

# Машинное обучение

## Оценки качества

Sources: [11][12][13][14][15][16][17][18][19] view · talk · edit

		Predicted condition			
		Positive (PP)	Negative (PN)	Informedness, bookmaker informedness (BM) $= \text{TPR} + \text{TNR} - 1$	Prevalence threshold (PT) $= \frac{\sqrt{\text{TPR} \times \text{FPR}} - \text{FPR}}{\text{TPR} - \text{FPR}}$
Actual condition	Total population $= P + N$				
	Positive (P)	True positive (TP), hit	False negative (FN), type II error, miss, underestimation	True positive rate (TPR), recall, sensitivity (SEN), probability of detection, hit rate, power $= \frac{\text{TP}}{P} = 1 - \text{FNR}$	False negative rate (FNR), miss rate $= \frac{\text{FN}}{P} = 1 - \text{TPR}$
	Negative (N)	False positive (FP), type I error, false alarm, overestimation	True negative (TN), correct rejection	False positive rate (FPR), probability of false alarm, fall-out $= \frac{\text{FP}}{N} = 1 - \text{TNR}$	True negative rate (TNR), specificity (SPC), selectivity $= \frac{\text{TN}}{N} = 1 - \text{FPR}$
	Prevalence $= \frac{P}{P + N}$	Positive predictive value (PPV), precision $= \frac{\text{TP}}{\text{PP}} = 1 - \text{FDR}$	False omission rate (FOR) $= \frac{\text{FN}}{\text{PN}} = 1 - \text{NPV}$	Positive likelihood ratio (LR+) $= \frac{\text{TPR}}{\text{FPR}}$	Negative likelihood ratio (LR-) $= \frac{\text{FNR}}{\text{TNR}}$
	Accuracy (ACC) $= \frac{\text{TP} + \text{TN}}{P + N}$	False discovery rate (FDR) $= \frac{\text{FP}}{\text{PP}} = 1 - \text{PPV}$	Negative predictive value (NPV) $= \frac{\text{TN}}{\text{PN}}$ $= 1 - \text{FOR}$	Markedness (MK), deltaP ( $\Delta p$ ) $= \text{PPV} + \text{NPV} - 1$	Diagnostic odds ratio (DOR) $= \frac{\text{LR}+}{\text{LR}-}$
	Balanced accuracy (BA) $= \frac{\text{TPR} + \text{TNR}}{2}$	$F_1$ score $= \frac{2\text{PPV} \times \text{TPR}}{\text{PPV} + \text{TPR}} = \frac{2\text{TP}}{2\text{TP} + \text{FP} + \text{FN}}$	Fowlkes–Mallows index (FM) $= \sqrt{\text{PPV} \times \text{TPR}}$	Matthews correlation coefficient (MCC) $= \sqrt{\text{TPR} \times \text{TNR} \times \text{PPV} \times \text{NPV}} - \sqrt{\text{FNR} \times \text{FPR} \times \text{FOR} \times \text{FDR}}$	Threat score (TS), critical success index (CSI), Jaccard index $= \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN} + \text{FP}}$

# Содержание лекции

- Оценки качества бинарной классификации
- Кривые ROC и PR
- Цены за ошибку. Plug-in подход. Выбор порогов
- Калибровка вероятностей



# Оценки качества бинарной классификации

Sources: [11][12][13][14][15][16][17][18][19] view · talk · edit

		Predicted condition			
Total population = P + N		Positive (PP)	Negative (PN)	Informedness, bookmaker informedness (BM) = TPR + TNR - 1	Prevalence threshold (PT) $= \frac{\sqrt{TPR \times FPR} - FPR}{TPR - FPR}$
Actual condition	Positive (P)	True positive (TP), hit	False negative (FN), type II error, miss, underestimation	True positive rate (TPR), recall, sensitivity (SEN), probability of detection, hit rate, power $= \frac{TP}{P} = 1 - FNR$	False negative rate (FNR), miss rate $= \frac{FN}{P} = 1 - TPR$
	Negative (N)	False positive (FP), type I error, false alarm, overestimation	True negative (TN), correct rejection	False positive rate (FPR), probability of false alarm, fall-out $= \frac{FP}{N} = 1 - TNR$	True negative rate (TNR), specificity (SPC), selectivity $= \frac{TN}{N} = 1 - FPR$
Prevalence $= \frac{P}{P + N}$	Positive predictive value (PPV), precision $= \frac{TP}{PP} = 1 - FDR$	False omission rate (FOR) $= \frac{FN}{PN} = 1 - NPV$	Positive likelihood ratio (LR+) $= \frac{TPR}{FPR}$	Negative likelihood ratio (LR-) $= \frac{FNR}{TNR}$	
Accuracy (ACC) $= \frac{TP + TN}{P + N}$	False discovery rate (FDR) $= \frac{FP}{PP} = 1 - PPV$	Negative predictive value (NPV) = $\frac{TN}{PN}$ $= 1 - FOR$	Markedness (MK), deltaP ( $\Delta p$ ) $= PPV + NPV - 1$	Diagnostic odds ratio (DOR) $= \frac{LR+}{LR-}$	
Balanced accuracy (BA) $= \frac{TPR + TNR}{2}$	F <sub>1</sub> score $= \frac{2PPV \times TPR}{PPV + TPR} = \frac{2TP}{2TP + FP + FN}$	Fowlkes–Mallows index (FM) $= \sqrt{PPV \times TPR}$	Matthews correlation coefficient (MCC) $= \sqrt{TPR \times TNR \times PPV \times NPV - FNR \times FPR \times FOR \times FDR}$	Threat score (TS), critical success index (CSI), Jaccard index $= \frac{TP}{TP + FN + FP}$	

Д/з: как в случае несбалансированной выборки сравнить качество классификации задолжников и надежных клиентов в задаче кредитного скоринга?

