1

> \# *Найти предел последовательности*

> $Limit((n^\wedge 2-1)/(n^\wedge 2+1), n=\text{infinity}) = limit((n^\wedge 2-1)/(n^\wedge 2+1), n=\text{infinity});$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \tag{1.1}$$

> \# ***Найти пределы последовательностей (3 примера)***

>

>

>

2

> \#*Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия* :
> \# *1. Определите функцию через функциональный оператор*
> \# *2. Постройте график функции (каждый промежуток своим цветом)*
> \# *3. В точке разрыва найдите односторонние пределы. Найдите модуль разности этих пределов*
> \# *4. Найдите пределы на бесконечности.*
> \# *5. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.*
> \# *6. Постройте в одних координатных осях графики функции и производной*
> \# *7. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции* и *прямыми* $y=0$, $x=0$, $x=\text{Pi}$. *Постройте эту криволинейную трапецию.*

> *restart* :

> $y := x \to piecewise\left(x < -\frac{\text{Pi}}{2}, 15\cdot\sin(2.9\cdot x), x \geq -\frac{\text{Pi}}{2}, 5.9\cdot\exp(-0.5\cdot x)\right);$

$$y := x \mapsto \begin{cases} 15\cdot\sin(2.9\cdot x) & x < -\frac{\pi}{2} \\ 5.9\cdot e^{(-1)\cdot 0.5\cdot x} & -\frac{\pi}{2} \leq x \end{cases} \tag{2.1}$$

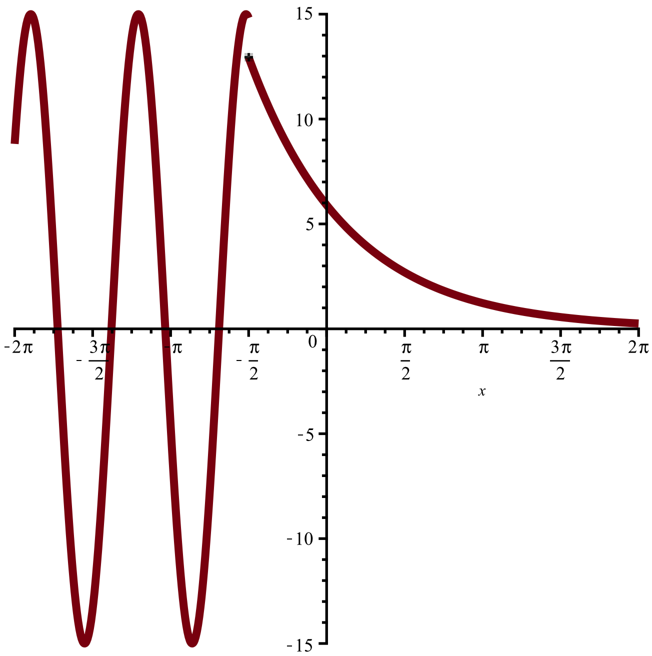
> $y1 := op(2, y(x));$

$$y1 := 15\sin(2.9\,x) \tag{2.2}$$

> $y2 := op(4, y(x));$

$$y2 := 5.9\,e^{-0.5\,x} \tag{2.3}$$

> $plot(y(x), discont=true, thickness=3);$



> $limy\_left := limit\left(y(x), x = -\frac{\mathrm{Pi}}{2}, left\right);$

$$limy\_left := 14.81532511 \tag{2.4}$$

> $limy\_right := limit\left(y(x), x = -\frac{\mathrm{Pi}}{2}, right\right);$

$$limy\_right := 12.94035230 \tag{2.5}$$

> $r := \mathrm{abs}(limy\_right - limy\_left);$

$$r := 1.87497281 \tag{2.6}$$

> $limy\_inf := limit(y(x), x = \mathrm{infinity});$

$$limy\_inf := 0. \tag{2.7}$$

> $limy\_inf\_ := limit(y(x), x = -\mathrm{infinity});$

$$limy\_inf\_ := -15. ..15. \tag{2.8}$$

> $dy := diff(y(x), x);$

$$dy := \begin{cases} 43.50000000 \cos(2.900000000\, x) & x < -1.570796327 \\ \mathrm{Float(undefined)} & x = -1.570796327 \\ -2.950000000\, \mathrm{e}^{-0.5000000000\, x} & -1.570796327 < x \end{cases} \tag{2.9}$$

