1. Позиционные системы счисления. Перевод чисел из одной системы счисления в другую.

Теоретические сведения

Система счисления – способ наименования и изображения чисел с помощью символов, имеющих определенные количественные значения. Различают непозиционные и позиционные системы счисления. В непозиционной системе счисления цифры не меняют своего количественного значения при изменении их расположения в числе (например, римская система счисления). Тем самым исключается всякая возможность автоматизации распознавания чисел и, как следствие, обработки информации. Этого недостатка лишена позиционная система счисления, в которой значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в числе.

Позиционные системы счисления характеризуются:

- основанием P системы счисления – количеством (P) различных символов, используемых для изображения чисел. Значения этих символов лежат в пределах от 0 до P-1;
- разрядом – позицией, занимаемой отдельным символом в изображении числа. Разряды нумеруются справа налево, начиная с 0;
- весом разряда – количественным значением одной единицы разряда.

Любое число C в позиционной системе счисления с основанием P может быть представлено в виде полинома:

$$C=\underbrace{C_m P^m + C_{m-1} P^{m-1} + \ldots + C_1 P^1 + C_0 P^0}_{\text{целая часть числа}} + \underbrace{C_{-1} P^{-1} + C_{-2} P^{-2} + \ldots + C_{-s} P^{-s}}_{\text{дробная часть числа}},$$

или где в качестве C_i могут стоять любые из P цифр алфавита, а нижние индексы определяют местоположение цифры в числе (разряд)

Численно вес разряда определяется через основание P системы счисления и номер i разряда: P^i. Таким образом, максимальное целое число, которое может быть представлено в m разрядах $N_{max} = P^m - 1$.

Минимальное значащее (не равное 0) число, которое можно записать в s разрядах дробной части $N_{min} = P^{-s}$. Тогда, имея в целой части числа m, а в дробной s разрядов, можно представить P^{m+s} чисел от 0 до P^{m+s}-1.

Поскольку в технике известно много физических приборов и сред с двумя устойчивыми состояниями, в качестве алфавита языка ЭВМ приняты символы 0 и 1, названные двоичными цифрами. Последовательности нулей и единиц конечной длины образуют двоичные числа, которые, в свою очередь, образуют позиционную двоичную систему счисления.

В вычислительной технике применяют позиционные системы счисления с недесятичным основанием: двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную и др. Для обозначения используемой системы счисления числа заключают в скобки и индексом указывают основание системы счисления: $15_{(10)}$, $1011_{(2)}$,$735_{(8)}$, $1EA9F_{(16)}$. Иногда скобки опускают и оставляют только индекс: 15_{10}, 1011_2 ,735_8 , $1EA9F_{16.}$ Есть еще один способ обозначения системы счисления: при помощи латинских букв добавляемых после числа. Например, 15 D; 1011 B; 735 Q; 1EA9F H.

Двоичная система счисления. Основание P=2. Алфавит включает две двоичные цифры: 0, 1. Веса разрядов в двоичной системе счисления равны 1, 4, 8, 16,... влево от запятой и 0,5; 0,25; 0,125; 0,625;... вправо от запятой.

Двоичная система счисления имеет ряд преимуществ перед другими системами:

- для ее реализации нужны **технические устройства с двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
- представление информации посредством только двух состояний **надежно** и **помехоустойчиво**;
- возможно **применение аппарата булевой алгебры** для выполнения логических преобразований информации;
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Недостаток двоичной системы — **быстрый рост числа разрядов**, необходимых для записи чисел.

Таблица 1

Двоичная (Основание 2)	Восьмеричная (Основание 8)		Десятичная (Основание 10)	Шестнадцатиричная (Основание 16)	
		триады			тетрады
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
	2	010	2	2	0010
	3	011	3	3	0011
	4	100	4	4	0100
	5	101	5	5	0101
	6	110	6	6	0110
	7	111	7	7	0111
			8	8	1000
			9	9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101
				E	1110
				F	1111

Восьмеричная и *шестнадцатеричная* системы счисления используются при составлении программ на языке машинных кодов для более короткой и удобной записи двоичных кодов — команд, данных, адресов и операндов. Алфавит восьмеричной системы счисления включает цифры от 0 до 7. Алфавит шестнадцатеричной системы счисления включает цифры от 0 до 9, для изображения цифр, больших 9, применяются латинские буквы A, B, C, D, E, F.

