```
> #solve fsolve
> #Математический анализ в Maple. Лекция 4
> #Команды, записанные с маленькой буквы
> restart :
> sum(i^2, i = 1 ..3);
```

$$14 \qquad (1.1)$$

```
> #Команды, написанные с большой буквы
  - ИНЕРТНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ
> Sum(i^2, i = 1 ..3);
```

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 \qquad (1.2)$$

```
> #Наложение ораничений на переменные. Команда assume
> restart :
  assume(a < -10);
> #Вывод ограничений на экран
> about(a);

Originally a, renamed a~:
  is assumed to be: RealRange(-infinity,Open(-10))

> #Дополнительные ограничения additionally
> additionally(a > -100);
   about(a);
Originally a, renamed a~:
  is assumed to be: RealRange(Open(-100),Open(-10))

> #Предположения для переменной coulditbe
> coulditbe(a =-50);
```

$$true \qquad (1.3)$$

```
> coulditbe(a^2 = 25);
```

$$false \qquad (1.4)$$

```
> coulditbe(a^2 = 2500);
```

$$true \qquad (1.5)$$

```
> #Проверка свойства is
> is(a = 5);
```

$$false \qquad (1.6)$$

```
> a := 5;
```

```
is(a < 7);
```

$$a := 5$$

$$true \tag{1.7}$$

```
> #Вычисление пределов
```

```
> limit(exp(x), x =-infinity);
```

$$0 \tag{1.8}$$

```
> # Предел справа
limit(1/x, x = 0, right);
```

$$\infty \tag{1.9}$$

```
> # Предел слева
limit(1/x, x = 0, left);
```

$$-\infty \tag{1.10}$$

```
> # Комплексный предел
limit(1/x, x = 0, complex);
```

$$\infty + \infty\, \mathrm{I} \tag{1.11}$$

```
> # Действительный предел
limit(1/x^2, x = 0, real); # по умолчанию
```

$$\infty \tag{1.12}$$

```
> limit(1/x^2, x = 0, complex);
```

$$\infty + \infty\, \mathrm{I} \tag{1.13}$$

```
>
#Использование инертной формы записи может привести к ошибке
```

```
> combine(Limit(1/x, x = 0) * Limit(x, x = 0));
```

$$\lim_{x \to 0} 1 \tag{1.14}$$

```
> combine(limit(1/x, x = 0) * limit(x, x = 0));
```

$$undefined \tag{1.15}$$

```
> # ПРИМЕР. Найти предел последовательности
> Limit((n^2-1)/(n^2 + 1), n = infinity) =
limit((n^2-1)/(n^2 + 1), n = infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \tag{1.16}$$

```
> #Вычисление сумм последовательностей и рядов
> sum(1/k!, k = 0 ..infinity);
```

$$\mathrm{e} \tag{1.17}$$

```
> Sum(1/k!, k = 0 ..infinity);
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{1.18}$$

> *evalf*(*sum*(1 / *k*!, *k* = 0 ..10));

$$2.718281801 \tag{1.19}$$

> *value*(*Sum*(1 / *k*!, *k* = 0 ..*infinity*));

$$\mathrm{e} \tag{1.20}$$

> ***# Вычисление произведения последовательностей и рядов***

> *product*((1 - 1 / n^2), n = 2 ..infinity);

$$\frac{1}{2} \tag{1.21}$$

> *h* := *Product*((1 - 1 / n^2), n = 2 ..infinity);

$$h := \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{1.22}$$

> *value*(*h*);

$$\frac{1}{2} \tag{1.23}$$

>

> ***#Дифференцирование функции одной переменной***

> $f := x \rightarrow \sin(x^2)$;

$$f := x \mapsto \sin(x^2) \tag{2.1}$$

> ***diff*(*f*(*x*), *x*) ; # производная первого порядка**

$$2\,x \cos(x^2) \tag{2.2}$$

> $g := x \rightarrow x^3$;

$$g := x \mapsto x^3 \tag{2.3}$$

> ***diff*(*g*(*x*), *x*$2); # производная второго порядка**

$$6\,x \tag{2.4}$$

>

> ***diff*(*g*(*x*), *x*$3); # производная 3-го порядка**

$$6 \tag{2.5}$$

> ***diff*(*g*(*x*), *x*$4); # производная 4 − го порядка**

$$0 \tag{2.6}$$

> *diff*(*g*(*x*), *x*, *x*); # *производная второго порядка*

$$6\,x \tag{2.7}$$

> ***Diff*(*g*(*x*), *x*, *x*); # отложенные вычисления**

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\right) \tag{2.8}$$

> $Diff\left(\cos\left(x^2\right)+x\cdot\sin(x),\ x\$n\right);$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\cos\left(x^2\right)+x\sin(x)\right) \tag{2.9}$$

> ***#Дифференцирование функции многих переменных***

> $restart:$

> $f := (x, y, z)\to x\cdot y\cdot z+\sin(x\cdot y\cdot z)+\exp(x\cdot y\cdot z):$

> $diff(f(x, y, z), x);$

$$yz+yz\cos(xyz)+yz\,e^{xyz} \tag{3.1}$$

> $diff(f(x, y, z), y);$

$$xz+xz\cos(xyz)+xz\,e^{xyz} \tag{3.2}$$

> $diff(f(x, y, z), x, y, z);$

$$1+\cos(xyz)-3zxy\sin(xyz)-y^2z^2x^2\cos(xyz)+e^{xyz}+3zxy\,e^{xyz}+y^2z^2x^2\,e^{xyz} \tag{3.3}$$

> $Diff(f(x, y, z), x, y, z);$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\left(xyz+\sin(xyz)+e^{xyz}\right) \tag{3.4}$$

> $Diff(Diff(\ Diff(f(x, y, z), x), y), z);$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\left(xyz+\sin(xyz)+e^{xyz}\right) \tag{3.5}$$

> $\% - \%\%;$

$$0 \tag{3.6}$$

> $\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\left(xyz+\sin(xyz)+e^{xyz}\right);$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\left(xyz+\sin(xyz)+e^{xyz}\right) \tag{3.7}$$

> $subs(x=1, y=1, z=1, \sin(xyz));$

$$\sin(1) \tag{3.8}$$

> $Diff(f(x, y, z), x\$1, y\$2, z\$3);$

$$\frac{\partial^6}{\partial x\partial y^2\partial z^3}\left(xyz+\sin(xyz)+e^{xyz}\right) \tag{3.9}$$

> ***#Дифференциальный оператор***

> *#Для выполнения дифференцирования применяется также дифференциальный оператор D[i](f), где f - выражение, задающее функцию, i - натуральное число. Если f функция от одного аргумента, то D(f) вычисляет производную от f, например*

> *restart* :

> D(sin);

$$\cos \quad \textbf{(4.1)}$$

> D(sin)(x);

$$\cos(x) \quad \textbf{(4.2)}$$

> D(sin)(pi);

$$\cos(\pi) \quad \textbf{(4.3)}$$

> D(sin)(Pi);

$$-1 \quad \textbf{(4.4)}$$

> *#Если f - функция n аргументов, то D[i](f) вычисляет частную производную по отношению к i - тому аргументу.*
> В *общем случае* $D[i, j](f)$ *эквивалентно* $D[i](D[j](f))$, и $D[\ ](f)$ *=f.*