> $dy1 := op(2, dy);$

$$dy1 := 43.50000000 \cos(2.900000000\, x) \tag{2.10}$$

> $dy2 := op(6, dy);$

$$dy2 := -2.950000000\, \mathrm{e}^{-0.5000000000\, x} \tag{2.11}$$

> $iy := int(y(x), x);$

$$iy := \begin{cases} -5.172413793 \cos(2.900000000\, x) & x < -1.570796327 \\ -11.80000000\, \mathrm{e}^{-0.5000000000\, x} + 26.68984838 & -1.570796327 \le x \end{cases} \tag{2.12}$$

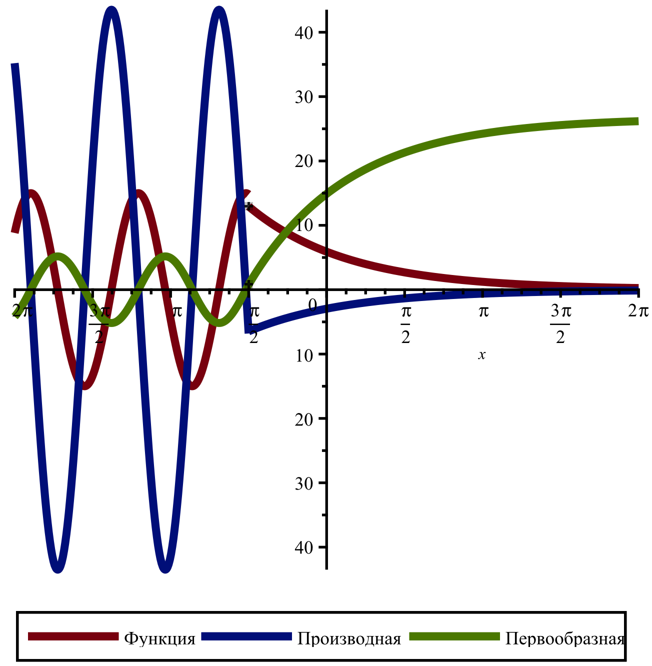
> $iy1 := op(2, iy);$

$$iy1 := -5.172413793\cos(2.900000000\,x) \tag{2.13}$$

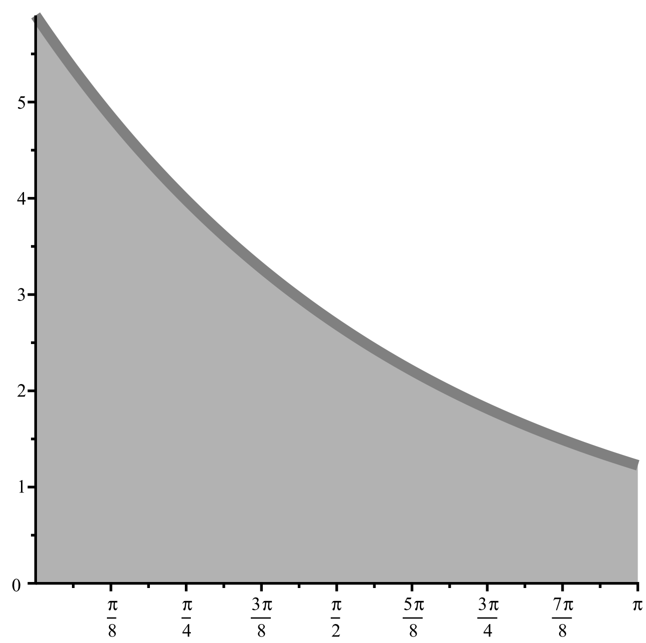
> $iy2 := op(4, iy);$

$$iy2 := -11.80000000\,\mathrm{e}^{-0.5000000000\,x} + 26.68984838 \tag{2.14}$$

> $plot([y(x), dy, iy], discont = true, thickness = 3, legend = [$"Функция", "Производная", "Первообразная"$]);$