Двоично-десятичная система счисления получила большое распространение в современных ЭВМ ввиду легкости перевода в десятичную систему и обратно. Она используется там, где основное внимание уделяется не простоте технического построения машины, а удобству работы пользователя. В этой системе счисления все десятичные цифры отдельно кодируются четырьмя двоичными цифрами.

Примеры.

1) Десятичное число 9703 в двоично-десятичной системе выглядит так: $1001\ 0111\ 0000\ 0011_2$.
2) Десятичное число 6251 в двоично-десятичной системе выглядит так: $0110\ 0010\ 0101\ 0001_2$.

Рассмотрим общие правила перевода чисел из одной системы счисления в другую. Эти правила зависят от того, в какой системе счисления осуществляются арифметические операции, связанные с преобразованием чисел, - в той, в какой представлено исходное число, или в той, в которую оно переводится.

Правило 1. Перевод чисел в десятичную систему счисления.

Любое число в позиционной системе счисления можно представить в виде суммы степеней:
$C= C_m P^m + C_{m-1} P^{m-1} + \ldots + C_1 P^1 + C_0 P^0 + C_{-1} P^{-1} + \ldots + C_{-s} P^{-s}$, где P - основание, C – коэффициенты, i - номера разрядов выражены в новой системе. Первая позиция слева от разделителя целой и дробной части имеет номер 0, слева от неё находится первая позиция, ещё левее – вторая и т.д. Первая позиция справа от разделителя имеет номер -1, следующая за ней – номер -2 и т.д. Все действия надо выполнять в новой системе.

<u>Примеры.</u>

3 2 1 0 -1-2
$1101{,}01_2 = 1\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 + 0\cdot2^{-1} + 1\cdot2^{-2} = 8 + 4 + 1 + 0{,}25 = 13{,}25_{10}$

1 0 -1 -2
$52{,}25_8 = 5\cdot8^1 + 2\cdot8^0 + 2\cdot8^{-1} + 5\cdot8^{-2} = 40 + 2 + 0{,}25 + 0{,}078 = 42{,}328_{10}$

2 1 0 -1
$1A9{,}4_{16} = 1\cdot16^2 + 10\cdot16^1 + 9\cdot16^0 + 4\cdot16^{-1} = 256 + 160 + 9 + 0{,}25 = 425{,}25_{10}$

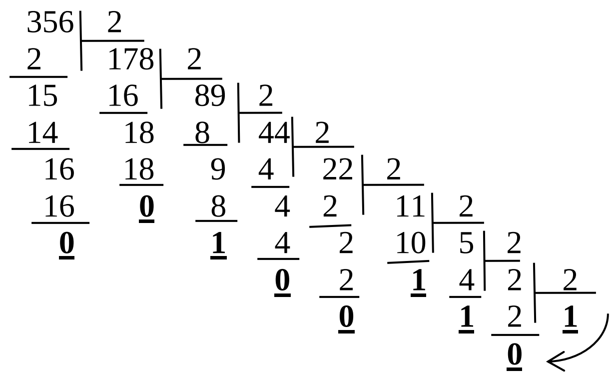
Правило 2. Перевод десятичных чисел в другую систему счисления.

Для перевода целого десятичного числа применяется следующее правило:

1. Разделить число на основание той системы счисления, в которую осуществляется перевод: выделить целую часть частного и остаток от деления. Остаток будет младшим разрядом искомого числа;
2. Целую часть частного снова разделить на основание системы счисления. Остаток от деления будет следующим разрядом числа;
3. Продолжать процесс до тех пор, пока целая часть частного не станет равной нулю.

