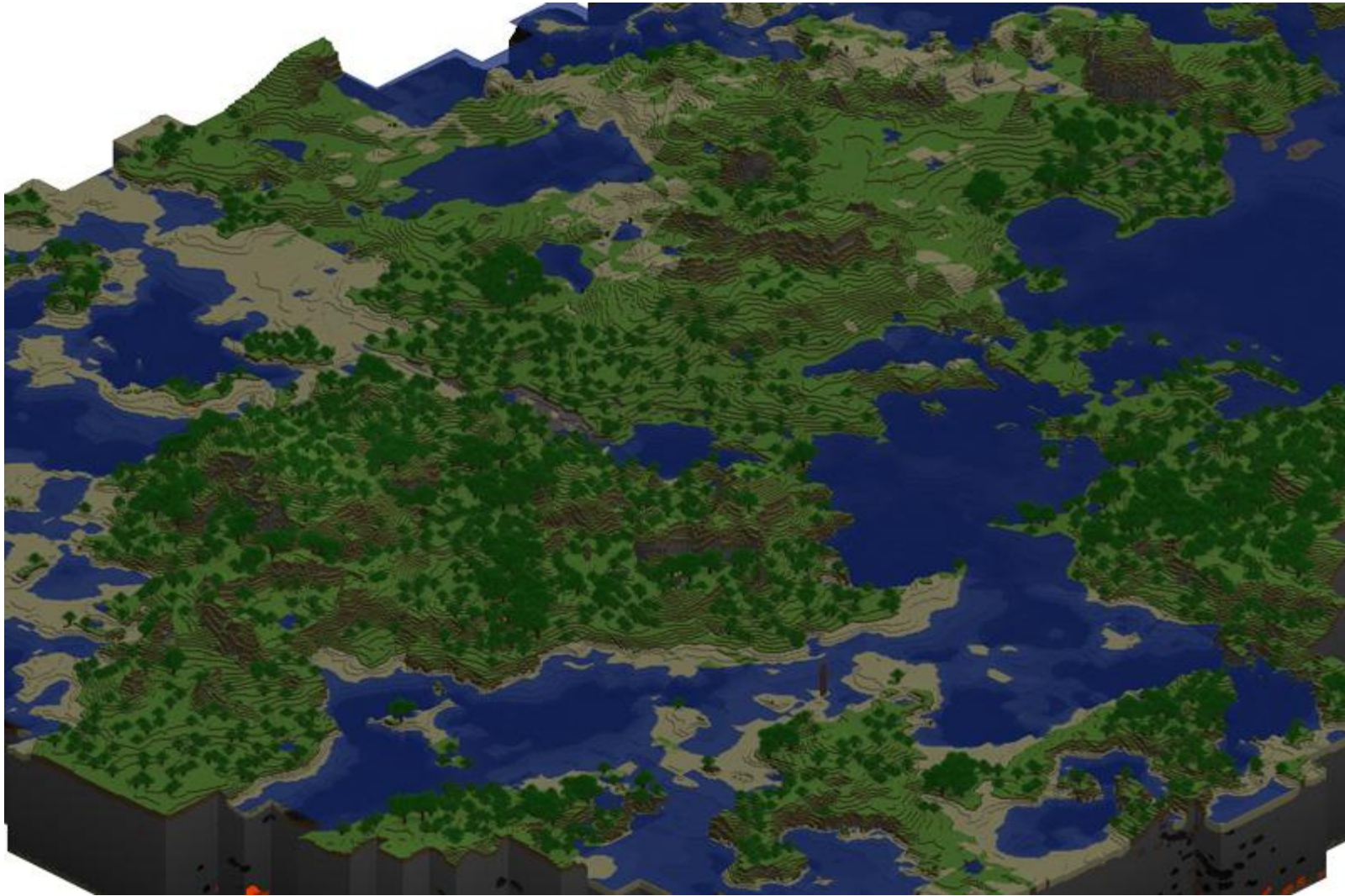
- Поверхность, сгенерированная с использованием стохастического алгоритма, предназначенного для создания фрактального объекта, который имитирует внешний вид природной местности.
- Иными словами, фрактальная поверхность появляется не в результате жестко заданной процедуры, а, является, скорее, случайным объектом, обладающим свойствами фрактала.