> *restart* :

> $f := (x, y, z) \rightarrow \sin(x) \cdot y \cdot z^2$;

$$f := (x, y, z) \mapsto \sin(x) \cdot y \cdot z^2 \quad \textbf{(4.5)}$$

> D[1](f);

$$(x, y, z) \mapsto \cos(x) \cdot y \cdot z^2 \quad \textbf{(4.6)}$$

> D[2](f);

$$(x, y, z) \mapsto \sin(x) \cdot z^2 \quad \textbf{(4.7)}$$

> D[3](f);

$$(x, y, z) \mapsto 2 \cdot \sin(x) \cdot y \cdot z \quad \textbf{(4.8)}$$

> D[1, 3](f);

$$(x, y, z) \mapsto 2 \cdot \cos(x) \cdot y \cdot z \quad \textbf{(4.9)}$$

> D[2, 3](f);

$$(x, y, z) \mapsto 2 \cdot \sin(x) \cdot z \quad \textbf{(4.10)}$$

> *#Для выполнения многократного дифференцирования по заданной переменной функции от нескольких переменных применяется оператор D[i$n](f), где i - номер переменной, n - кратность дифференцирования.*

> *restart* :

> D[1$2](f);

$$D_{1,\,1}(f) \quad \textbf{(4.11)}$$

> D[i$n](f);

(4.12)

$$\mathrm{D}_{\underbrace{i,\,\ldots,\,i}_{\text{n times}}}(f) \tag{4.12}$$

> D[i,j](f);

$$\mathrm{D}_{i,\,j}(f) \tag{4.13}$$

> D[i,j](f)-D[j,i](f);

$$0 \tag{4.14}$$

> D[i](D[j,i](f));

$$\mathrm{D}_{i,\,i,\,j}(f) \tag{4.15}$$

> **#convert**

> *restart* :

> *diff*(f(x), x$5);

$$\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5}\,f(x) \tag{4.16}$$

> *convert*(%, D);

$$\mathrm{D}^{(5)}(f)\,(x) \tag{4.17}$$

> *convert*(%, *diff*);

$$\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5}\,f(x) \tag{4.18}$$

> **#Композиция функций**

> (sin@cos)(x);

$$\sin(\cos(x)) \tag{4.19}$$

> (sin@arcsin)(x);

$$x \tag{4.20}$$

> (sin@@2)(x);###

$$\sin^{(2)}(x) \tag{4.21}$$

> cos@@(-1);

$$\arccos \tag{4.22}$$

> (D@@2)(sin);

$$-\sin \tag{4.23}$$

> (D@@2)(exp);

$$\exp \tag{4.24}$$

> *d2* := (D[1$2, 2$3])(p)(x, y);

$$d2 := \mathrm{D}_{1,\,1,\,2,\,2,\,2}(p)(x, y) \tag{4.25}$$

> *d3* := ((D@@2)[1])((D@@3)[2])(p)(x, y);

$$d3 := \left(\mathrm{D}^{(2)}\right)_1\left(\left(\mathrm{D}^{(3)}\right)_2\right)(p)(x, y) \tag{4.26}$$

> *convert*(*d2*, *diff*);

(4.27)

$$\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} p(x, y) \tag{4.27}$$

> $convert(d3, \mathrm{D});$

$$\left(\mathrm{D}^{(2)}\right)_1\left(\left(\mathrm{D}^{(3)}\right)_2\right)(p)(x, y) \tag{4.28}$$

> #***Непрерывность и точки разрыва***
iscont(*f*, *x* = *x1* ..*x2*) – *проверка функции*· (*выражения*) *на непрерывность*

discont(*f*, *x*) – *находит точки нарушения непрерывности*· (в т. ч. *разрывы первого* и *второго рода*) и *отсутствия гладкости*

singular(*f*, *x*) – *находит точки сингулярности*· (т. е. *точки*, в *которых функция не дифференцируема или точки неустранимых разрывов*

> #

```
iscont(expr, x = a .. b)
iscont(expr, x = a .. b, 'closed')
iscont(expr, x = a .. b, 'open')
```

> *restart* :

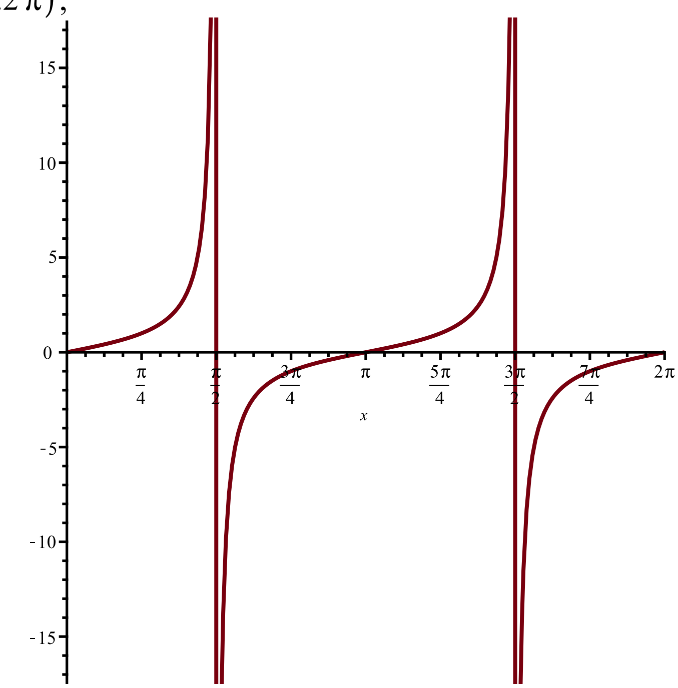
> $iscont(\tan(x), x = 0 ..1);$

$$true \tag{5.1}$$

> $iscont(\tan(x), x = 0 ..2\pi);$

$$false \tag{5.2}$$

> $plot(\tan(x), x = 0 ..2\pi);$



> $iscont\left(\frac{1}{x}, x=0..1\right);$

$$true \tag{5.3}$$

> $iscont\left(\frac{1}{x}, x=0..1, 'closed'\right);$

$$false \tag{5.4}$$

> ***#не может определить - FAIL***

> $iscont\left(\frac{1}{x+a}, x=0..1\right);$

$$FAIL \tag{5.5}$$

> $iscont\left(\frac{1}{x}, x=3..1\right);$

$$true \tag{5.6}$$

> *#discont(f,x) – находит точки нарушения непрерывности (в т. ч. разрывы первого* и *второго рода*) и *отсутствия гладкости*

Говорят, что функция имеет точку разрыва первого рода, если в *этой точке существуют левосторонний предел* и *правосторонний предел.*
Эти односторонние пределы конечны.