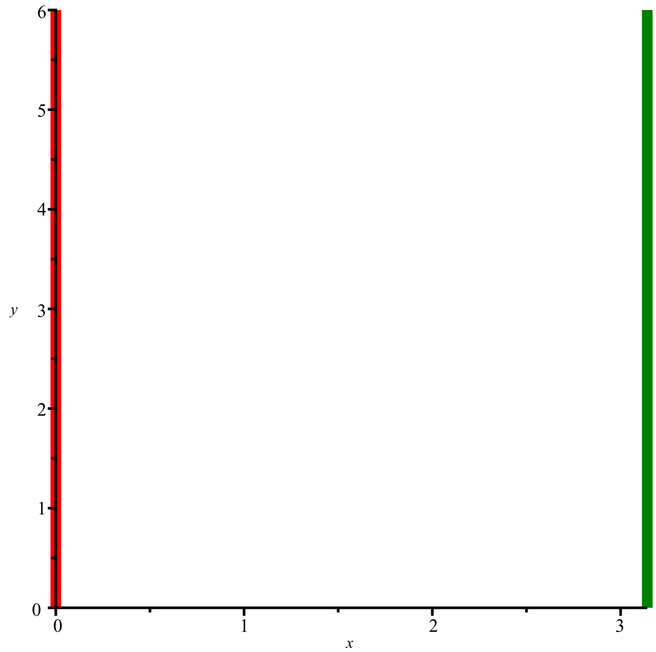


> $p1 := plot(y2, x = 0\,..\mathrm{Pi}, filled = true, thickness = 4, color = $"Gray"$);$

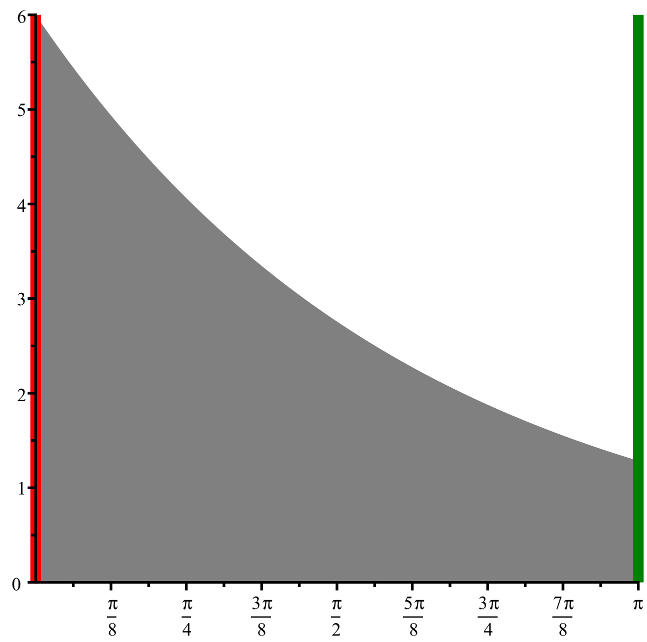


> $with(plots):$

> $p2 := implicitplot([x = 0, x = \mathrm{Pi}], x = 0\,..\mathrm{Pi}, y = 0\,..6, color = [$"Red", "Green"$], thickness = 4);$



> *display*(*p1*, *p2*);



> $S := int(y2, x = 0 ..\mathrm{Pi});$

$$S := 9.347020999 \qquad \textbf{(2.15)}$$

> ***# Выполнить задания для своей функции.***

> # \` *\`Текст* и *номер задания описать* в *комментариях* в *отдельных строках*

>

3

> *#Определите минимальный порядок частичной суммы Sn ряда, приближающей сумму S ряда* с *точностью, не превышающей* 0.1.

> $restart:$

> $P := \dfrac{6}{9 \cdot n^2 + 12 \cdot n - 5};$

$$P := \frac{6}{9\,n^2 + 12\,n - 5} \quad (3.1)$$

> $S := evalf(sum(P, n = 1..\text{infinity}));$

$$S := 0.7000000000 \quad (3.2)$$

> $Sn := evalf(sum(P, n = 1..2));$

$$Sn := 0.4840909091 \quad (3.3)$$

> $B := is(\text{abs}(S - Sn) < 0.1);$

$$B := false \quad (3.4)$$

> $k := 2;$

$$k := 2 \quad (3.5)$$

> **while not** B **do**
$k := k + 1;$
$Sn := evalf(sum(P, n = 1..k));$
$B := is(\text{abs}(S - Sn) < 0.1);$
end do:

> $print(k);$

$$6 \quad (3.6)$$

> ***# Выполнить задание для своего условия.***

>

>

4

> *#Найдите минимальный порядок частичной суммы Sn ряда, приближающей его сумму S* с *заданной точностью eps* = 0.001
• *Проиллюстрируйте признак сходимости знакочередующегося ряда (Признак Лейбница : Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю, то ряд сходится.) графически*

