14. Решите неравенство $25^x + 5^{x+1} + 5^{1-x} + \frac{1}{25^x} \leqslant 12.$

$$25^x + 5^x \cdot 5 + 5 \cdot 5^{-x} + \frac{1}{25^x} \le 12$$

$$\underline{25^x + \frac{1}{25^x}} + 5\left(5^x + \frac{1}{5^x}\right) \le 12$$

Замена: $t = 5^x + \frac{1}{5^x} > 0$

$$t^2 = \left(5^x + \frac{1}{5^x}\right)^2 = 25^x + 2 \cdot 5^x \cdot \frac{1}{5^x} + \frac{1}{25^x}$$

$$t^2 = 25^x + 2 + \frac{1}{25^x} \Rightarrow 25^x + \frac{1}{25^x} = t^2 - 2$$

$t^2 - 2 + 5t - 12 \le 0$

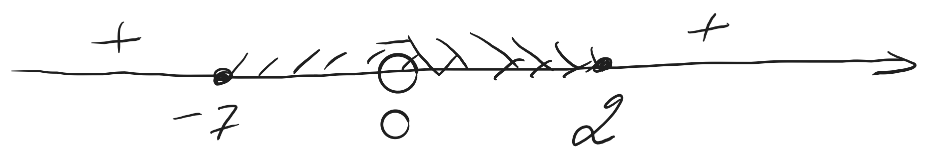
$t^2 + 5t - 14 \le 0$

$t^2 + 5t - 14 = 0$

$t_1 + t_2 = -5$

$t_1 \cdot t_2 = -14$

$t_1 = -7, \quad t_2 = 2$



$0 < t \le 2$

$5^x + \frac{1}{5^x} \le 2$; замена: $u = 5^x > 0$

$$u + \frac{1}{u} \le 2 \Rightarrow \frac{u^2 - 2u + 1}{u} \le 0 \Rightarrow \frac{(u-1)^2}{u} \le 0$$

т.к. $u > 0$, то для того, чтобы дробь было неположительной необход., чтобы было $(u-1)^2 \le 0$

Но т.к. квадрат любого значения не может быть отрицательным, то $(u-1)^2 = 0 \Rightarrow u = 1$

$5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Ответ: $\{0\}$

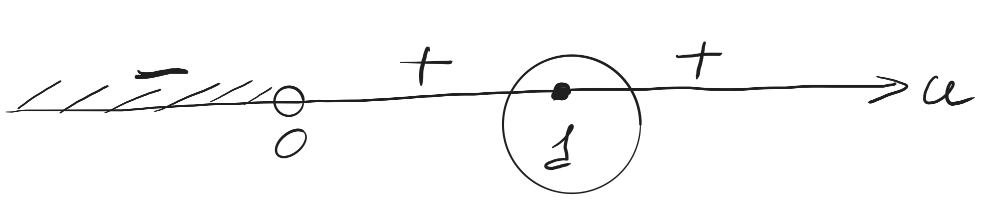
$\frac{(u-1)^2}{u} \le 0$ $\qquad u$ – показатель $\qquad 5^x = u > 0$

I способ (м. интервалов)

$(u-1)^2 = 0$

$u = 1$ (кратный)

$u \ne 0$



$\frac{(10-1)^2}{10} = \frac{9^2}{10} > 0$

$u \in \cancel{(-\infty; 0)} \cup \{1\}$

$u^2 - 2u + 1 = 0$

$D = 0$

1 корень кратности 2

$u_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2}$

$u_1 = 1, \; u_2 = 1$

II способ

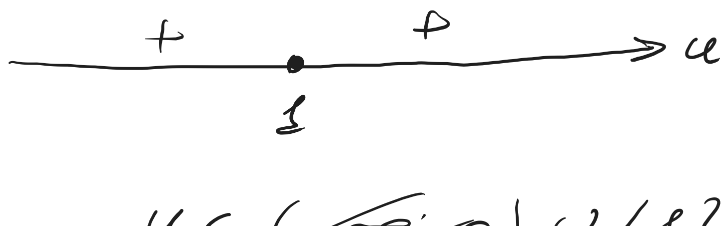
$\frac{(u-1)^2}{u} \le 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (u-1)^2 \le 0 \\ u > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (u-1)^2 \ge 0 \\ u < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(u-1)^2 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = 1$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ u > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\infty < u < +\infty \\ u < 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u < 0 \end{array}\right.$$

$u \in \cancel{(-\infty; 0)} \cup \{1\}$

т.к. $u = 5^x > 0$