Википедия

Использование в киноиндустрии

- Первым использованием в киносъёмках пейзажа, сгенерированного компьютером, стал фильм 1982 года Звёздный путь 2: Гнев Хана.
- Американский исследователь компьютерной графики Лорен Карпентер использовал усовершенствованные методы Мандельброта для моделирования инопланетного ландшафта

Ландшафт в Minecraft



Общий план действий

- Создание карты высот
- Распределение биомов
- Запуск водной эрозии
- Дополнительные действия

| Уровень высоты | Влажность | | | | | |
|-------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|--------|-------------------|---------------------------|
| | 6 (влажно) | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 (сухо) |
| 4 (высоко) | СНЕГ | | | ТУНДРА | ПУСТОШЬ | СУХАЯ ЗЕМЛЯ |
| 3 | ТАЙГА | | КУСТАРНИКИ | | УМЕРЕННАЯ ПУСТЫНЯ | |
| 2 | УМЕРЕННЫЙ ДОЖДЛИВЫЙ ЛЕС | УМЕРЕННЫЙ ЛИСТВЕННЫЙ ЛЕС | | ТРАВА | | УМЕРЕННАЯ ПУСТЫНЯ |
| 1 (низко) | ТРОПИЧЕСКИЙ ДОЖДЛИВЫЙ ЛЕС | | ТРОПИЧЕСКИЙ СЕЗОННЫЙ ЛЕС | | ТРАВА | СУБТРОПИЧЕСКАЯ ПУСТЫНЯ |

Способы построения карты высот

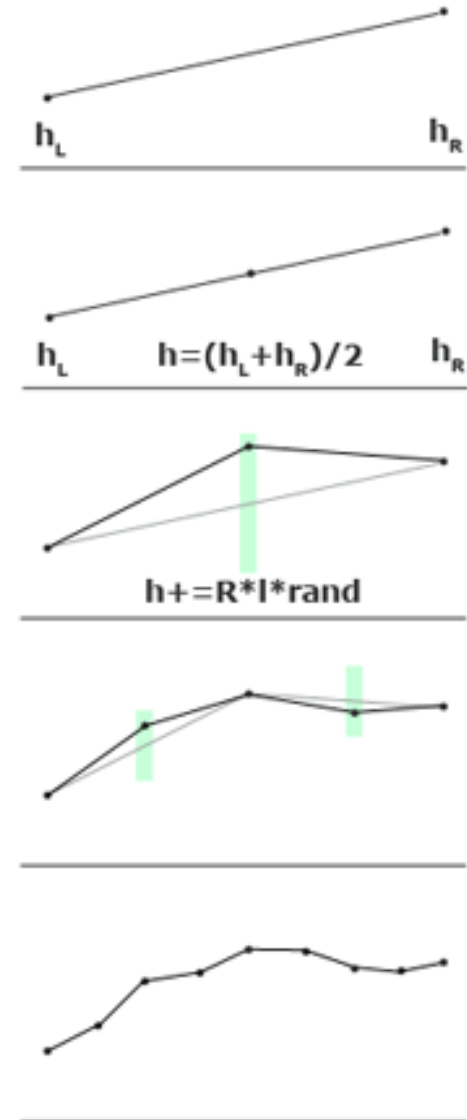
- Заполнение карты высот случайным образом
- Создание холмов «вручную»
- Алгоритм diamond-square
- Ландшафт на базе диаграммы Вороного