# ROC-кривая

- ROC – receiver operating characteristic
- Каждая точка кривой соответствует одному значению порога (цен за ошибки,  $w_0$ )
- По оси X:  
FPR (false positive rate) – процент объектов с  $y=-1$  и  $a(x)=+1$  среди всех  $y=-1$
- По оси Y:  
TPR (true positive rate) – процент объектов с  $y=+1$  и  $a(x)=+1$  среди всех  $y=+1$



# FPR и TPR

		Predicted	
		Positive (PP)	Negative (PN)
Actual	Positive (P)	True positive (TP)	False negative (FN)
	Negative (N)	False positive (FP)	True negative (TN)

$$FPR = \frac{FP}{FP + TN}$$

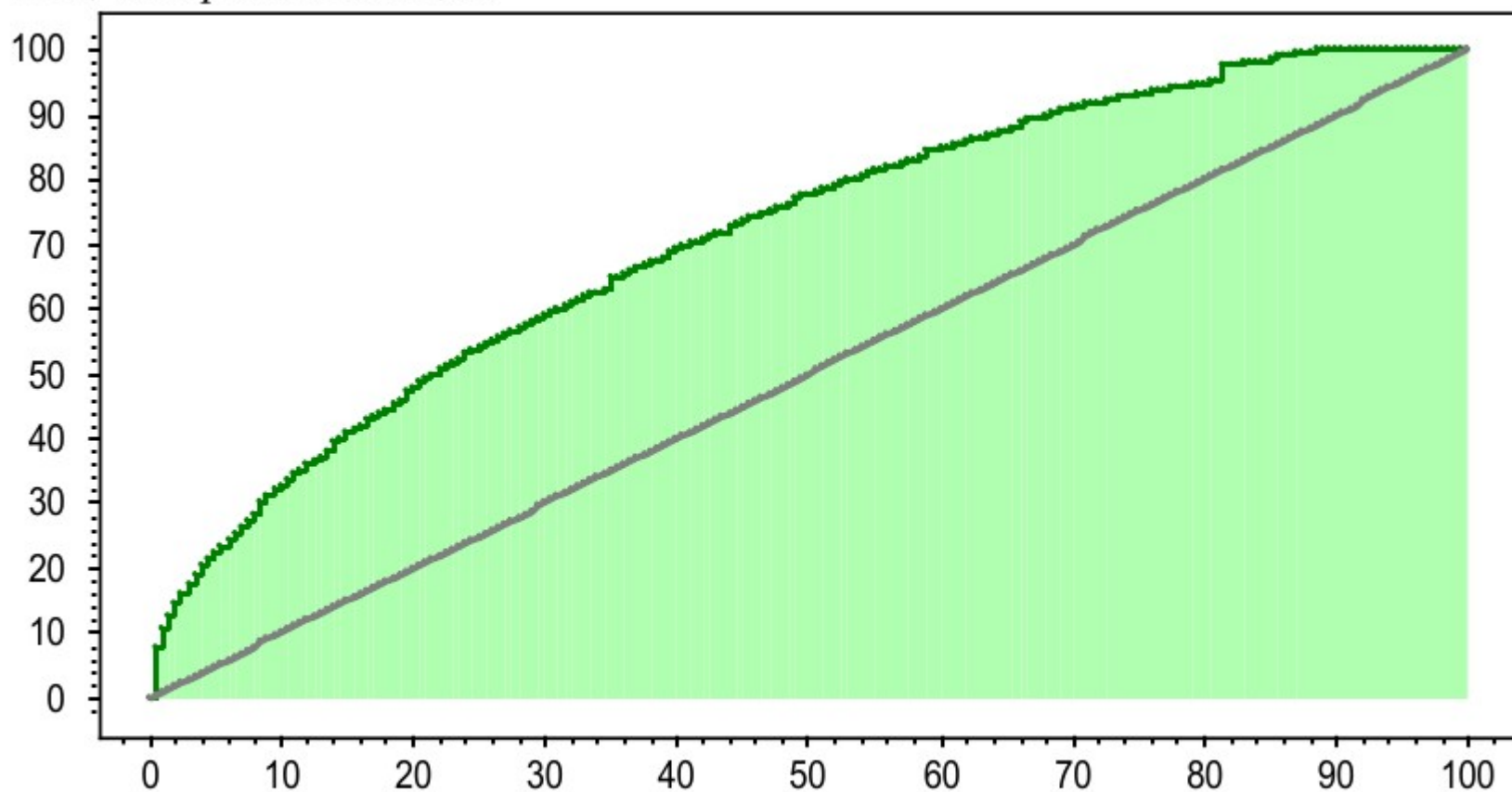
$FPR = 1 - TNR =$   
1 – Recall для  
класса "-"

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN}$$

Другие названия:  
полнота (recall),  
чувствительность (sensitivity)