Функция имеет точку разрыва второго рода,
если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

> $discont\left(\frac{1}{x}, x\right);$

$$\{0\} \tag{5.7}$$

> $discont(\tan(x), x);$

$$\left\{\pi\_Z2\sim + \frac{1}{2}\pi\right\} \tag{5.8}$$

> *#Функция Дирака, хотя и не является стандартной функцией, считается имеющей разрыв, когда аргумент равен нулю.*

> $discont(\mathrm{Dirac}(x-1), x);$

$$\{1\} \tag{5.9}$$

> *#singular(f,x)*
Особенность, или сингулярность в *математике, — это точка,*
в *которой математический объект*
· (*обычно функция*) *не определён или имеет нерегулярное поведение* · (*например, точка*, в *которой функция имеет разрыв или недифференцируема*).

> $singular\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2-1}\right);$

$$\{x=-1\}, \{x=0\}, \{x=1\} \tag{5.10}$$

> $singular\left(\dfrac{x}{x-y}\right);$

$$\{x=y, y=y\} \tag{5.11}$$

> $singular(\tan(x));$

$$\left\{x=\frac{1}{2}\pi+\_Z3\sim\pi\right\} \tag{5.12}$$

> $singular(\tan(x), 1..10);$

$$\left\{x=\frac{\pi}{2}\right\}, \left\{x=\frac{3\pi}{2}\right\}, \left\{x=\frac{5\pi}{2}\right\} \tag{5.13}$$

> ***#Экстремумы. Наибольшее и наименьшее значение функции***

> *#В Maple для исследования функции на экстремум имеется команда*
extrema$(f, \{cond\}, x, 's')$
, где f – функция, экстремумы которой ищутся,
в *фигурных скобках* $\{cond\}$ *указываются ограничения для переменной*, x
– *имя переменной, по которой ищется экстремум*, в *апострофах 's'*
– *указывается имя переменной,*
которой будет присвоена координата точки экстремума
. Если оставить пустыми фигурные скобки { },
то поиск экстремумов будет производиться на всей числовой оси
. Результат действия этой команды относится к *типу set.*

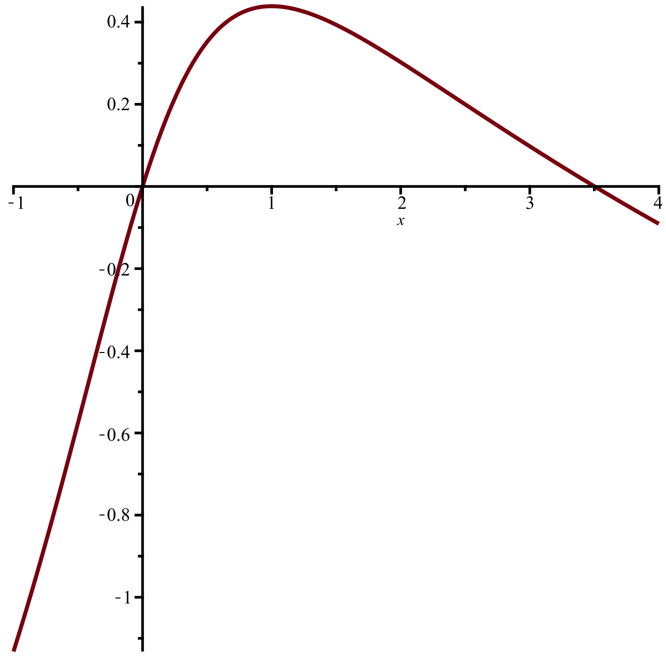
Эта команда не может дать ответ на вопрос,
какая из точек экстремума есть максимум, а *какая – минимум*

> $restart:$

> $f := x \rightarrow \arctan(x) - \ln(1+x\verb|^|2)/2;$

$$f := x \mapsto \arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} \tag{6.1}$$

> $plot(f(x), x=-1..4);$



> *evalf*(*extrema*($f(x)$, { }, *x*,'*x0*')); *x0*;

$$\{0.4388245732\}$$

$$\{\{x = 1\}\} \qquad \textbf{(6.2)}$$

> ***#Максимумы и минимумы***

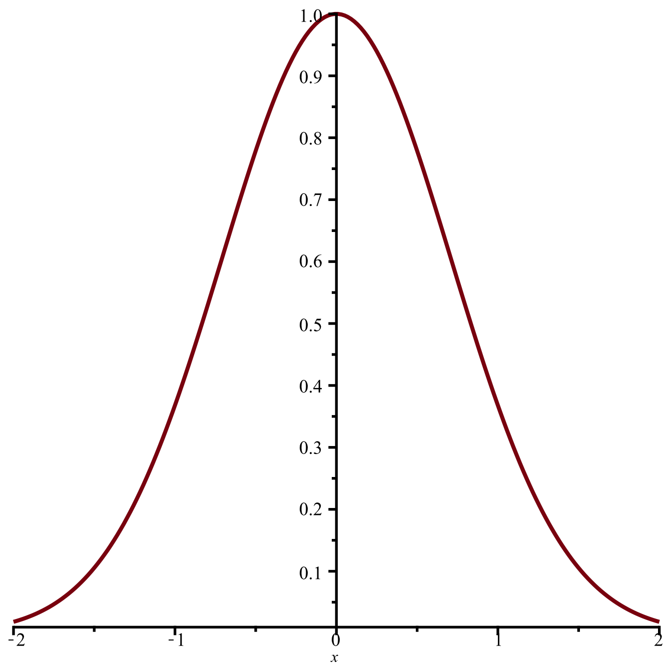
> *#Для нахождения максимума функции f(x) по переменной x на интервале используется команда*
maximize($f, x, x = x1 \,..x2$),
а *для нахождения минимума функции* $f(x)$ *по переменной* x *на интервале используется команда minimize*($f, x, x = x1 \,..x2$).

> *restart* :

> $f := x \rightarrow \exp(-x\text{^}2)$;

$$f := x \mapsto e^{-x^2} \qquad \textbf{(6.3)}$$

> *plot*($f(x), x = -2 \,..2$);



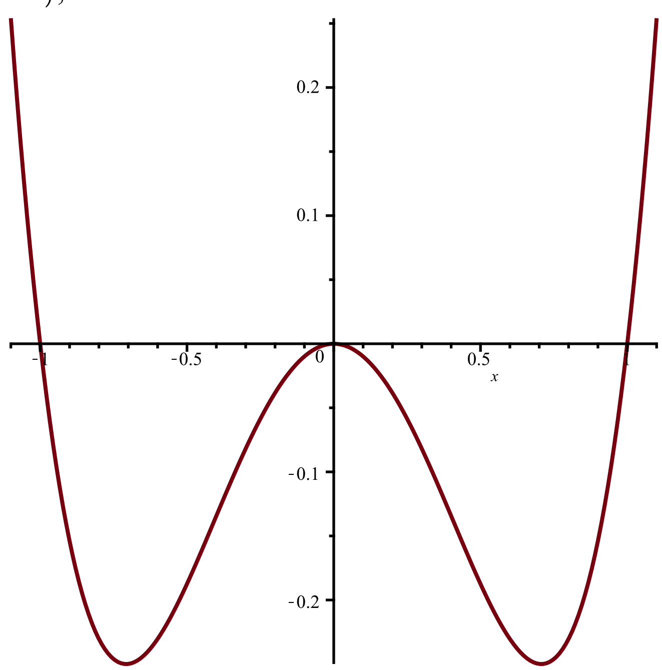
> $maximize(f(x), x = -2..2);$

$$1 \tag{6.4}$$

> $g := x \to x^4 - x^2;$

$$g := x \mapsto x^4 - x^2 \tag{6.5}$$

> $plot(g(x), x = -1.1..1.1);$



> $minimize(g(x), x, location);$

$$-\frac{1}{4}, \left\{\left[\left\{x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, -\frac{1}{4}\right], \left[\left\{x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, -\frac{1}{4}\right]\right\} \tag{6.6}$$