Алгоритм diamond-square (2D) или midpoint displacement

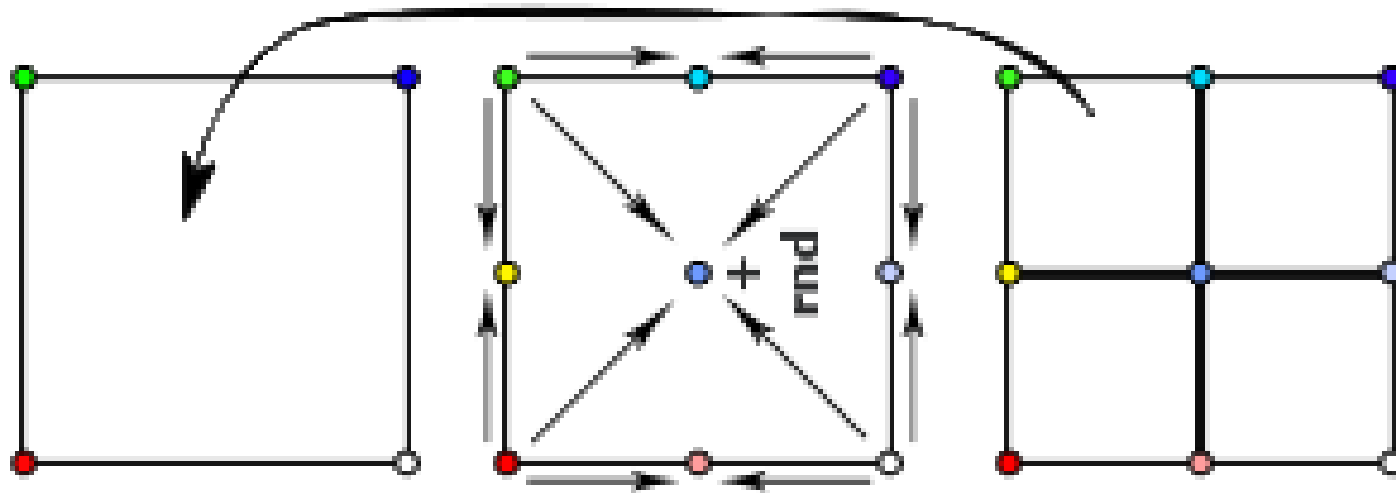


$$h = (hL + hR) / 2 + \text{random}(-R * L, R * L)$$

(hL и hR — высоты на левом и правом конце отрезка,
а константа R определяет «шероховатость»
получающейся ломаной, L — длина разбиваемого
отрезка



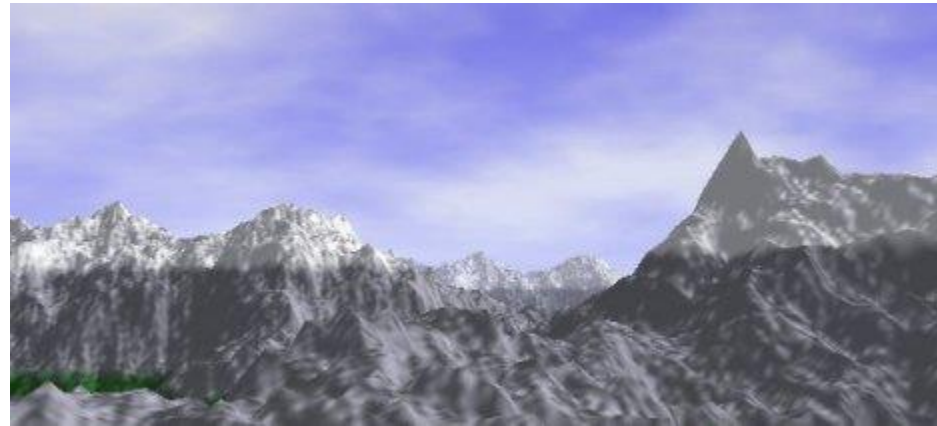
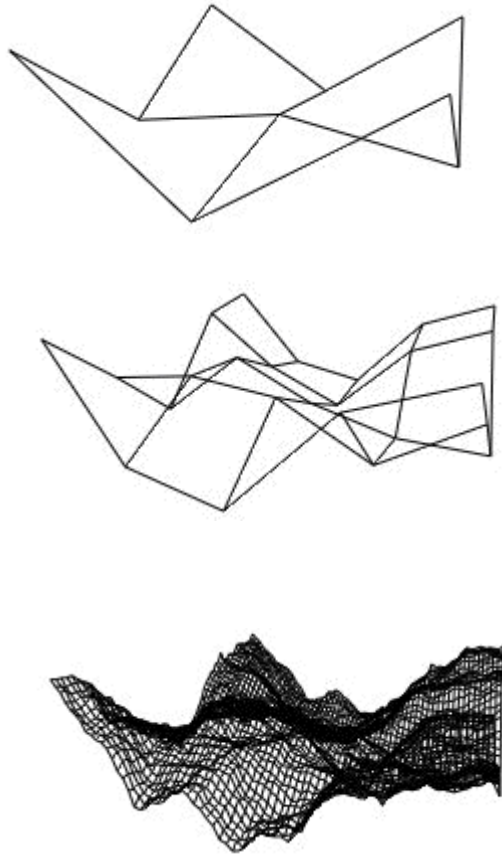
Алгоритм midpoint displacement