# Пример

*TPR, true positive rate, %*



*FPR, false positive rate, %*

■ AUC, площадь под ROC-кривой — наихудшая ROC-кривая

# Алгоритм построения ROC-кривой

**Вход:** выборка  $X^\ell$ ; дискриминантная функция  $g(x, w)$ ;

**Выход:**  $\{(FPR_i, TPR_i)\}_{i=0}^\ell$ , AUC — площадь под ROC-кривой.

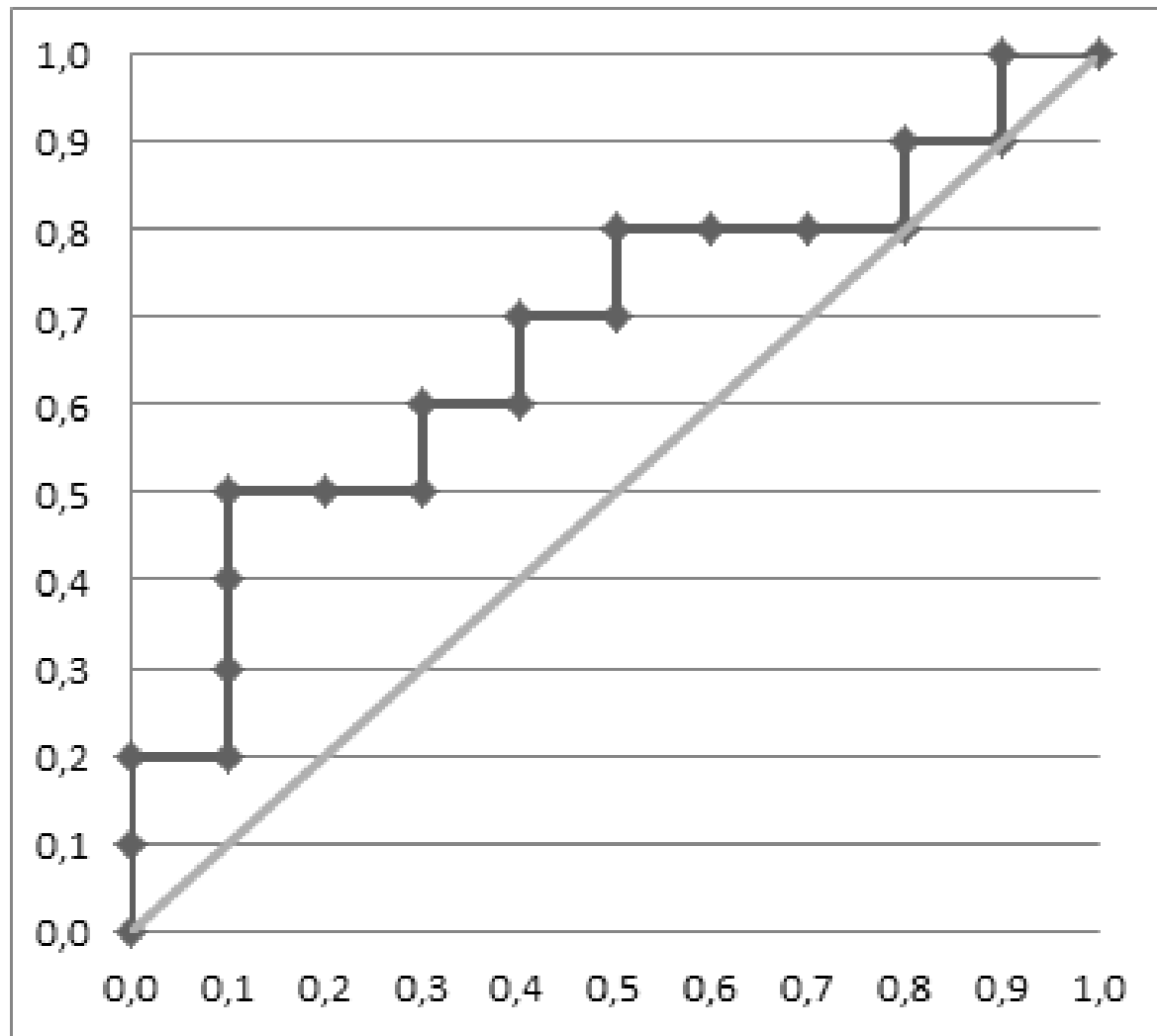
---

- 1:  $\ell_y := \sum_{i=1}^\ell [y_i = y]$ , для всех  $y \in Y$ ;
- 2: упорядочить выборку  $X^\ell$  по убыванию значений  $g(x_i, w)$ ;
- 3: поставить первую точку в начало координат:  
 $(FPR_0, TPR_0) := (0, 0)$ ;  $AUC := 0$ ;
- 4: **для**  $i := 1, \dots, \ell$
- 5:   **если**  $y_i = -1$  **то** сместиться на один шаг вправо:
- 6:      $FPR_i := FPR_{i-1} + \frac{1}{\ell_-}$ ;  $TPR_i := TPR_{i-1}$ ;  
       $AUC := AUC + \frac{1}{\ell_-} TPR_i$ ;
- 7:   **иначе** сместиться на один шаг вверх:
- 8:      $FPR_i := FPR_{i-1}$ ;  $TPR_i := TPR_{i-1} + \frac{1}{\ell_+}$ ;

# Пример

TPR

#	C	Score
1	P	0,9
2	P	0,8
3	N	0,7
4	P	0,6
5	P	0,55
6	P	0,54
7	N	0,53
8	N	0,52
9	P	0,51
10	N	0,505
11	P	0,4
12	N	0,39
13	P	0,38
14	N	0,37
15	N	0,36
16	N	0,35
17	P	0,34
18	N	0,33
19	P	0,3
20	N	0,1