> #*Команды maximize и minimize быстро находят абсолютные экстремумы, но не всегда пригодны для нахождения локальных экстремумов*

> ***#extrema***

> #*Команда extrema вычисляет так же критические точки, в которых функция не имеет экстремума.*
Критические точки
– это точки в *которых производная функции равна нулю или не существует.*

> $extrema\left(a x^2 + b x + c, \{\ \}, x\right);$

$$\left\{\frac{4 c a - b^2}{4 a}\right\} \tag{6.7}$$

> $extrema\left(a x y z, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \{x, y, z\}\right);$

$$\left\{\max\left(0, -\frac{\sqrt{3}\, a}{9}, \frac{\sqrt{3}\, a}{9}\right), \min\left(0, -\frac{\sqrt{3}\, a}{9}, \frac{\sqrt{3}\, a}{9}\right)\right\} \tag{6.8}$$

> ***#Разложение и приближение функций***

> #*series(f(x), x=a, n) – разложение функции f в ряд*

> #*Степенной ряд с одной переменной — это формальное алгебраическое выражение, в котором коэффициенты берутся из некоторого кольца.*

> #*Ряды Тейлора применяются при аппроксимации функции многочленами.*
В *частности,*
линеаризация уравнений происходит путём разложения в *ряд Тейлора* и *отсечения всех членов выше первого порядка.*

> # ***taylor(f(x), x=a, n)*** *– разложение функции одной переменной в ряд Тейлора*

> # ***coeftayl(f(x), vars, n)*** *– коэффициент при члене порядка n по переменным разложения vars*

> # ***mtaylor(f(x), [x1=a1,…,xn=an], n)*** *– разложение функции многих переменных* в *ряд Тейлора*

> $series\left(\frac{\exp(x)}{x}, x = 0, 8\right);$

$$x^{-1} + 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{24} x^3 + \frac{1}{120} x^4 + \frac{1}{720} x^5 + \frac{1}{5040} x^6 + \mathrm{O}\left(x^7\right) \tag{1}$$

>

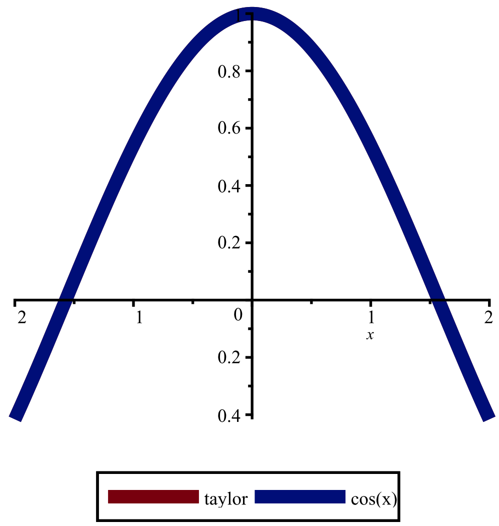
> $taylor(\cos(x), x = 0, 10);$

$$1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6 + \frac{1}{40320} x^8 + \mathrm{O}\left(x^{10}\right) \tag{2}$$

> $q := convert(\%, polynom);$

$$q := \frac{1}{40320}\,x^8 - \frac{1}{720}\,x^6 + \frac{1}{24}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + 1 \qquad \textbf{(3)}$$

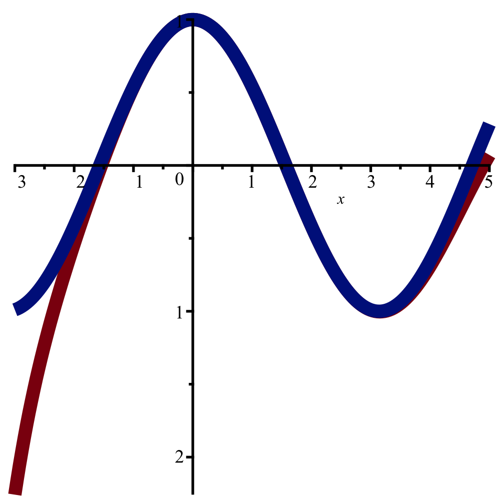
> $plot([q, \cos(x)], x = -2..2, thickness = 5, legend = [\text{"taylor"}, \text{"cos(x)"}]);$



> $q1 := convert(taylor(\cos(x), x = 1, 8), polynom);$

$$q1 := \cos(1) \quad \sin(1)\,(x \quad 1) \quad \frac{\cos(1)\,(x \quad 1)^2}{2} + \frac{\sin(1)\,(x \quad 1)^3}{6} + \frac{\cos(1)\,(x \quad 1)^4}{24} \qquad \textbf{(4)}$$
$$\quad \frac{\sin(1)\,(x \quad 1)^5}{120} \quad \frac{\cos(1)\,(x \quad 1)^6}{720} + \frac{\sin(1)\,(x \quad 1)^7}{5040}$$

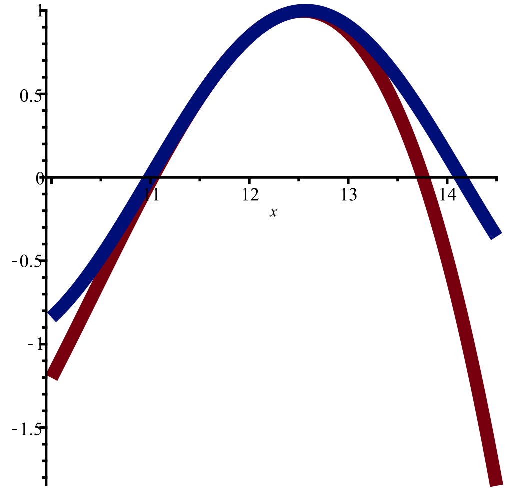
> $plot([q1, \cos(x)], x = \ 3..5, thickness = 5);$



> $q2 := convert(taylor(\cos(x), x = 12, 4), polynom);$

$$q2 := \cos(12) \quad \sin(12)\,(x \quad 12) \quad \frac{\cos(12)\,(x \quad 12)^2}{2} + \frac{\sin(12)\,(x \quad 12)^3}{6} \qquad \textbf{(5)}$$

> $plot([q2, \cos(x)], x = 10..14.5, thickness = 5);$



> **# Порядок разложения**
Order := 7 :