Алгоритм diamond-square

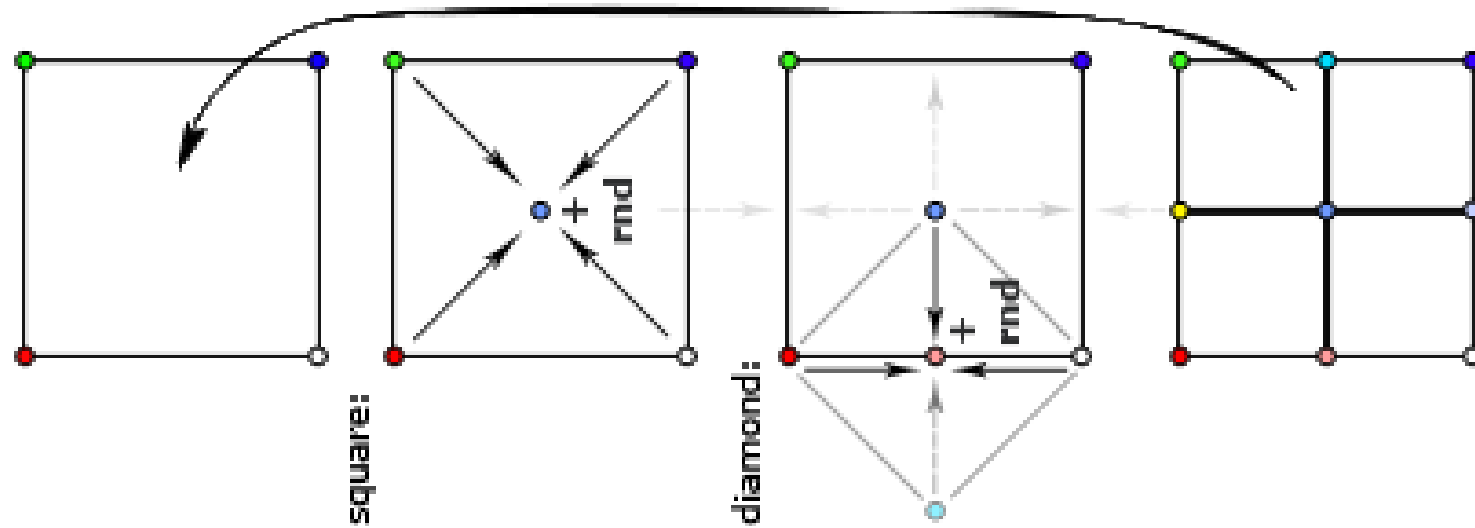
- Идея была впервые представлена Фурнье, Фусселлом и Карпентером на SIGGRAPH 1982.
- Позднее он был проанализирован Гавином С. П. Миллером в SIGGRAPH 1986, который описал его как ошибочный – алгоритм производит заметные вертикальные и горизонтальные «складки» из-за значительных возмущений, происходящих в прямоугольной сетке.