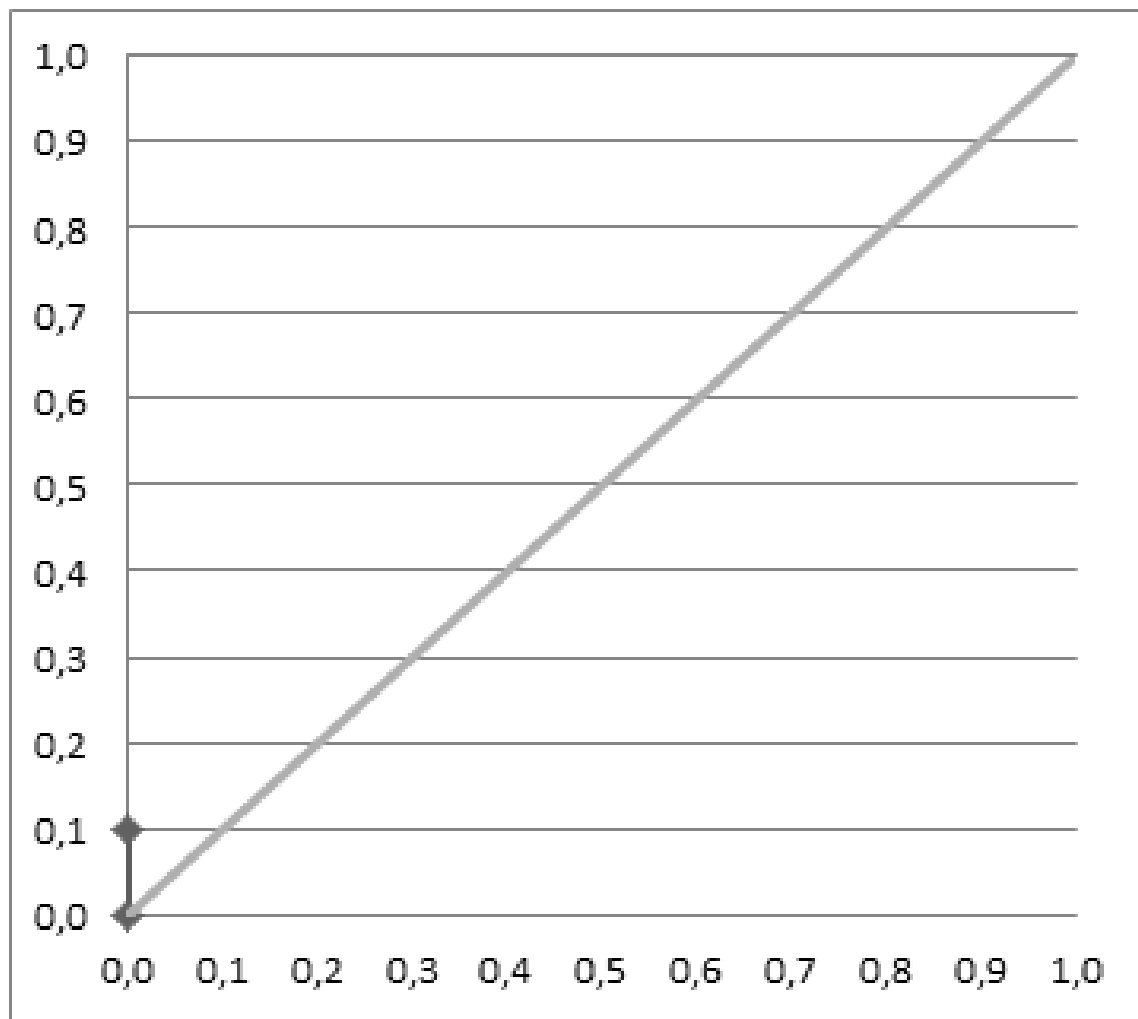
FPR



# Пример

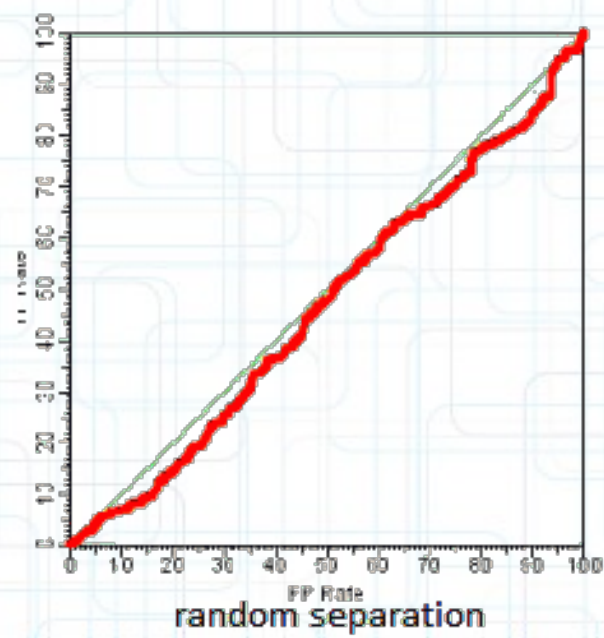
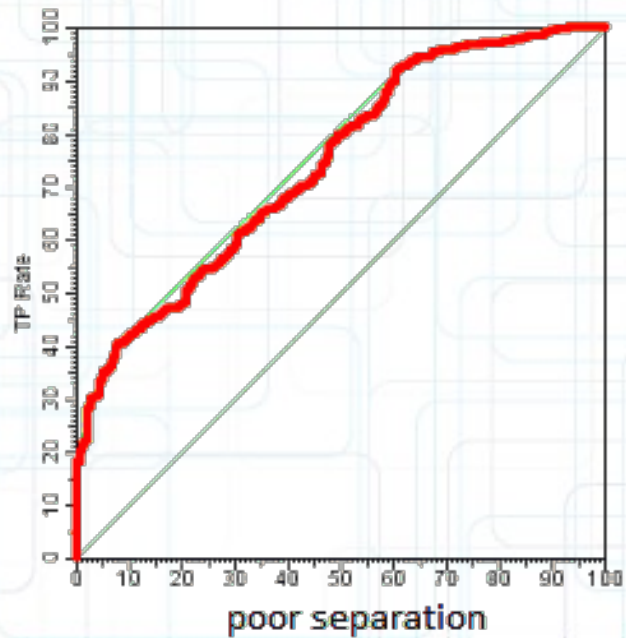
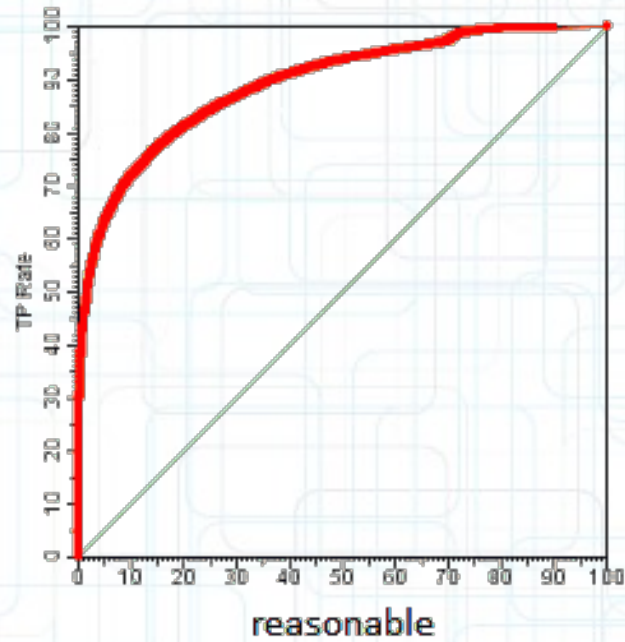
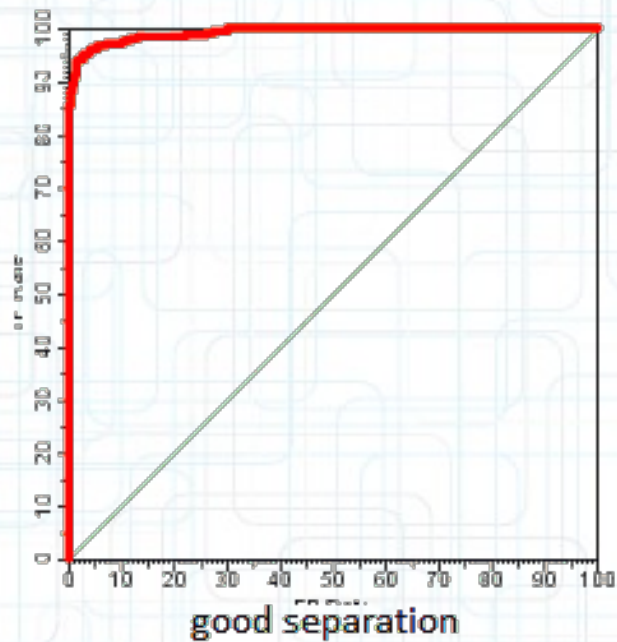
TPR

#	C	Score
1	P	0,9
2	P	0,8
3	N	0,7
4	P	0,6
5	P	0,55
6	P	0,54
7	N	0,53
8	N	0,52
9	P	0,51
10	N	0,505
11	P	0,4
12	N	0,39
13	P	0,38
14	N	0,37
15	N	0,36
16	N	0,35
17	P	0,34
18	N	0,33
19	P	0,3
20	N	0,1