> $p := taylor(\sin(x), x=0);$
 # Преобразование в полином
$r := convert(p, polynom);$
 # Коэффициенты полинома
$coeffs(r);$

$$p := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{O}(x^7)$$

$$r := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

$$1, -\frac{1}{6}, \frac{1}{120} \tag{6}$$

> **#Коэффициенты в разложении ряда**

> $taylor(\exp(x), x=0, 6);$

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \mathrm{O}(x^6) \tag{7}$$

> $coeftayl(\exp(x), x=0, 3);$

$$\frac{1}{6} \tag{8}$$

> $taylor\left(\frac{1}{x} + y + x^3, x=0\right);$

Error, does not have a taylor expansion, try series()

> $series\left(\frac{1}{x} + y + x^3, x=0\right);$

$$x^{-1} + y + x^3 \tag{9}$$

> $mtaylor\left(\frac{1}{x}+y+x^3, [x=1, y]\right);$

$$-(x-1)^5+(x-1)^4+4(x-1)^2+2x+y \quad (10)$$

> ?*mtaylor;*

> $mtaylor\left(\exp\left(x^2+y^2\right), [x, y], 8\right);$

$$1+x^2+y^2+\frac{1}{2}x^4+y^2x^2+\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{2}y^2x^4+\frac{1}{2}y^4x^2+\frac{1}{6}y^6 \quad (11)$$

> ***#Если функция многих переменных***

> $mtaylor(\sin(x) * \exp(y), [x, y], 4);$

$$x+xy+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{6}x^3 \quad (12)$$

> $help(mtaylor);$

> ***#Интегрирование***

> $f := 7x^3+3x^2+5x:$

> $int(f, x)$

$$\frac{7}{4}x^4+x^3+\frac{5}{2}x^2 \quad (13)$$

> $int(\sin(x), x)$

$$-\cos(x) \quad (14)$$

> $int\left(\frac{x}{x^3-1}, x\right)$

$$\frac{\ln(x-1)}{3}-\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{6}+\frac{\sqrt{3}\arctan\left(\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\right)}{3} \quad (15)$$

> $int\left(\exp\left(-x^2\right), x\right)$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x)}{2} \quad (16)$$

> ?*erf;*

> ***#If Maple cannot find a closed form expression for the integral, the function call is returned.***

> $int\left(\exp\left(-x^2\right)\ln(x), x\right)$

$$\int e^{-x^2}\ln(x)\,dx \quad (17)$$

> ***#Compute definite integrals.***

> $int(\sin(x), x=0..\pi)$

$$2 \quad (18)$$

> $int\left(\exp\left(-x^2\right)\ln(x), x=0..\infty\right)$

$$-\frac{\sqrt{\pi}\,\gamma}{4} - \frac{\sqrt{\pi}\,\ln(2)}{2} \tag{19}$$

> $int\left(\exp\left(-x^2\right)\ln(x)^2, x=0..\infty\right)$

$$\frac{\pi^{5/2}}{16} + \frac{\gamma^2\sqrt{\pi}}{8} + \frac{\gamma\sqrt{\pi}\,\ln(2)}{2} + \frac{\sqrt{\pi}\,\ln(2)^2}{2} \tag{20}$$

> ***#A double integral***

> $int\left(x\,y^2, [x, y]\right)$

$$\frac{x^2 y^3}{6} \tag{21}$$

> $int\left(x\,y^2, [x=0..y, y=-2..2]\right)$

$$\frac{32}{5} \tag{22}$$

> *#If either of the integration limits are floating-point numbers, then int computes the integral using numerical methods.*

> $int\left(x\,y^2, [x=0...y, y=-2.0..2]\right)$

$$6.400000000 \tag{23}$$

> *#An integral with decimal limits using numerical methods:*

> $int\left(\frac{x}{x^3+1}, x=0.75..1.25\right)$

$$0.2459707569 \tag{24}$$

> *#To apply symbolic integration methods instead, use numeric=false:*

> $int\left(\frac{x}{x^3+1}, x=0.75..1.25, numeric\right);$

$$0.2459707569 \tag{25}$$

> $int\left(\frac{x}{x^3+1}, x=0.75..1.25, numeric=false\right)$

$$-\frac{\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{3} - \frac{\ln(13)}{6} + \frac{\ln(7)}{2} + \frac{\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3} - \frac{\ln(3)}{2} \tag{26}$$

> *#The option numeric=true or simply numeric may also be used to compute a numerical integral even with exact limits:*

> $int\left(\frac{x}{x^3+1}, x=\frac{3}{4}..\frac{5}{4}, numeric=true\right)$

$$0.2459707569 \quad (27)$$

>

> ***#A double integral***

> $Int\left(x\,y^2, [x=0..1, y=0..1]\right)$

$$\int_0^1\int_0^1 x\,y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (28)$$

> $int\left(x\,y^2, x, y\right)$

$$\frac{x^2\,y^3}{6} \quad (29)$$

> $int\left(x\,y^2, [x=0..y, y=-2..2]\right)$

$$\frac{32}{5} \quad (30)$$

> ***#Вычисление интегралов***

> $Int\left(\frac{\exp(-x^3)}{x^2+1}, x=0..1\right);$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^3}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad (31)$$

> $evalf\left(Int\left(\frac{\exp(-x^3)}{x^2+1}, x=0..1\right)\right)$

$$0.6649369431 \quad (32)$$

> $evalf\left(Int\left(\frac{1}{x^2+1}, x=0..\infty\right)\right)$

$$1.570796327 \quad (33)$$

> $evalf\left(Int\left(\sin(x)\ln(x)\exp(-x^3), x=0..\text{infinity}\right)\right)$

$$-0.1957885158 \quad (34)$$

> $evalf\left(Int\left(\sin(x)\ln(x)\exp(-x^3), x=-1..0\right)\right)$

$$0.2849533686 - 2.222543689\,\mathrm{I} \quad (35)$$

> ***#Двойные интергралы***

> *restart* :

> *with*(*student*);

[D, *Diff*, *Doubleint*, *Int*, *Limit*, *Lineint*, *Product*, *Sum*, *Tripleint*, *changevar*, *completesquare*, *distance*, *equate*, *integrand*, *intercept*, *intparts*, *leftbox*, *leftsum*, *makeproc*, *middlebox*, *middlesum*, *midpoint*, *powsubs*, *rightbox*, *rightsum*, *showtangent*, *simpson*, *slope*, *summand*, (36) *trapezoid*]

> $Doubleint(g(x), x, y)$

$$\int\int g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{37}$$

> $Doubleint(h\,g, x=1..n, y=2..4)$

$$\int_{2}^{4}\int_{1}^{n} h\,g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{38}$$

> $Doubleint(h\,g, x, y, C)$

> ?*TaylorApproximationTutor;*

> *with*(*Student*[*MultivariateCalculus*]);