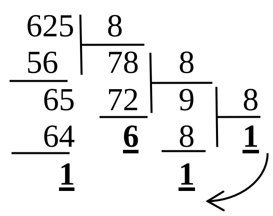
<u>Примеры.</u>

1) Перевести десятичное число 356 в двоичную систему счисления.
   $356_{10}=101100100_2$



2) Перевести десятичное число 625 в восьмеричную систему счисления.

   $625_{10}=1161_8$



3) Перевести десятичное число 182 в шестнадцатеричную систему счисления.

182_{10}=$B6_{16}$

182 | 16
16 | **11** = **B**
22
16
6

Правило 3. Перевод дробной части десятичных чисел в другую систему счисления.

Чтобы перевести дробную часть десятичных чисел в другую систему счисления, нужно выполнить следующие действия:

1. Умножить исходную дробь на основание системы счисления, в которую осуществляется перевод. Целая часть произведения будет старшим разрядом дробной части числа (позиция номер -1);
2. Дробную часть произведения снова умножить на основание системы счисления. Целая часть этого произведения будет следующим разрядом дроби (позиция номер -2);
3. Продолжать процесс до тех пор, пока дробная часть очередного произведения не станет равной нулю, или пока не будет достигнута нужная точность числа.

Примеры.

1) Перевести десятичное число 0,25 в двоичную систему счисления
$0{,}25_{10}$=$0{,}01_2$
0,25 · 2 = **0**,5; 0 – старший разряд двоичной дроби;
0,5· 2 = **1**,0 1 – следующий разряд.

2) Перевести десятичное число 0,53 в двоичную систему счисления с точностью до шестого знака после запятой.
$0{,}53_{10}$ = $0{,}100001_2$
0,53 · 2 = **1**,06;
0,06 · 2 = **0**,12
0,12 · 2 = **0**,24
0,24 · 2 = **0**,48
0,48 · 2 = **0**,96
0,96 · 2 = **1**,92

3) Перевести десятичное число 0,13 в восьмеричную систему счисления с точностью до шестого знака после запятой.
$0{,}13_{10}$ =$0{,}102436_8$
0,13 · 8 = **1**,04
0,04 · 8 = **0**,32
0,32 · 8 = **2**,56
0,56 · 8 = **4**,48
0,48 · 8 = **3**,84
0,84 · 8 = **6**,72

4. Перевести десятичное число 0,96 в восьмеричную систему счисления с точностью до пятого знака после запятой.
$0{,}96_{10}$ = $0{,}75341_8$
0,96 · 8 = **7**,68
0,68 · 8 = **5**,44
0,44 · 8 = **3**,52

$0{,}52 \cdot 8 = \underline{\mathbf{4}}{,}16$
$0{,}16 \cdot 8 = \underline{\mathbf{1}}{,}28$

5. Перевести десятичное число 0,891 в шестнадцатеричную систему счисления с точностью до пятого знака после запятой.
$0{,}891_{10} = 0{,}E4189_{16}$
$0{,}891 \cdot 16 = \underline{\mathbf{14}}{,}256$
$0{,}256 \cdot 16 = \underline{\mathbf{4}}{,}096$
$0{,}096 \cdot 16 = \underline{\mathbf{1}}{,}536$
$0{,}536 \cdot 16 = \underline{\mathbf{8}}{,}576$
$0{,}576 \cdot 16 = \underline{\mathbf{9}}{,}216$

6. Перевести десятичное число 0,398 в шестнадцатеричную систему счисления с точностью до четвёртого знака после запятой.
$0{,}398_{10} = 0{,}65E3$
$0{,}398 \cdot 16 = \underline{\mathbf{6}}{,}368$
$0{,}368 \cdot 16 = \underline{\mathbf{5}}{,}888$
$0{,}888 \cdot 16 = \underline{\mathbf{14}}{,}208$
$0{,}208 \cdot 16 = \underline{\mathbf{3}}{,}328$