Алгоритм diamond-square (3D)

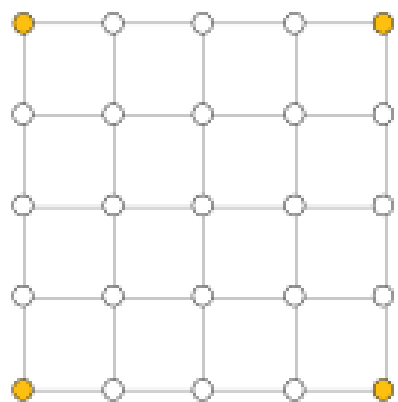


Terragen

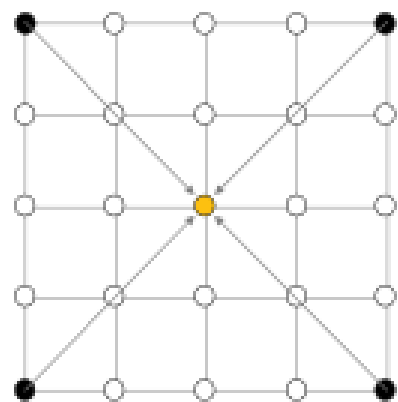
Алгоритм diamond-square



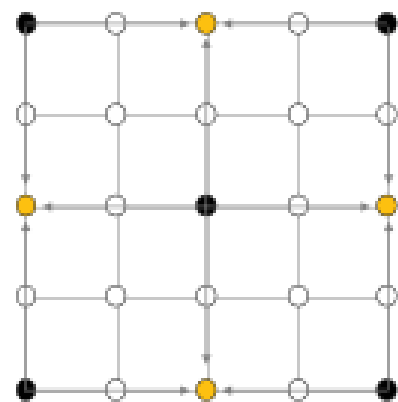
Алгоритм diamond-square (3D)