[*&x*, \`.\`, *Angle*, *ApproximateInt*, *ApproximateIntTutor*, *AreOrthogonal*, *AreParallel*, *AreSkew*, *BoxProduct*, *CenterOfMass*, *ChangeOfVariables*, *Contains*, *CrossProduct*, *CrossSection*, *CrossSectionTutor*, *Del*, *DirectionalDerivative*, *DirectionalDerivativeTutor*, *Distance*, *DotProduct*, *Equal*, *FunctionAverage*, *GetDimension*, *GetDirection*, *GetIntersection*, *GetNormal*, *GetPlot*, *GetPoint*, *GetRepresentation*, *Gradient*, *GradientTutor*, *Intersects*, *Jacobian*, *LagrangeMultipliers*, *Line*, *MultiInt*, ∇, *Norm*, *Normalize*, *Plane*, *Projection*, *Revert*, *SecondDerivativeTest*, *SurfaceArea*, *TaylorApproximation*, *TaylorApproximationTutor*, *TripleScalarProduct*, *diff*] **(39)**

> $MultiInt\left(3x^2 + 3y^2, x=1..4, y=-1..6\right)$

$$1092 \tag{40}$$

> $MultiInt\left(r, r=1..4, \theta=0..\frac{\pi}{2}, coordinates=\mathrm{polar}[r, \theta]\right)$

$$\frac{21\pi}{2} \tag{41}$$

> $MultiInt\left(r+\theta+z, r=0..2, \theta=2..4, z=\frac{\pi}{2}..\pi, coordinates=cylindrical[r, \theta, z]\right)$

$$\frac{26}{3}\pi + \frac{3}{2}\pi^2 \tag{42}$$

> $MultiInt(r, r=0..\pi, \theta=0..\pi, \phi=0..\pi, coordinates=spherical[r, \theta, \phi])$

$$\frac{\pi^5}{2} \tag{43}$$

> $MultiInt\left(x^2+y^2+z, z=-2..4+y^2, y=x-1..x+6, x=2..4, output=integral\right)$

$$\int_{2}^{4}\int_{x-1}^{x+6}\int_{-2}^{y^2+4} \left(x^2+y^2+z\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{44}$$

> $MultiInt\left(x^2+y^2, [x, y]=Circle(\langle 0, 0\rangle, r)\right)$

$$\frac{\pi r^4}{2} \tag{45}$$

> $MultiInt(x\,y, [x, y]=Triangle(\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle))$

```
> #
# int(f, x) – неопределенный интеграл
# int(f, x=a..b) – определенный интеграл
# Int – аналогичная инертная команда
# evalf(int(f, x=x1..x2), digits) -
# intparts(f, u) -
# IntRules  -
# Rule -      Student[Calculus1]
# changevar(s, f) -      ,
# Повторный интеграл – вложенность команд int
# Doubleint(f(x, y), D) – двойной интеграл
# Tripleint(f(x, y, z),x, y, z, V) – тройной интеграл
#MultiInt(f(x,y,z), x=a..b, y=c..d, z=e..f, opts) -
```

> *#Полиномиальная интерполяция*

Интерполя́ция, интерполи́рование · (*от лат. inter–polis — «разглаженный, подновлённый, обновлённый; преобразованный»*)
— в *вычислительной математике нахождение неизвестных промежуточных значений некоторой функции, по имеющемуся дискретному набору её известных значений, определенным способом. Термин «интерполяция*
» впервые употребил Джон Валлис в *своём трактате «Арифметика бесконечных*
» (1656).

На практике чаще всего применяют интерполяцию многочленами
. *Это связано прежде всего* с *тем, что многочлены легко вычислять, легко аналитически находить их производные* и *множество многочленов плотно* в *пространстве непрерывных функций* (*теорема Вейерштрасса*)
.*На практике чаще всего применяют интерполяцию многочленами*
. *Это связано прежде всего* с *тем, что многочлены легко вычислять, легко аналитически находить их производные* и *множество многочленов плотно* в *пространстве непрерывных функций* (*теорема Вейерштрасса*).

> $with(plots)$:

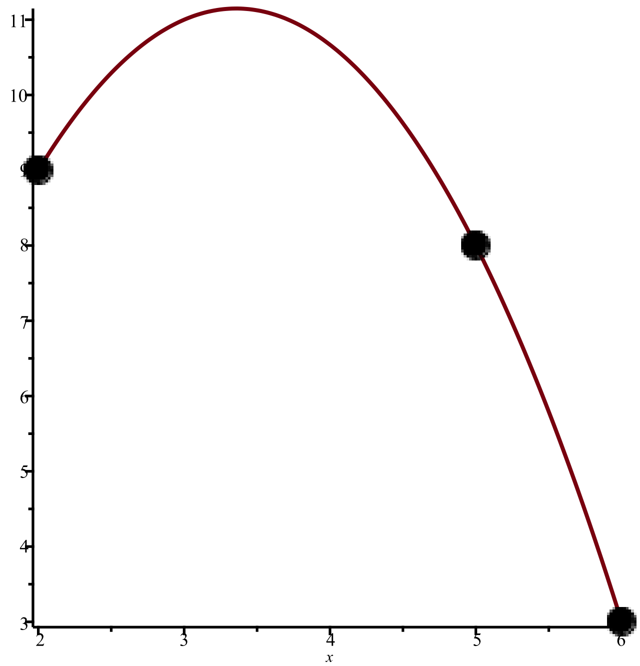
> $i1 := interp([2, 5, 6], [9, 8, 3], x);$

$$i1 := -\frac{7}{6}x^2 + \frac{47}{6}x - 2 \qquad \textbf{(46)}$$

> $ip1 := plot(i1, x = 2..6)$:

> $ip2 := pointplot([[2, 5, 6], [9, 8, 3]], symbol = \text{"solidcircle"}, symbolsize = 30)$:

> $display(ip1, ip2);$



> $with(Student[NumericalAnalysis])$:

> $PolynomialInterpolation([[0, 0], [1, 3], [2, 1], [3, 3]], z);$

$$\frac{3}{2} z^3 - 7 z^2 + \frac{17}{2} z \quad \textbf{(47)}$$

> $PolynomialInterpolation([0, 2, 4, 7], [2, a, 1, 3], 3);$

$$\frac{19}{70} + \frac{3 a}{5} \quad \textbf{(48)}$$

> $PolynomialInterpolation([0, 2, 4, 7], [2, a, 1, 3], z, form = Lagrange)$

$$-\frac{(z-2)(z-4)(z-7)}{28} + \frac{a z (z-4)(z-7)}{20} - \frac{z (z-2)(z-7)}{24} + \frac{z (z-2)(z-4)}{35} \quad \textbf{(49)}$$

>

> $xy := [[0, 4.0], [0.5, 0], [1.0, -2.0], [1.5, 0], [2.0, 1.0], [2.5, 0], [3.0, -0.5]]$

$$xy := [[0, 4.0], [0.5, 0], [1.0, -2.0], [1.5, 0], [2.0, 1.0], [2.5, 0], [3.0, -0.5]] \quad \textbf{(50)}$$