> $restart:$

> $eps := 1.e{-}3;$

$$eps := 0.001 \quad (4.1)$$

> $P := \dfrac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot n^2};$

$$P := \frac{(-1)^{n+1}}{3\,n^2} \quad (4.2)$$

> $S := evalf(sum(P, n = 1..\text{infinity}));$

$$S := 0.2741556779 \quad (4.3)$$

> $Sn := evalf(sum(P, n = 1..2));$

(4.4)

$$Sn := 0.2500000000 \tag{4.4}$$

> $B := is(\operatorname{abs}(S - Sn) < eps);$

$$B := false \tag{4.5}$$

> $k := 2;$

$$k := 2 \tag{4.6}$$

```
> while not B do
    k := k + 1;
   Sn := evalf(sum(P, n = 1 ..k));
   B := is(abs(S − Sn) < eps);
  end do:
```

> $print(k);$

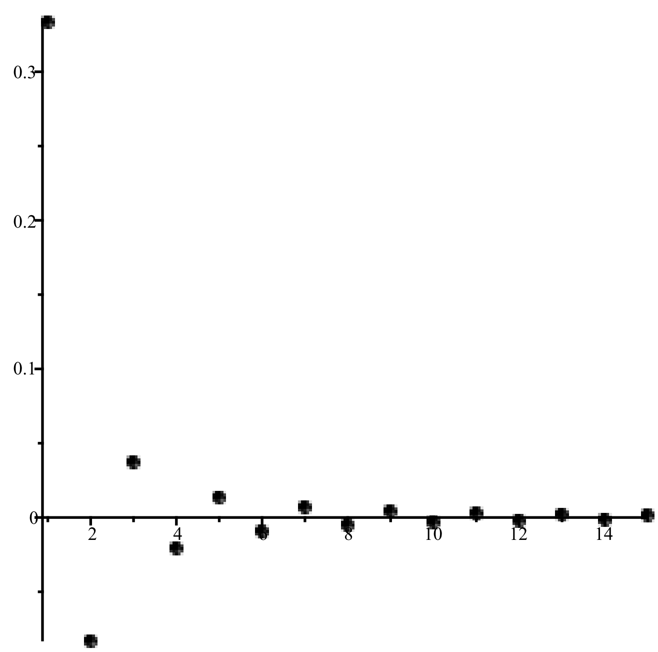
$$13 \tag{4.7}$$

> $SeqP := \left[i, \frac{(-1)^{i+1}}{3 \cdot i^2}\right] \$ i = 1 ..15;$

$$SeqP := \left[1, \frac{1}{3}\right], \left[2, -\frac{1}{12}\right], \left[3, \frac{1}{27}\right], \left[4, -\frac{1}{48}\right], \left[5, \frac{1}{75}\right], \left[6, -\frac{1}{108}\right], \left[7, \frac{1}{147}\right], \left[8, -\frac{1}{192}\right], \left[9, \frac{1}{243}\right], \left[10, -\frac{1}{300}\right], \left[11, \frac{1}{363}\right], \left[12, -\frac{1}{432}\right], \left[13, \frac{1}{507}\right], \left[14, -\frac{1}{588}\right], \left[15, \frac{1}{675}\right] \tag{4.8}$$

> $with(plots):$

> $pointplot([SeqP], symbol = solidcircle, symbolsize = 15);$



> **# *Выполнить задание для своего условия*.**

>

>

>

5

> # *Докажите справедливость равенства, убедившись в сходимости соответствующего числового ряда*

> *restart* :

> $Limit\left(\frac{n!}{n^n}, n = \text{infinity}\right) = limit\left(\frac{n!}{n^n}, n = \text{infinity}\right);$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \tag{5.1}$$

> # ***3 своих примера***

>

>

>

6

> # *Вычислите интеграл с точностью 0.001*
> # *Отобразите результат графически*

> *restart* :