7. Перевести десятичное число 13,25 в двоичную систему счисления.
$13{,}25_{10} = 1101{,}01_2$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
13 & 2 & & \\
12 & 6 & 2 & \\
\underline{\mathbf{1}} & 6 & 3 & 2 \\
 & \underline{\mathbf{0}} & 2 & \underline{\mathbf{1}} \\
 & & \underline{\mathbf{1}} &
\end{array}$$

$0{,}25 \cdot 2 = \underline{\mathbf{0}}{,}5;$
$0{,}5 \cdot 2 = \underline{\mathbf{1}}{,}0$

8. Перевести десятичное число 42,33 в восьмеричную систему счисления с точностью до двух знаков после запятой.
$42{,}33_{10} = 52{,}25_8$

$$\begin{array}{r|l}
42 & 8 \\
40 & \underline{\mathbf{5}} \\
\underline{\mathbf{2}} &
\end{array}$$

$0{,}33 \cdot 8 = \underline{\mathbf{2}}{,}64$
$0{,}64 \cdot 8 = \underline{\mathbf{5}}{,}12$

9. Перевести десятичное число 425,77 в шестнадцатеричную систему счисления с точностью до трёх знаков после запятой.
$425{,}77_{10} = 1A9{,}C51_{16}$

$$\begin{array}{r|r|l}
425 & 16 & \\
32 & 26 & 16 \\
105 & 16 & \mathbf{1} \\
96 & \underline{\mathbf{10}} & \\
\underline{\mathbf{9}} & &
\end{array}$$

$0{,}77 \cdot 16 = \underline{\mathbf{12}}{,}32$
$0{,}32 \cdot 16 = \underline{\mathbf{5}}{,}12$
$0{,}12 \cdot 16 = \underline{\mathbf{1}}{,}92$

Правило 4. Перевод чисел из восьмеричной в двоичную систему счисления.

Для перевода числа из восьмеричной в двоичную систему счисления достаточно перевести каждый символ отдельно, а затем записать символы последовательно друг за другом, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному восьмеричному символу, должно состоять из трёх разрядов – триад (т.к. $8 = 2^3$). Пустые позиции в начале числа заполняются нулями.

Примеры.

1) Перевести восьмеричное число $615{,}27_8$ в двоичную систему счисления:

   $6_8 = 110_2$
   $1_8 = 001_2$
   $5_8 = 101_2$
   $2_8 = 010_2$
   $7_8 = 111_2$
   $615{,}27_8 = 110001101{,}010111_2$

2) Перевести восьмеричное число $173{,}54_8$ в двоичную систему счисления

   $1_8 = 001_2$
   $7_8 = 111_2$
   $3_8 = 011_2$
   $5_8 = 101_2$
   $4_8 = 100_2$
   $173{,}54_8 = 001111011{,}101100_2$

Правило 5. Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную.
Обратный перевод осуществляется следующим образом:

1. Двоичное число разбивается на триады. Разбивка выполняется вправо и влево от разделителя целой и дробной части. Неполные крайние триады дописываются нулями.
2. Выполняется перевод отдельно для каждой триады, получившиеся символы записываются последовательно друг за другом.

   Примеры.

   1) Перевести двоичное число $10111001{,}01101_2$ в восьмеричную систему счисления.

   $1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,,\,0\,1\,1\,0\,1_2 = 010 \mid 111 \mid 001 \mid, 011 \mid 010_2 = 271{,}32_8$

   2) Перевести двоичное число $1011000011{,}1001_2$ в восьмеричную систему счисления.

   $1011000011{,}1001_2 = 001 \;\; 011 \;\; 000 \;\; 011\,,\,100 \;\; 100_2 = 1303{,}44_8$

Правило 6. Перевод чисел из шестнадцатеричной в двоичную систему счисления.

Для перевода числа из шестнадцатеричной в двоичную систему счисления достаточно перевести каждый символ отдельно, а затем записать символы последовательно друг за другом, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному шестнадцатеричному символу, должно состоять из четырёх разрядов – тетрад (т.к. $16 = 2^4$). Пустые позиции в начале числа заполняются нулями.

Примеры.