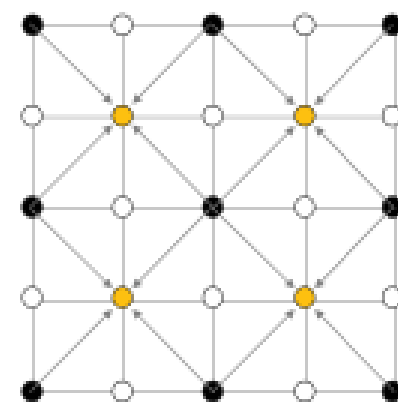
Initial (a) corner values



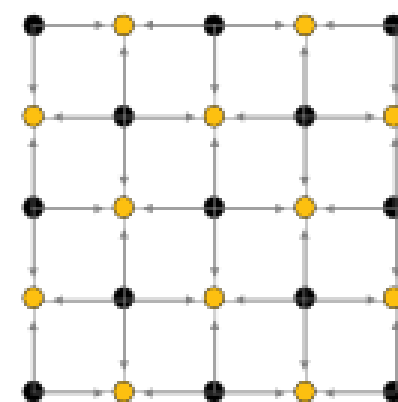
Perform diamond step



Perform square step

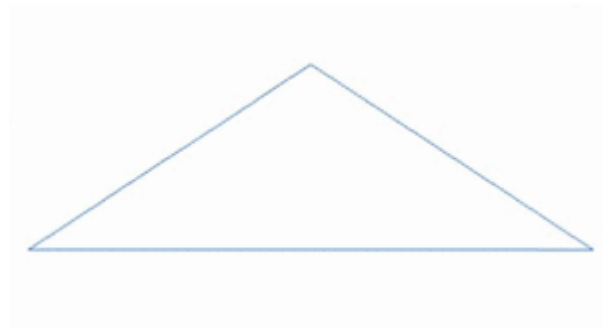


Perform diamond step

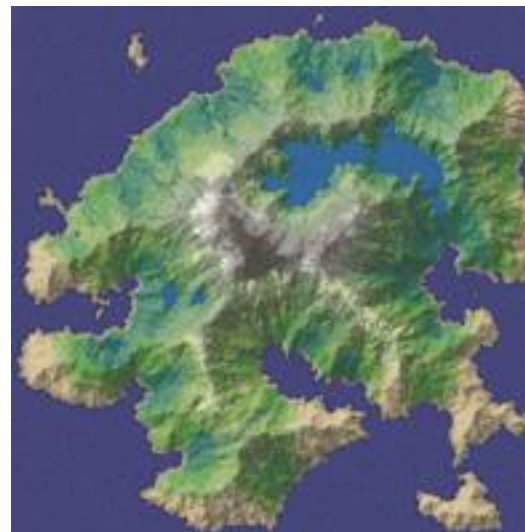
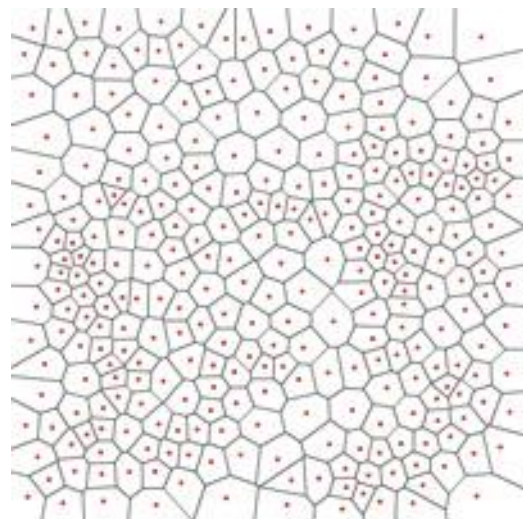


Perform square step

Модификация алгоритма



Ландшафт на базе диаграммы Вороного



Главное свойство сетки— это её нерегулярность.

Ландшафт не выглядит слишком «квадратным».

Ландшафт на базе диаграммы Вороного

- Случайное бросание точек на карту.
- Затем по этим точкам строится диаграмма Вороного и/или триангуляция Делоне.
- На ней выполняется несколько итераций релаксации Ллойда, чтобы избавиться от слишком мелких полигонов.

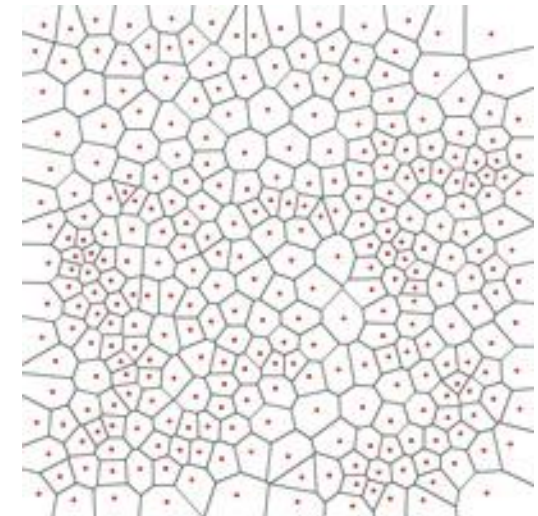


Диаграмма Вороного



Георгій Феодосійович Вороний; [1868](#) — [1908](#)

Названа в честь российского учёного Георгия Феодосьевича Вороного.

Также известна как:

мозаика Вороного, разбиение Вороного, разбиение Дирихле

Диаграмма Вороного

- Диаграмма Вороного конечного множества точек S на плоскости представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества S , чем к любому другому элементу множества

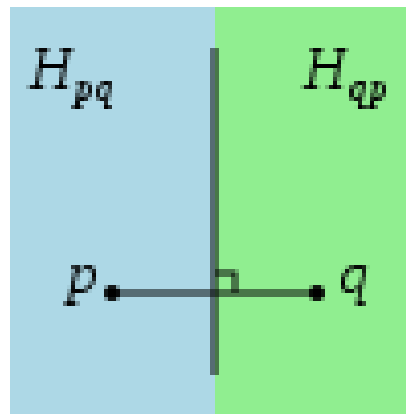


Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне