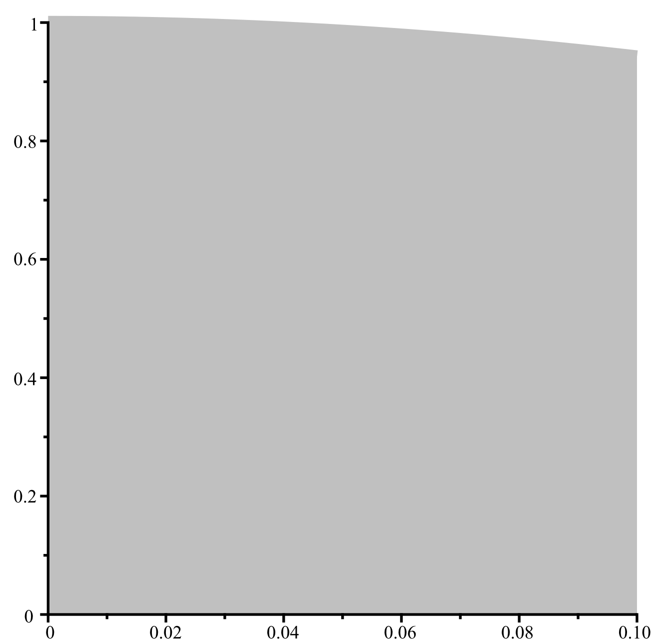
> $f := \exp(-6 \cdot x^2);$

$$f := \mathrm{e}^{-6 x^2} \tag{6.1}$$

> $intf := evalf[3](int(f, x = 0 ..0.1));$

$$intf := 0.0980 \tag{6.2}$$

> $plot(f, x = 0 ..0.1, filled = true, color = gray, thickness = 5);$



> # ***Выполнить задание для своего условия***.

>

>

7

> #Найдите 10-ю производную функции
> #Вычислите эту производную в точке x=4

> $f := x \rightarrow x^3 \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x);$

$$f := x \mapsto x^3 \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x) \quad \textbf{(7.1)}$$

> $df := diff(f(x), x\$10);$

$$df := 250 \cos(x)\, x + 630 \sin(x) - 29\, x^2 \sin(x) - x^3 \cos(x) \quad \textbf{(7.2)}$$

> $df\_ := unapply(df, x);$

$$df\_ := x \mapsto 250 \cdot \cos(x) \cdot x + 630 \cdot \sin(x) - 29 \cdot x^2 \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \cos(x) \quad \textbf{(7.3)}$$

> $evalf(df\_(4));$

$$-737.4396434 \quad \textbf{(7.4)}$$

> # ***Выполнить задание для своего условия***.

>

8

> # *Разложить функцию в ряд Тейлора в точке x=0 до 10 порядка. Определить на графике - на каком интервале функция и ее разложение совпадают.*

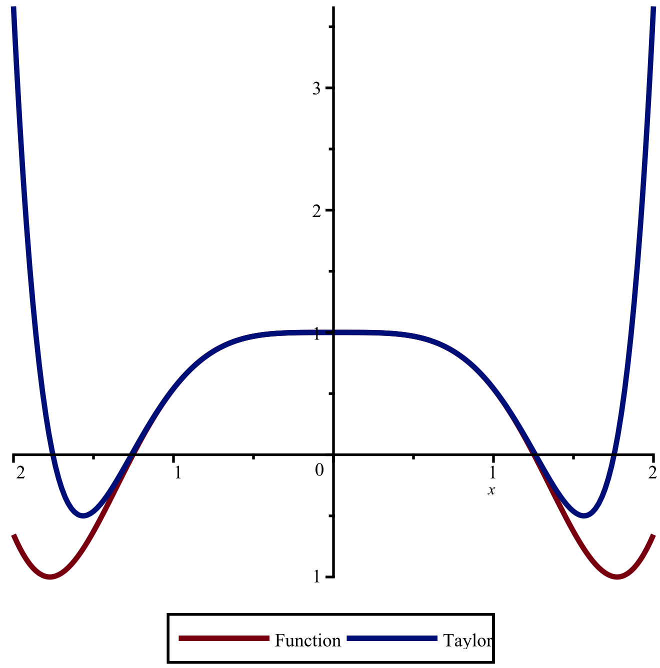
> $f := \cos(x^2);$

$$f := \cos(x^2) \quad \textbf{(8.1)}$$

> $tf := convert(\ taylor(f, x = 0, 10), polynom);$

$$tf := 1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{24} x^8 \quad \textbf{(8.2)}$$

> $plot([f, tf], x = -2..2, legend = [\text{"Function"}, \text{"Taylor"}], thickness = 2);$