1) Перевести шестнадцатеричное число $6F3{,}A5_{16}$ в двоичную систему счисления

   $6_{16} = 0110_2$
   $F_{16} = 1111_2$
   $3_{16} = 0011_2$
   $A_{16} = 1010_2$
   $5_{16} = 0101_2$
   $6F3{,}A5_{16} = 011011110011{,}10100101_2$

2) Перевести шестнадцатеричное число $A39{,}F4_{16}$ в двоичную систему счисления

   $A_{16} = 1010_2$
   $3_{16} = 0011_2$
   $9_{16} = 1001_2$
   $F_{16} = 1111_2$
   $4_{16} = 0100_2$

$A39,F4_{16} = 101000111001,11110100_2$

Правило 7. Перевод чисел из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную.

Обратный перевод осуществляется следующим образом:

1. Двоичное число разбивается на тетрады. Разбивка выполняется вправо и влево от разделителя целой и дробной части. Неполные крайние тетрады дописываются нулями.
2. Выполняется перевод отдельно для каждой тетрады, получившиеся символы записываются последовательно друг за другом.

Примеры.

1) Перевести двоичное число $111101,01101_2$ в шестнадцатеричную систему счисления.

$111101,01101_2 = 0011\ \ 1101\ ,\ 0110\ \ \ 1000_2 = 3D,68_{16}$

2) Перевести двоичное число $1010000,01110_2$ в шестнадцатеричную систему счисления.

$1010000,01110_2 = 0101\ \ \ 0000\ ,\ 0111\ \ \ 0000_2 = 50,7_{16}$

Правило 8. Перевод чисел из восьмеричной в шестнадцатеричную систему счисления.

Перевод чисел из восьмеричной в шестнадцатеричную систему счисления удобно выполнять через двоичную систему счисления.

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. Восьмеричное число перевести в двоичное число, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному восьмеричному символу, должно состоять из триад;
2. Полученное двоичное перевести в шестнадцатеричную систему счисления, разбив двоичное число на тетрады.

Примеры.

1) Перевести восьмеричное число $534,713_8$ в шестнадцатеричную систему счисления.

$534,713_8 = 1\,0\,1\ 0\,1\,1\ 1\,0\,0\ ,\ 1\,1\,1\ 0\,0\,1\ 0\,1\,1_2 =$

$5_8\quad 3_8\quad 4_8\quad 7_8\quad 1_8\quad 3_8$

$= 0001\ \ \ 0101\ \ \ 1100\ ,\ 1110\ \ \ 0101\ 1000_2 = 15C,E58_{16}$

2) Перевести восьмеричное число $360,234_8$ в шестнадцатеричную систему счисления.

$360,234_8 = 0\,1\,1\ 1\,1\,0\ 0\,0\,0\ ,\ 0\,1\,0\ 0\,1\,1\ 1\,0\,0_2 =$

$3_8\quad 6_8\quad 0_8\quad 2_8\quad 3_8\quad 4_8$

$= 0000\ \ \ 1111\ \ \ 0000\ ,\ 0100\ \ \ 1110\ \ \ 0000_2 == F0,4E_{16}$

Правило 9. Перевод чисел из шестнадцатеричной в восьмеричную систему счисления.

Перевод чисел из шестнадцатеричной в восьмеричную систему счисления удобно выполнять через двоичную систему счисления.

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. Шестнадцатеричное число перевести в двоичное число, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному шестнадцатеричному символу, должно состоять из тетрад;
2. Полученное двоичное перевести в восьмеричную систему счисления, разбив двоичное число на триады.

Примеры.

1) Перевести шестнадцатеричное число $A2C,3_{16}$ в восьмеричную систему счисления.

$A2C,3_{16} = 1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\ ,\ 0\,0\,1\,1_2 = 101\ \ \ 000\ \ \ 101\ \ \ 100\ ,\ 001\ \ \ 100_2 =$

A_{16} 2_{16} C_{16} 3_{16}

$= 5054{,}14_8$

2) Перевести шестнадцатеричное число $CBF5{,}E6_{16}$ в восьмеричную систему счисления.