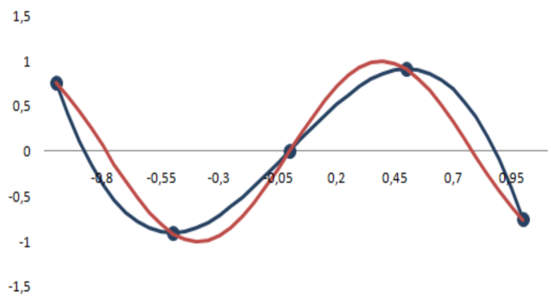
> $p1a := PolynomialInterpolation\left(xy, function = 2^{2-x} \cos(\pi x), method = lagrange, extrapolate = [0.25, 0.75, 1.25], errorboundvar = \xi\right)$:

> $p1b := CubicSpline\left(xy, function = 2^{2-x} \cos(\pi x), extrapolate = [0.25, 0.75, 1.25]\right)$:

> $expand(Interpolant(p1a));$

$$71.08333335 x^3 - 41.05555556 x^4 + 10.60000001 x^5 - 1.022222222 x^6 + 4.000000000 - 48.67222223 x^2 + 3.066666669 x \quad \textbf{(51)}$$

> ***#Интерполяция сплайнами***



> *# сплайн — это кусочно заданная функция, то есть совокупность нескольких функций, каждая из которых задана на каком-то множестве значений аргумента, причём эти множества попарно непересекающиеся.*

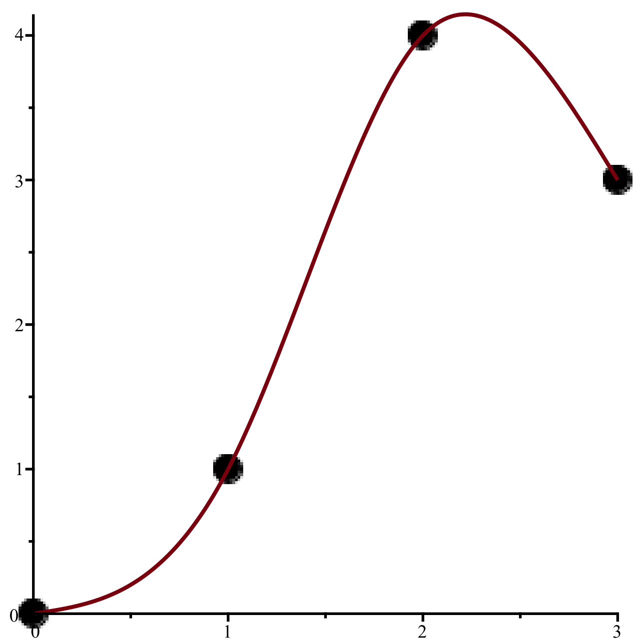
> $with(CurveFitting) : with(plots) :$

> $y1 := Spline([[0, 0], [1, 1], [2, 4], [3, 3]], x);$

$$y1 := \begin{cases} \frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{5}x & x < 1 \\ -2x^3 + \frac{42}{5}x^2 - \frac{41}{5}x + \frac{14}{5} & x < 2 \\ \frac{6}{5}x^3 - \frac{54}{5}x^2 + \frac{151}{5}x - \frac{114}{5} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (52)$$

> $p0 := pointplot([[0, 0], [1, 1], [2, 4], [3, 3]], symbol = \text{"solidcircle"}, symbolsize = 30) :$

> $p1 := plot(y1, x = 0..3) :$
> $display(p0, p1);$



> $y2 := Spline([0, 1, 2, 3], [0, 1, 4, 3], x, degree = 1);$

(53)

$$y2 := \begin{cases} x & x < 1 \\ -2 + 3x & x < 2 \\ 6 - x & \mathit{otherwise} \end{cases} \tag{53}$$

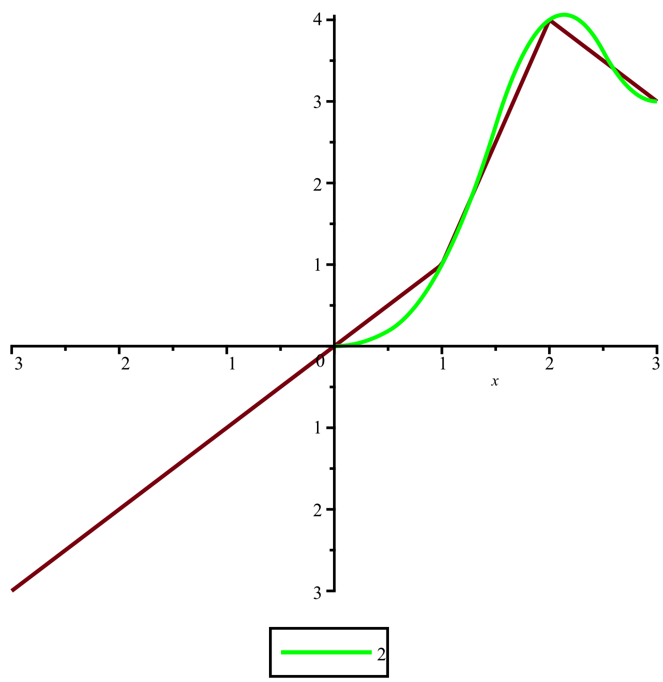
> $plot(y2, x = -0.1 ..3, color = \text{"red"}, legend = \text{"1"})$:

> $y3 := Spline([0, 1, 2, 3], [0, 1, 4, 3], x, degree = 2);$

$$y3 := \begin{cases} \frac{26x^2}{35} & x < \frac{1}{2} \\ \frac{62}{35}x^2 - \frac{36}{35}x + \frac{9}{35} & x < \frac{3}{2} \\ -\frac{118}{35}x^2 + \frac{72}{5}x - \frac{396}{35} & x < \frac{5}{2} \\ \frac{86}{35}x^2 - \frac{516}{35}x + \frac{879}{35} & \mathit{otherwise} \end{cases} \tag{54}$$

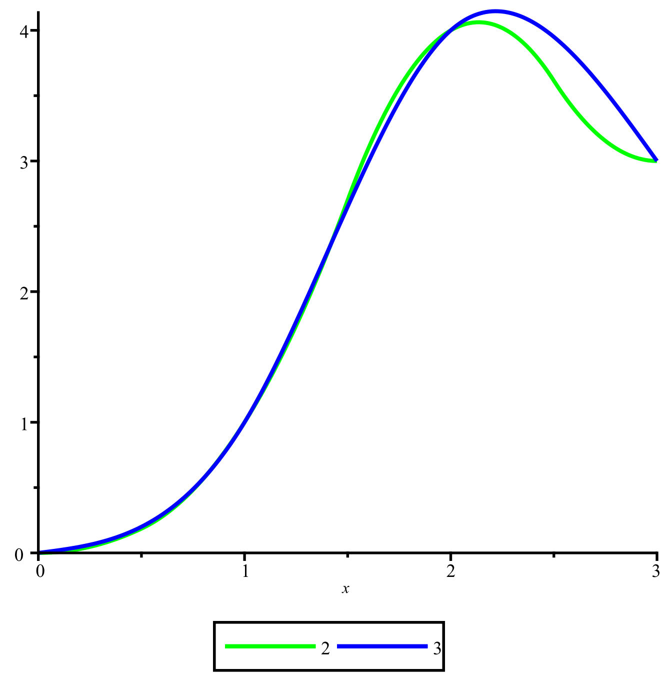
> $p3 := plot(y3, x = 0 ..3, color = \text{"green"}, legend = \text{"2"})$:

