Тригонометрия

Пусть $A(x;y)$ — точка на единичной окружности с центром в начале координат $O(0;0)$. Через угол α обозначим угол, образованный положительным направлением оси Ox и отрезком OA. **Синусом угла** α называется ордината точки A, а **косинусом** — её абсцисса. Отсюда следует

$$|\sin\alpha| \leqslant 1, \quad |\cos\alpha| \leqslant 1.$$

Свойства тригонометрических функций

$$\text{чётность/нечётность}: \qquad \sin(-x) = -\sin x; \qquad \cos(-x) = \cos x;$$

$$\text{периодичность}: \qquad \sin(x \pm 2\pi k) = \sin x; \qquad \cos(x \pm 2\pi k) = \cos x.$$

Формулы приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x; \quad \sin(\pi \pm x) = \mp\sin x; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin x; \quad \cos(\pi \pm x) = -\cos x.$$

Зависимость между тригонометрическими функциями

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Тригонометрические функции суммы и разности аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y; \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}; \qquad \cos x \pm \cos y = 2\cos\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$$

Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x; \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму (разность)

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}; \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2};$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}.$$

Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа x называется угол $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x:

$$\arcsin x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = x, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Арккосинусом числа x называется угол $\varphi \in [0; \pi]$, косинус которого равен x:

$$\arccos x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi = x, \quad \varphi \in [0; \pi].$$

Арктангенсом числа x называется угол $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x:

$$\operatorname{arctg} x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = x, \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Арккотангенсом числа x называется угол $\varphi \in (0; \pi)$, котангенсом которого равен x:

$$\operatorname{arcctg} x = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg}\varphi = x, \quad \varphi \in (0; \pi).$$

Свойства обратных тригонометрических функций

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \cos(\arccos x) = x, \qquad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1; 1], \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Решения простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a \quad (|a| \leqslant 1) \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = a \quad (|a| \leqslant 1) \quad \Rightarrow \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad (x \neq \pi n) \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решения простейших тригонометрических уравнений в частных случаях

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0; \qquad \operatorname{tg} x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0; \qquad \operatorname{ctg} x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$