> **# *Выполнить задание для своего условия*.**

>

9

> *#Разложить функцию двух переменных в ряд Тейлора до 10 порядка. Определить на plot3d − на каком интервале функция и ее разложение совпадают.*

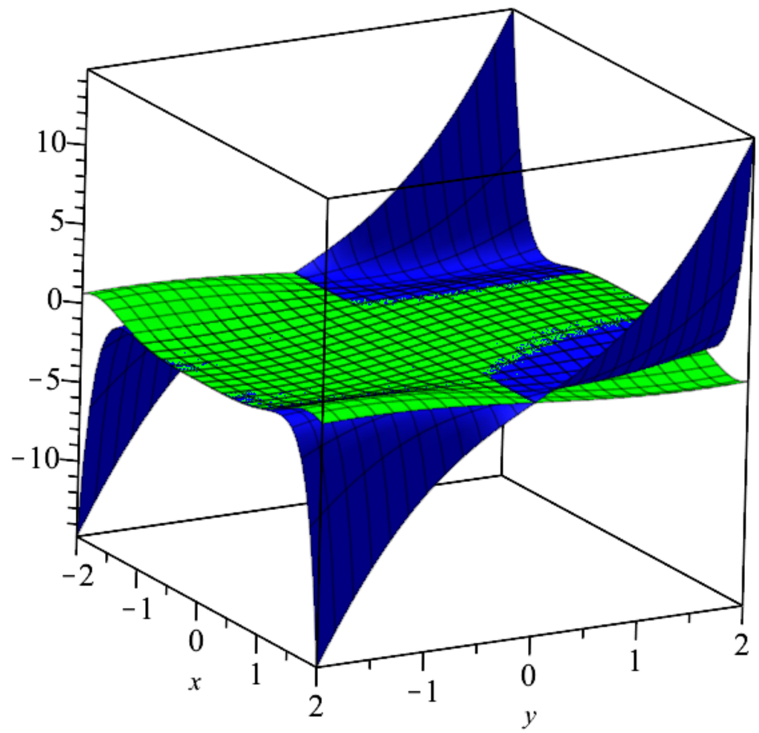
> $f := \sin(y)\cdot\cos(x^2);$

$$f := \sin(y)\cos(x^2) \tag{9.1}$$

> $tf := mtaylor(f, [x, y], 10);$

$$tf := y \quad \frac{1}{6}y^3 \quad \frac{1}{2}yx^4 + \frac{1}{120}y^5 + \frac{1}{12}y^3x^4 \quad \frac{1}{5040}y^7 + \frac{1}{24}yx^8 \quad \frac{1}{240}y^5x^4 + \frac{1}{362880}y^9 \tag{9.2}$$

> $with(plots) : plot3d([f, tf], x = \ 2..2, y = \ 2..2, color = [$"green", "blue"$]);$



> # ***Выполнить задание для своего условия***.

>

10

> *# Дан набор точек, через которые должен проходить график функции. Построить эту функцию с помощью задания интерполяционного полинома. Отобразить чертеж на графике*

> *restart* : *with*(*plots*) :