FPR

# Еще примеры



# Точность (precision) и полнота (recall)

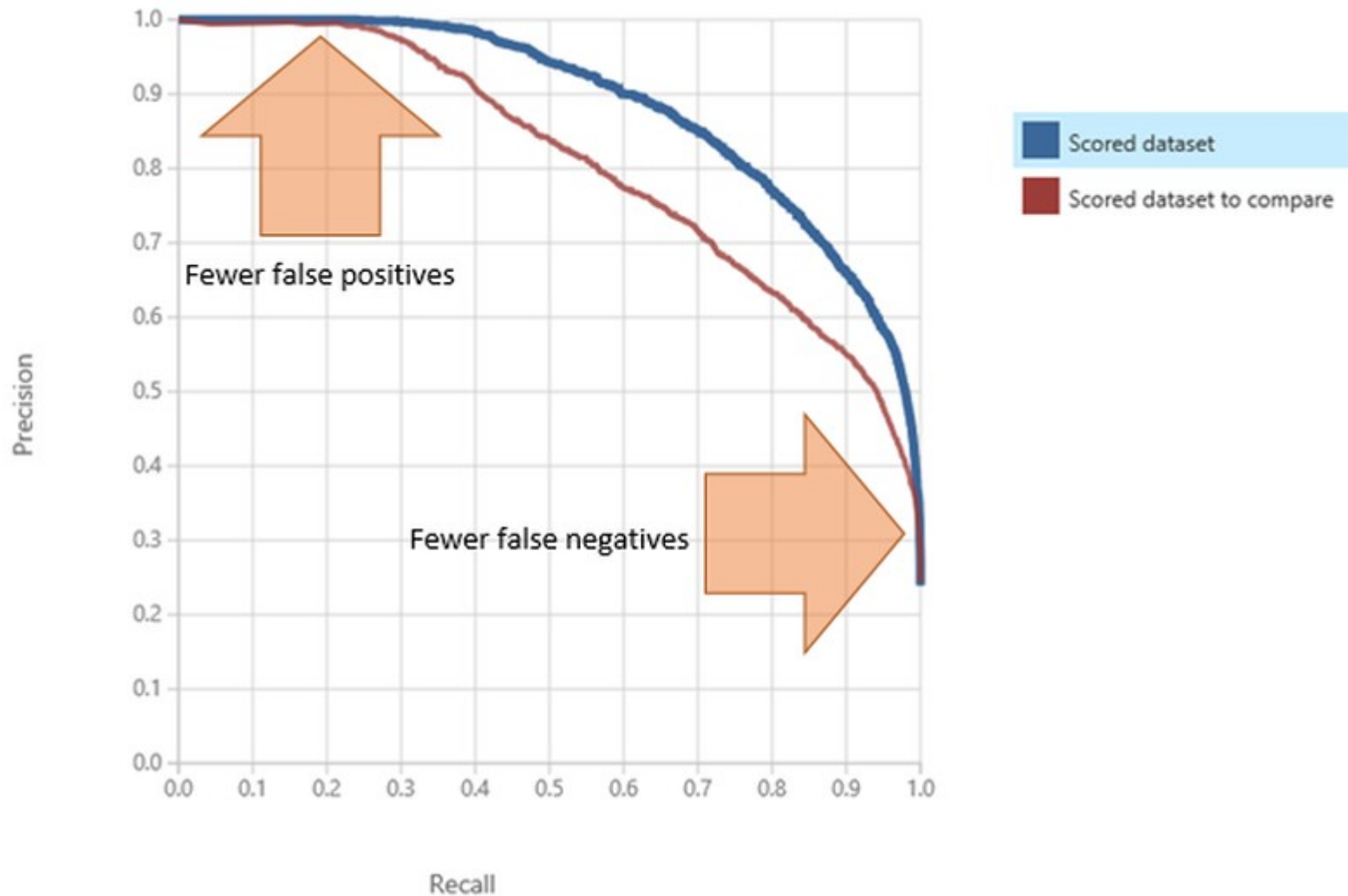
$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP}$$

		Predicted	
		Positive (PP)	Negative (PN)
Actual	Positive (P)	True positive (TP)	False negative (FN)
	Negative (N)	False positive (FP)	True negative (TN)

$$\text{Recall} = \text{TPR} = \frac{TP}{TP + FN}$$



# PR-кривая

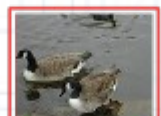


Средняя точность (AveP) – площадь под PR-кривой.

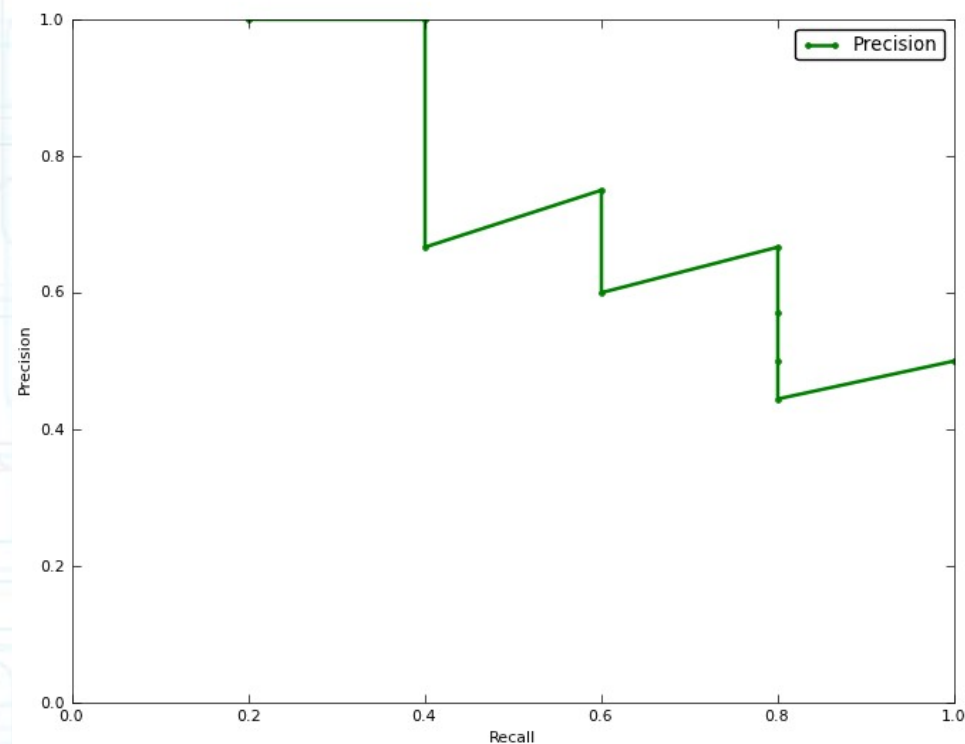
Как выглядит график для случайного порядка?