$CBF5{,}E6_{16} = 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ,\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0_2 =$

C_{16} B_{16} F_{16} 5_{16} E_{16} 6_{16}

$= 001\ \ 100\ \ 101\ \ 111\ \ 110\ \ 101,\ 111\ \ 001\ \ 100_2 = 145765{,}714_{16}$

Примеры:

1. Укажите целое число от 8 до 11, двоичная запись которого содержит ровно две единицы. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.

Пояснение.

Представим все числа в двоичной системе счисления:

$8_{10} = 1000_2$,
$9_{10} = 1001_2$,
$10_{10} = 1010_2$,
$11_{10} = 1011_2$.

Из чисел 9 и 10 выбираем число 10, поскольку оно является наибольшим.

2. Укажите целое число от 13 до 16, двоичная запись которого содержит наибольшее количество единиц.

Пояснение.

Переведём эти числа в двоичную систему счисления и сосчитаем количество единиц:

$13_{10}=1101_2$;
$14_{10}=1110_2$;
$15_{10}=1111_2$;
$16_{10}=10000_2$.

Двоичная запись числа 15 содержит наибольшее количество единиц.

Задания для самостоятельной работы

Отчет по практической работе представить в письменном виде с подробным описанием последовательности действий при выполнении заданий.

Задание 1.

Перевести числа из 2с/с, 8 с/с, 16 с/с в 10 с/с по вариантам:

№ варианта	P = 2	P = 2	P = 8	P = 8	P = 16	P = 16
1.	1101010	10101,101	574	135,1	14C	2D,1
2.	1101110	11011,11	652	24,3	10F	6C,3
3.	1010101	10101,01	374	107,12	20C	1A,1
4.	1010111	1011,0111	431	104,1	1E0	1C,11
5.	11010101	1101,11	106	57,02	1C2	5E,11
6.	10110101	10111,01	227	116,12	1C4	10C,1

7.	10011101	1011,11	361	107,01	21F	1E,12
8.	1001011	1010,011	253	37,11	1C0	3A,01
9.	11100100	100101,1	327	175,1	17A	10B,1
10.	10101101	11001,11	174	116,01	2DE	2F,1
11.	10100101	10100,001	554	125,1	1CB	10D,2
12.	10101011	10111,011	710	126,11	A5D	1B,21
13.	11000111	101000,101	325	130,12	D91	1A,12
14.	10100110	10101,011	541	114,1	E5A	C4,1
15.	1100111	1100,01	371	57,011	A0F	5D,01

Задание 2.

Выполнить задания по вариантам. Перевести число из 10 с/с в 2 с/с по вариантам. При переводе дробной части получить 4 знака после запятой.

№ варианта	**P = 10**	**P = 10**
1.	136	178,35
2.	213	135,123
3.	123	126,29
4.	236	162,157
5.	147	186,64
6.	184	165,127
7.	199	146,142
8.	132	159,33
9.	101	149,201
10.	231	155,33
11.	177	175,391
12.	97,456	221,76
13.	139	123,521
14.	153	157,25
15.	201	198,76

Задание 3.

Выполнить задания по вариантам. Перевести числа из 2-й СС в 8-ю и 16-ю СС

№ варианта	P = 2	P = 2
1.	1100101010	101101,101
2.	1101110110	11011011,1101
3.	1010100111	1011001,001
4.	1010111101	1011101,0111
5.	11010010111	111001,100101
6.	101100101	1011001,101
7.	11001110110	110001111,101
8.	1001011011	1001110,011
9.	11100110010	11100101,100
10.	1101011011	11010011,101
11.	1001001010	1001001,0101
12.	101010110	1010011,011

13.	1100001110	1100010,10111
14.	1010011011	1010110,0110
15.	1100111011	1101011,0111

Задание 4.

А) Укажите целое число от 7 до 10, двоичная запись которого содержит ровно два значащих нуля. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.
Б) Укажите целое число от 30 до 35, двоичная запись которого содержит наибольшее количество единиц.