> $A := [2, 5, 6, 9, 15], [9, 8, 3, 13, 27];$

$$A := [2, 5, 6, 9, 15], [9, 8, 3, 13, 27] \quad \textbf{(10.1)}$$

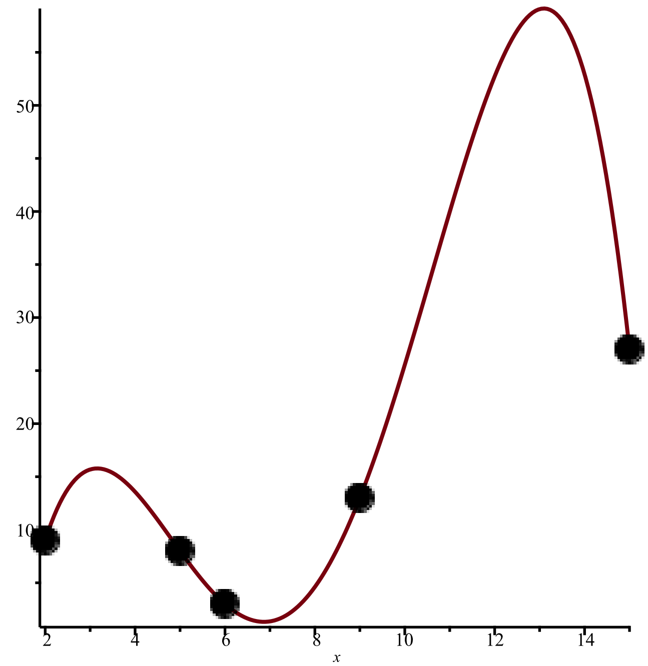
> $i1 := interp(A, x);$

$$i1 := -\frac{1723}{32760} x^4 + \frac{1897}{1170} x^3 - \frac{40549}{2520} x^2 + \frac{7767}{130} x - \frac{10603}{182} \quad \textbf{(10.2)}$$

> $ip1 := plot(i1, x = 2..15) :$

> *ip2* := *pointplot*([*A*], *symbol* = "solidcircle", *symbolsize* = 30) :

> *display*(*ip1*, *ip2*);



> *# Выполнить задание для своего условия.*

>

>

11

> *# Дан набор точек, через которые должен проходить график функции. Построить эту функцию с помощью задания интерполяционного полинома интерполяции сплайнами. Отобразить чертеж на графике*

> $with(CurveFitting) : with(plots) :$

> $A := [[0, 0], [1, 1], [2, 4], [3, 3], [7, 6], [8, 12]] : nops(A); op(nops(A), A)[1];$

$$6$$

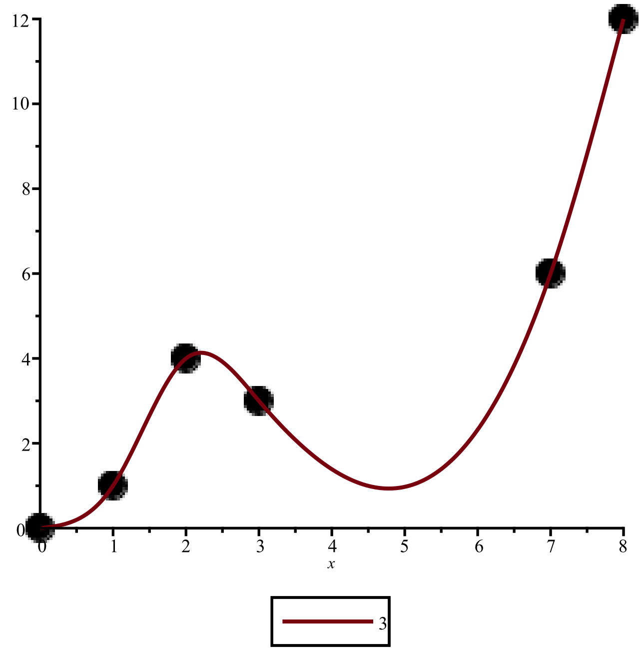
$$8 \tag{11.1}$$

> $y1 := Spline(A, x);$

$$y1 := \begin{cases} \frac{1969}{2440} x^3 + \frac{471}{2440} x & x < 1 \\ -\frac{993}{488} x^3 + \frac{10401}{1220} x^2 - \frac{20331}{2440} x + \frac{3467}{1220} & x < 2 \\ \frac{3251}{2440} x^3 - \frac{14247}{1220} x^2 + \frac{78261}{2440} x - \frac{29397}{1220} & x < 3 \\ \frac{231}{2440} x^3 - \frac{657}{1220} x^2 - \frac{3279}{2440} x + \frac{11373}{1220} & x < 7 \\ -\frac{1179}{2440} x^3 + \frac{3537}{305} x^2 - \frac{210549}{2440} x + \frac{63297}{305} & otherwise \end{cases} \tag{11.2}$$

> $p0 := pointplot(A, symbol = \text{"solidcircle"}, symbolsize = 30) :$

> $p3 := plot(y3, x = 0 .. op(nops(A), A)[1], legend = "3")$:
$display(p0, p3)$;