# Пример расчета PR-кривой в задаче определения самолетов

Результат ранжирования



Порог	Precision	Recall
Top 1	100%	20%
Top 2	100%	40%
Top 3	66%	40%
Top 4	75%	60%
Top 5	60%	60%
Top 6	66%	80%
Top 7	57%	80%
Top 8	50%	80%
Top 9	44%	80%
Top 10	50%	100%



# Чувствительность (sensitivity)

$$\text{Sensitivity} = \text{TPR} = \frac{\text{TP}}{\text{TP} + \text{FN}}$$

- Чувствительность измеряет, насколько восприимчива наша модель (или диагностический тест) к обнаружению искомого, положительного класса.
- Она отвечает на вопрос: "Если пациент на самом деле болен, какова вероятность того, что тест это почувствует и окажется положительным?"
- Чувствительность = Полнота (recall)



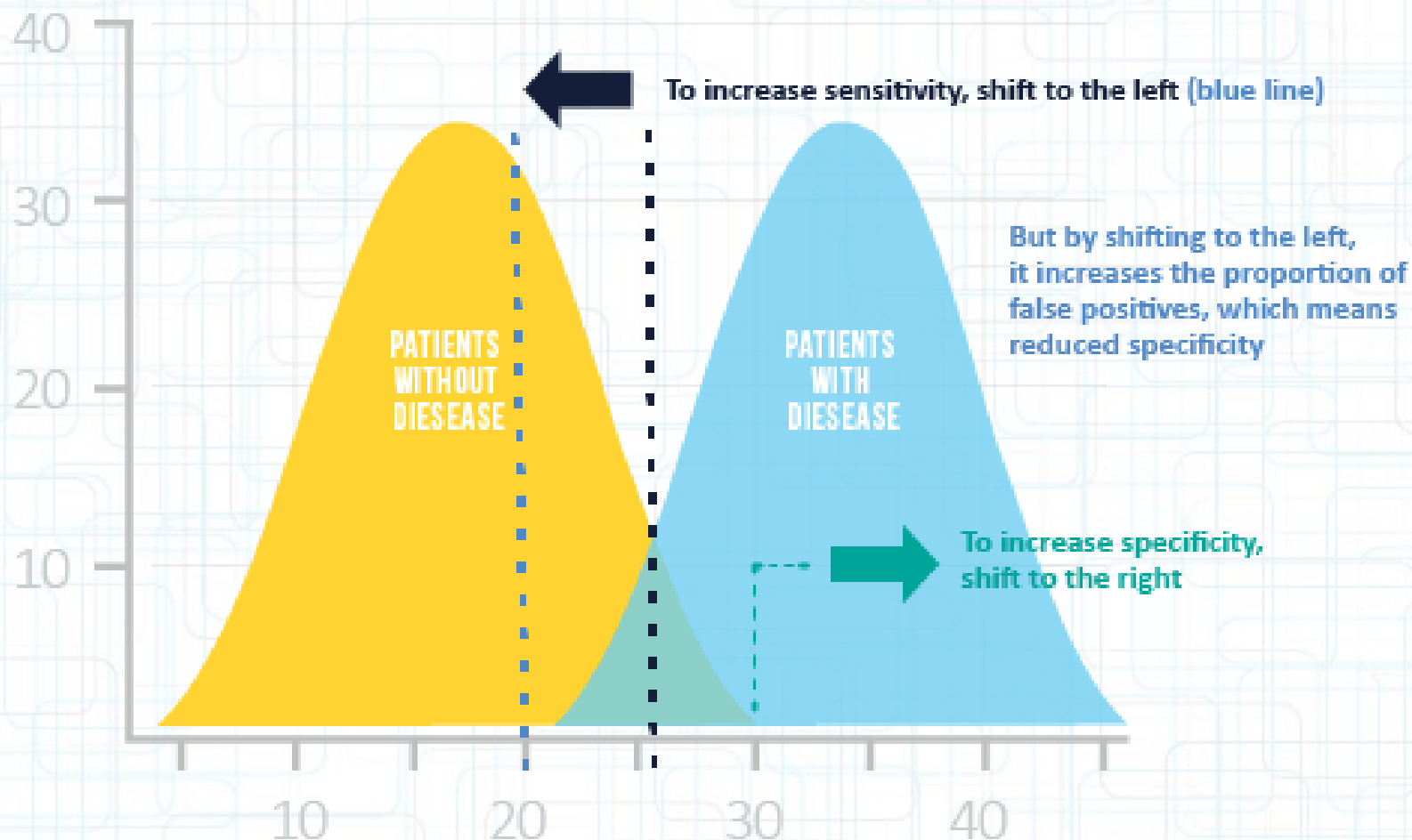
# Специфичность/селективность (specificity)

$$\text{Specificity} = \text{TNR} = \frac{\text{TN}}{\text{TN} + \text{FP}}$$

- Диагностический тест будет иметь 100% чувствительность (sensitivity) если он положительный у любых людей. Нужна еще одна характеристика, которая показывает, насколько диагностический тест правильно классифицирует здоровых.
- Специфичность/селективность отвечает на вопрос: для какой доли здоровых людей тест отрицательный?
- Специфичность - это та же полнота, но для класса "-"

# Порог задает баланс между полнотой для класса 1 и класса 0

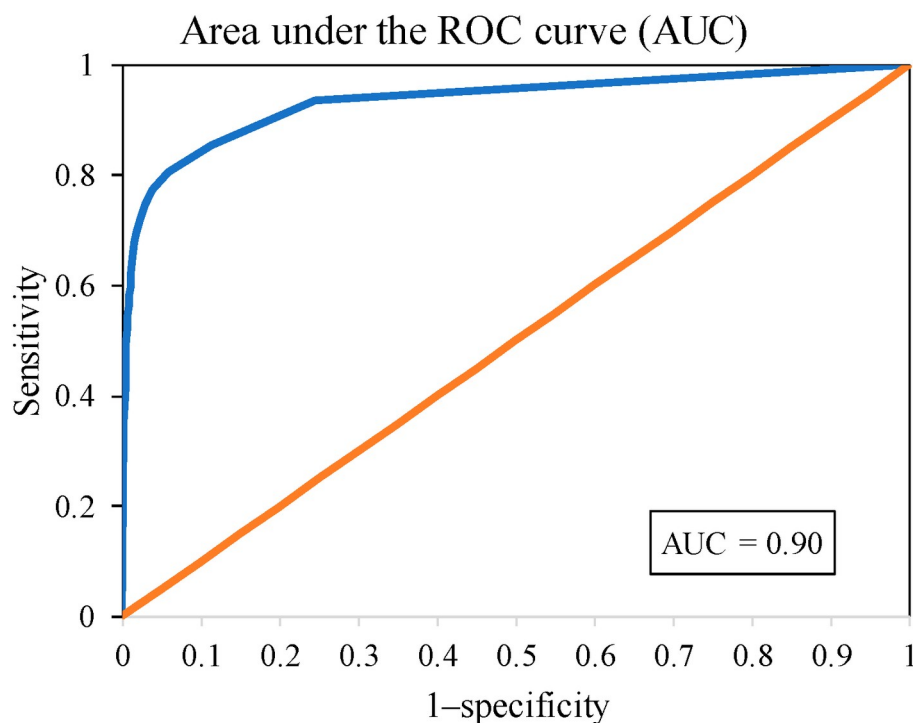
## SENSITIVITY AND SPECIFICITY



гистограммы вероятностей класса "+" для объектов, которые на самом деле принадлежат классу "-" (желтая) и классу "+" (синяя)