> $display(p2, p3);$



> $y4 := Spline([0, 1, 2, 3], [0, 1, 4, 3], x, degree = 3);$
$p4 := plot(y4, x = 0 ..3, color = \text{"blue"}, legend = \text{"3"})$:
$display(p3, p4);$

$$y4 := \begin{cases} \frac{4}{5}x^3 + \frac{1}{5}x & x < 1 \\ 2x^3 + \frac{42}{5}x^2 \quad \frac{41}{5}x + \frac{14}{5} & x < 2 \\ \frac{6}{5}x^3 \quad \frac{54}{5}x^2 + \frac{151}{5}x \quad \frac{114}{5} & \mathit{otherwise} \end{cases}$$



> ***#Интегральные преобразования.***
> ***Преобразование Фурье***

> *# Преобразование Фурье используется во многих областях науки — в физике, теории чисел, комбинаторике, обработке сигналов, теории вероятностей, статистике, криптографии, акустике, океанологии, оптике, геометрии и многих других. В обработке сигналов и связанных областях преобразование Фурье обычно рассматривается как декомпозиция сигнала на частоты и амплитуды, то есть обратимый переход от временного пространства в частотное пространство.*

> *# Преобразование Фурье позволяет представить непрерывную функцию f(x) (сигнал), определенную на отрезке {0, T} в виде суммы бесконечного числа (бесконечного ряда) тригонометрических функций (синусоид и\или косинусоид) с определёнными амплитудами и фазами, также рассматриваемых на отрезке {0, T}. Такой ряд называется рядом Фурье.*

> *#В Maple имеется пакет* ***inttrans****, в котором содержатся команды различных интегральных преобразований.*

> *# Прямое преобразование Фурье функции f(x) вычисляется по формуле*

>

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

> *# В Maple оно может быть найдено командой fourier(f(x),x,k), где x - переменная, по которой производится преобразование, k - имя переменной, которое следует*

присвоить параметру преобразования.

> *#Обратное преобразование Фурье задается формулой*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}\,dk$$

> # и *вычисляется командой* ***invfourier***$(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})$

> *with*(*inttrans*);

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable, setup*] **(7.1)**

> *fourier*$(f(x), x, k)$;

$$\mathcal{F}(f(x), x, k) \tag{7.2}$$

> *invfourier*$(F(k), k, x)$;

$$\mathcal{F}^{-1}(F(k), k, x) \tag{7.3}$$

> *assume*$(a > 0)$:

> $f1 := fourier(\exp(-a * \mathrm{abs}(x)), x, k)$;

$$f1 := \frac{2\,a\sim}{a\sim^2 + k^2} \tag{7.4}$$

> $f2 := invfourier(f1, k, x)$;

$$f2 := \mathrm{Heaviside}(-x)\,\mathrm{e}^{a\sim x} + \mathrm{Heaviside}(x)\,\mathrm{e}^{-a\sim x} \tag{7.5}$$

> # *Описанное выше прямое и обратное преобразования Фурье называются комплексными и применяются в тех случаях, когда функция f(x) задана на всей числовой оси.*

> # *Если функция f(x) задана только при x>0, то рекомендуется использовать синус- и косинус- преобразования Фурье.*

> # *Синус-преобразование Фурье и косинус-преобразование Фурье — одни из видов преобразований Фурье, не использующих комплексные числа.*

$$F(s) = \frac{\sqrt{2}\left(\int_0^{\infty} f(t)\cos(s\,t)\,\mathrm{d}t\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$F(s) = \frac{\sqrt{2}\left(\int_0^{\infty} f(t)\sin(s\,t)\,\mathrm{d}t\right)}{\sqrt{\pi}}$$

> #
fouriersin$(f(x), x, k)$ - *вычисляет прямое синус-преобразование Фурье;*
fouriersin$(F(k), k, x)$ - *вычисляет обратное синус-преобразование Фурье.*

> *with*(*inttrans*) :

> $fouriersin\left(\frac{3}{t+a}, t, w\right)$

$$\frac{3\sqrt{2}\,(-\cos(w)\,\mathrm{Ssi}(w)+\sin(w)\,\mathrm{Ci}(w))}{\sqrt{\pi}} \quad \textbf{(7.6)}$$

> $fouriersin\left(\frac{t}{t^2+1}, t, s\right)$

$$\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-s}}{2} \quad \textbf{(7.7)}$$

> $fouriercos\left(\frac{3}{t+a}, t, w\right)$

$$\frac{3\sqrt{2}\,(-\sin(w)\,\mathrm{Ssi}(w)-\cos(w)\,\mathrm{Ci}(w))}{\sqrt{\pi}} \quad \textbf{(7.8)}$$

> $fouriercos\left(\frac{1}{t^2+1}, t, s\right)$

$$\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-s}}{2} \quad \textbf{(7.9)}$$

> $fourier(\cos(a*x)*\sinh(b*x), x, k); invfourier(\%, k, x);$

$$-\frac{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}a\sim x-bx}, x, k\right)}{4}+\frac{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{I}a\sim x+bx}, x, k\right)}{4}-\frac{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{I}a\sim x-bx}, x, k\right)}{4}+\frac{\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{I}a\sim x+bx}, x, k\right)}{4}$$

$$\cos(a\sim x)\,\sinh(b\,x) \quad \textbf{(7.10)}$$

> ***#Интегральные преобразования.***
> ***Преобразование Лапласа***

> # *Преобразова́ние Лапла́са* $\cdot\,(\mathcal{L})$ — *интегральное преобразование, связывающее функцию* $F(s)$ *комплексного переменного* $\cdot$ (*изображение*) с *функцией* $f(x)$ *вещественного переменного* $\cdot$ (*оригинал*). С *его помощью исследуются свойства динамических систем* и *решаются дифференциальные* и *интегральные уравнения.*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt.$$

> *# Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Так, свёртка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими.*

> **# *laplace*(*f*(*x*), *x*, *p*) – *преобразование Лапласа***

> **# *invlaplace*(*F*(*p*), *p*, *x*)) – *обратное преобразование Лапласа***

```
> restart : with(inttrans) :
> F(p) = laplace(cos(a*x)*sinh(b*x), x, p);
```

$$F(p) = \frac{b\left(-a^2 - b^2 + p^2\right)}{\left((p+b)^2 + a^2\right)\left((p-b)^2 + a^2\right)} \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

```
> invlaplace(%, p, x);
```

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p), p, x) = \cos(a\,x)\,\sinh(b\,x) \qquad \textbf{(7.1.2)}$$

```
> assume(a > 0) : invlaplace(1/(p^2 + 2*a*p), p, x) :
> combine(%, trig);
```

$$-\frac{-1 + e^{-2\,a\sim x}}{2\,a\sim} \qquad \textbf{(7.1.3)}$$

>