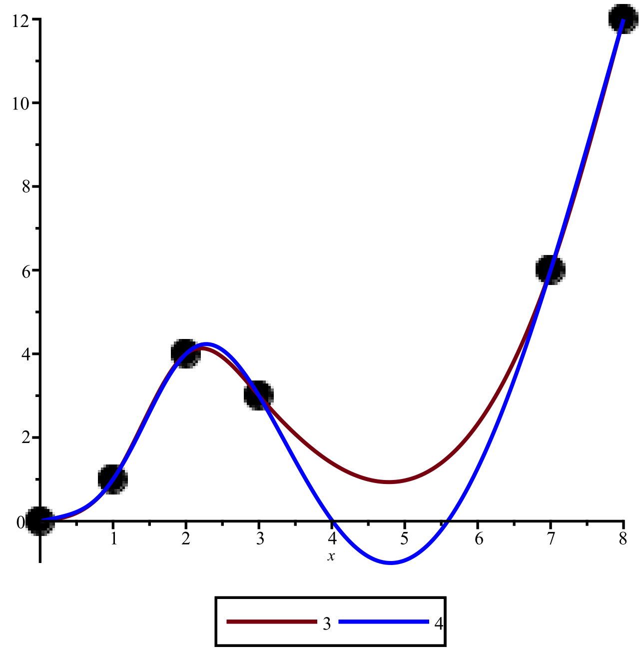


> $y4 := Spline(A, x, degree = 4)$;

$$y4 := \begin{cases} \frac{1604426074}{2099931145}x^4 + \frac{583937271}{1679944916}x \\ \frac{429247642}{419986229}x^4 + \frac{7501328568}{2099931145}x^3 \quad \frac{5625996426}{2099931145}x^2 + \frac{10421014923}{8399724580}x \quad \frac{937666071}{8399724580} \\ \frac{392519258}{419986229}x^4 \quad \frac{17151678432}{2099931145}x^3 + \frac{49843269324}{2099931145}x^2 \quad \frac{211456048077}{8399724580}x + \frac{41133116277}{4199862290} \\ \frac{20273378}{161533165}x^4 + \frac{5109823608}{2099931145}x^3 \quad \frac{33637363326}{2099931145}x^2 + \frac{345081502923}{8399724580}x \quad \frac{265569736821}{8399724580} \\ \frac{9540234}{419986229}x^4 + \frac{792768728}{2099931145}x^3 \quad \frac{96880902}{161533165}x^2 \quad \frac{86623985077}{8399724580}x + \frac{21081701783}{646132660} \\ \frac{319133186}{2099931145}x^4 \quad \frac{10212261952}{2099931145}x^3 + \frac{122547143424}{2099931145}x^2 \quad \frac{2562755888077}{8399724580}x + \frac{122920236032}{2099931145} \end{cases}$$

> $p4 := plot(y4, x = 0..op(nops(A), A)[1], color = "blue", legend = "4")$:

> $display(p0, p3, p4)$;



> # ***Выполнить задание для своего условия***.

>

>

12

> # *Получить формулы для приближенного вычисления значений функции*

> *restart* :

> $f := \sin\left(\text{alpha} + \frac{\text{Pi}}{6}\right)$ # *когда alpha близко к нулю.*

>

>

13

> # *Вычислите первую производную для функции в точке x=5*

> *restart* :

> $f := \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

$$f := \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} \tag{13.1}$$

14

> # Проверьте, что

> # $cos(x) < \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3$

> # при

$0 < |x| < \frac{\mathrm{Pi}}{2}$

>

15

> # Найдите первообразные для функций и постройте графики функций и их первообразных в одних координатных осях

> restart :

> # $\frac{exp(x)}{x}$

> # $\frac{sin(x)}{x}$

> # $\frac{cos(x)}{x}$

16

> # Найдите (вычислите) интегралы от функции

> # $\frac{\sin(x)}{x^{\mathrm{alpha}}}$

> для $\mathrm{alpha} = 2, 4, 6$

> # с пределами интегрирования от 1 до $+infinity$

> restart :

>

17

> # Постройте график зависимости значения интеграла от alpha от 1.1 до 10 для функции

> # $\frac{\sin(x)}{x^{\mathrm{alpha}}}$

>

18

> # Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами

> # $y^2 = 4 \cdot x$

> # $x^2 = 4 \cdot y$

> # *Выполнить чертеж*

19

> # *Вычислить объем тела вращения, образованного вращеним параболы*

> # $y=2 \cdot x - x^2$

> # *вокруг оси OX*

> # *Выполнить чертеж*

>

20

> # *Определить стационарные точки функции*

> # *Построить график*

> *restart* :

> $f := \cos(2 \cdot x + x^2)$:

>