# Чувствительность (sensitivity) и специфичность (specificity)

Так как Специфичность =  $1 - \text{FPR}$ , то ROC-кривая также отражает баланс между полнотой в классе 1 (sensitivity) и полнотой в классе 0 для разных значений порога



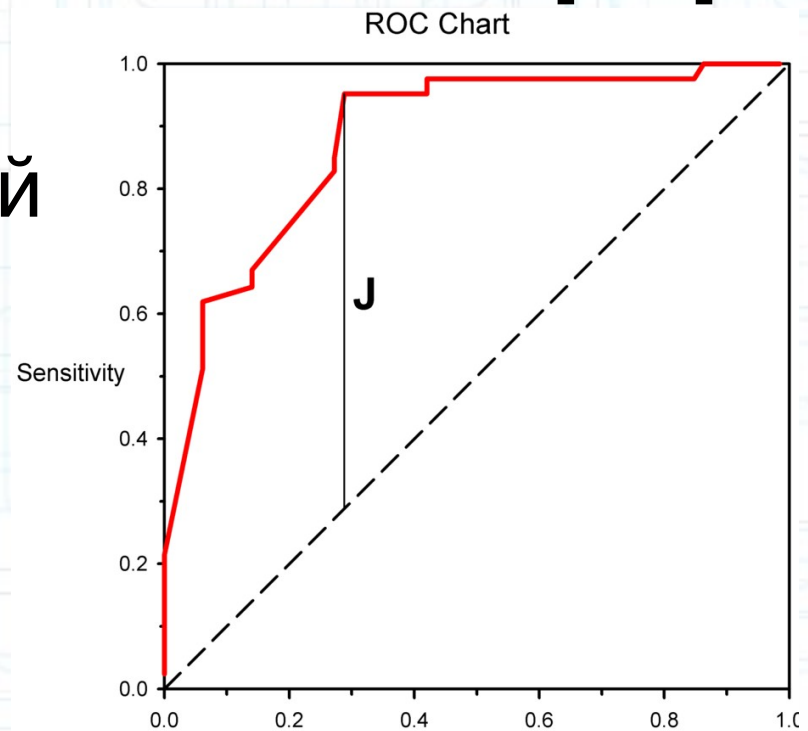


# Проблемы метрик качества

- Популярная Accuracy является плохой оценкой для датасетов с несбалансированными классами (пример: 90% класса 1 и 10% класса 0, предсказываем всем 1)
- Точность (Precision) равна 1, если брать маленький порог в отсортированном ряду предсказаний
- Полнота (Recall) равна 1, если брать большой порог
- F1-мера =  $2/(P^{-1}+R^{-1})$  – очень популярна, но не зависит от TN (True Negative)

# Универсальные метрики

- Balanced accuracy – среднее значение между Sensitivity и Specificity (полнотой в классе 0 и 1). Меняется от 0.5 (random) до 1.
- Индекс Юдена = Sensitivity+Specificity-1. Почти то же самое, но меняется на  $[0,1]$ .
- Равен высоте точки ROC над биссектрисой
- Реализация scikit-learn: `balanced_accuracy_score`





# Вероятностная постановка задачи

- $p(x, y)$  – неизвестная точная плотность распределения на  $X \times Y$
- $X^\ell$  - выборка из случайных, независимых и одинаково распределенных прецедентов
- $p(X^\ell) = p((x_1, y_1), \dots, (x_\ell, y_\ell)) = p(x_1, y_1) \times \dots \times p(x_\ell, y_\ell)$
- $\varphi(x, y, \theta)$  - модель
- Принцип максимума правдоподобия:

$$L(\theta, X^\ell) = \prod_{i=1}^{\ell} \varphi(x_i, y_i, \theta) \rightarrow \max_{\theta}$$



# Decision function

- Предположим, что мы нашли вероятность  $p(y|x)=p(x,y)/p(x)$ . Какое значение  $y$  нужно предсказать для заданного  $x$  ?
- Минимизация среднего риска:

$$a(x) = \arg \min_s E_y \mathcal{L}(s, y)$$

# Несимметричные потери

- Пример: нужно предсказать, сколько фирма потратит на рекламу (**m** - мало 50 т.р, **B** - много 200 т.р.)
- $L(a=m, y=B) = ???$
- $L(a=B, y=m) = ???$



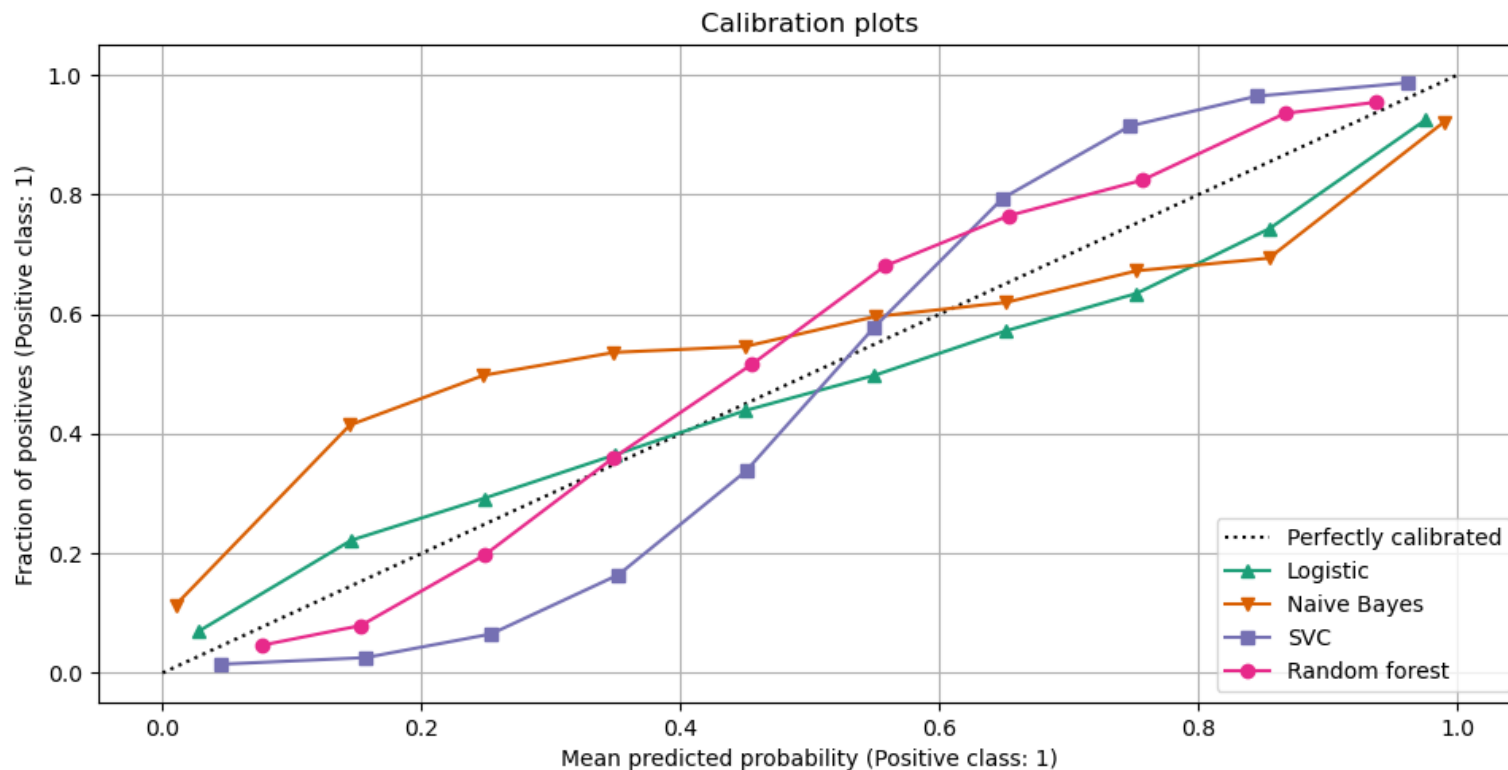
# Несимметричные потери

- Пример: нужно предсказать, сколько фирма потратит на рекламу  
(**m** - мало 50 т.р, **B** - много 200 т.р.)
- $L(a=m, y=B)$  — не сделаем подарочную скидку и от нас могут отказаться и не заказать много рекламы  
 $L(m, B) = 200 \text{ т.р.} * 0.8$  (вер-ть отказа)
- $L(a=B, y=m)$  — сделаем большую скидку, а закажут мало рекламы по низкой цене  
 $L(B, m) = 50 \text{ т.р.} * 0.3$  (скидка)
- Допустим, что метод МО предсказал  
 $p(m|x) = 0.9$      $p(B|x) = 0.1$   
Скидку делать?



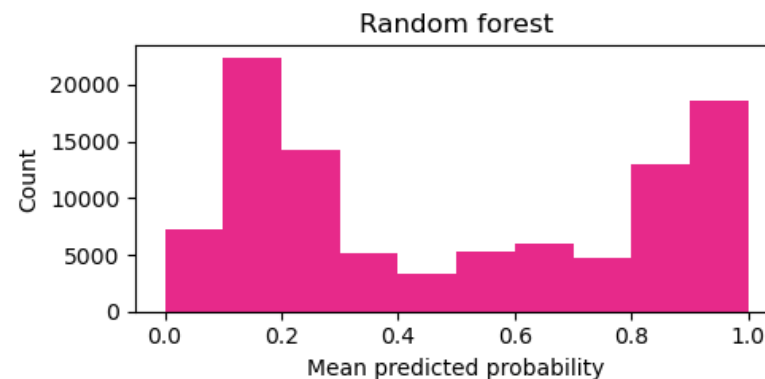
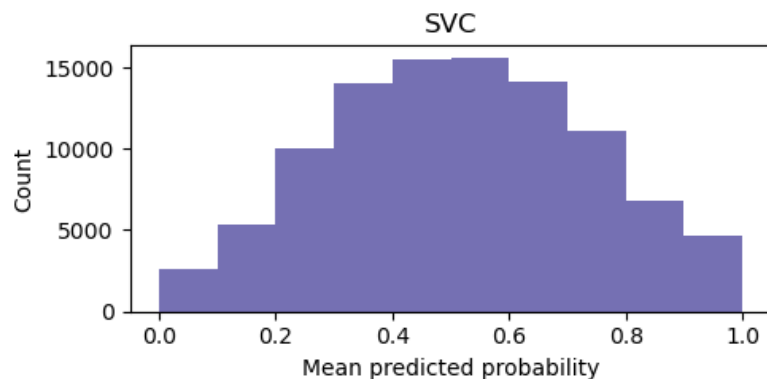
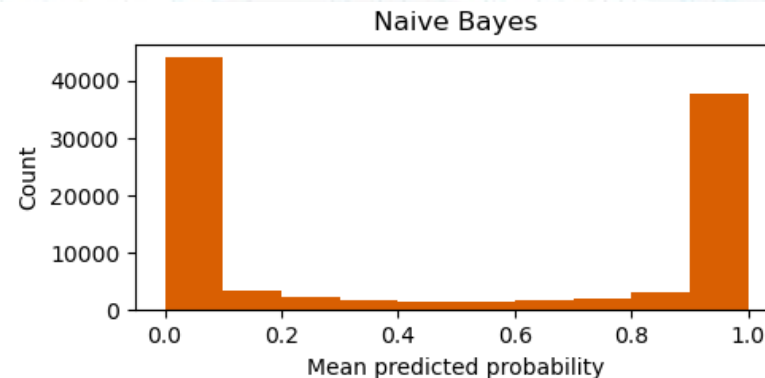
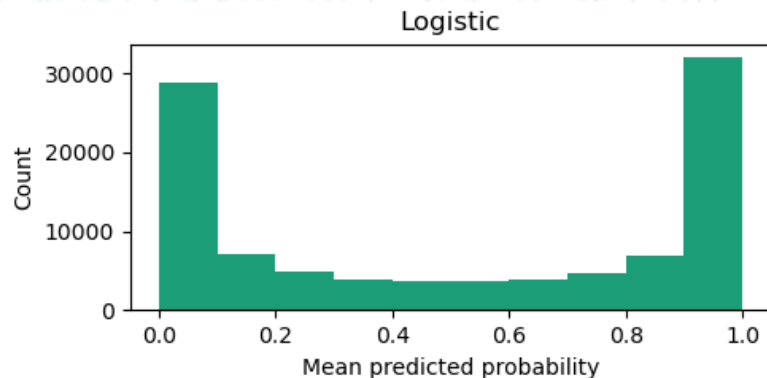
# Калибровка вероятностей

- Классификаторы не всегда возвращают точные вероятности



# Калибровка вероятностей

- Самые точные получаются у логистической регрессии. NB часто возвращает крайние значения: 0 и 1. RF и SVC ведут себя наоборот



# Калибровка в Sklearn

- `model2 = CalibratedClassifierCV(model, cv=2, method="isotonic" или "sigmoid")`
- `sigmoid` менее точная, но не переобучается, предпочтительнее для маленьких выборок

