1 Фундаментальное решение

Определение Фундаментальным решением $U_i^{(m)}(x,\xi)$ называется смещение неограниченной упругой среды от действия сосредоточенной силы в направлении m-й координаты, приложенной в точке ξ и удовлетворяющая условиям излучения. Сингулярное решение $\sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)$ — напряжения, найденные по закону Гука из $U_i^{(m)}(x,\xi)$.

Рассмотрим фундаментальное решение для однородной изотропной упругой плоскости. Фундаментальное решение удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} (1-2\nu)^{-1}\left(U_{1,11}^{(m)}+U_{2,21}^{(m)}\right)+U_{1,11}^{(m)}+U_{1,22}^{(m)}+k_2^2U_1^{(m)}+\dfrac{\delta_{1m}}{G}\delta(x,\xi)=0, \\ (1-2\nu)^{-1}\left(U_{1,12}^{(m)}+U_{2,22}^{(m)}\right)+U_{2,11}^{(m)}+U_{2,22}^{(m)}+k_2^2U_2^{(m)}+\dfrac{\delta_{2m}}{G}\delta(x,\xi)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

(1) — неоднородные уравнения Ляме, ν — коэффициент Пуассона,

$$k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{G},$$

ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, G — модуль сдвига, δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta(x,\xi)$ — дельта-функция Дирака.

Для решения задачи используем преобразование Фурье:

$$\tilde{\tilde{U}}_i^{(m)}(\alpha,\xi)=\int\limits_{R^2}U_i^{(m)}(x,\xi)e^{i(\alpha,x)}dx_1dx_2,$$

где

$$(\alpha,x)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$$

После применения преобразования Фурье производная по x_j переходит в умножение на $-i\alpha_j$. Получаем:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[k_2^2 - \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} - \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} + \dfrac{\delta_{1m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} = 0, \\ -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \left[k_2^2 - \alpha_1^2 - \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} + \dfrac{\delta_{2m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

или

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\delta_{1m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)}, \\ \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} + \left[\alpha_1^2 + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right]\tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\delta_{2m}}{G}e^{i(\alpha,\xi)} \end{array}\right. \tag{3}$$

В дальнейшем считаем $m = 1$. Решим систему (3):

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} = \left[\alpha_1^2 + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right]\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{G\Delta}, \\ \tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = -\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{1-2\nu}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{G\Delta}, \end{array}\right. \tag{4}$$

где

$$\Delta = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2 - k_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2}$$

Раскроем скобки в последнем выражении:

$$\begin{aligned} \Delta = k_2^4 - k_2^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} + 1\right]\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \\ + \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^4 + \alpha_2^4\right) + \\ + \left\{\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^2 + 1 - \frac{1}{(1-2\nu)^2}\right\}\alpha_1^2\alpha_2^2 \end{aligned}$$

Рассмотрим множитель при $\alpha_1^2\alpha_2^2$:

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^2 + 1 - \frac{1}{(1-2\nu)^2} = \frac{4-8\nu+4\nu^2+1-4\nu+4\nu^2-1}{(1-2\nu)^2}$$

Преобразуем числитель:

$$\frac{4-8\nu+4\nu^2-4\nu+4\nu^2}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-3\nu+2\nu^2)}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(1-2\nu)^2} = \frac{4(1-\nu)}{1-2\nu}$$

Таким образом

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_1^2+\alpha_2^2\right]\left[\alpha_1^2+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2\right] - \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-2\nu)^2} =$$
$$= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^4+2\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4\right) = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2$$

и

$$\Delta = k_2^4 - k_2^2\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}+1\right]\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2$$

Разлагаем определитель на множители:

$$\Delta = \left[k_2^2 - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\right]\left[k_2^2-\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\right]$$

или

$$\Delta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k_2^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]$$

Рассмотрим выражение для продольной скорости:

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\rho\omega^2}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}k_2^2$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{G}{G(1-2\nu)^{-1}+G} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Следовательно

$$k_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}k_2^2$$

и

$$\Delta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{1}{\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right]\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right]} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{A}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}+\frac{B}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right)$$

Найдём A и B:

$$A\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2\right)+B\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2\right)=1$$

Собираем множители при $\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^0$ и $\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^1$:

$$-Ak_2^2-Bk_1^2=1,$$
$$A+B=0$$

Следовательно

$$A=-B=\frac{1}{k_1^2-k_2^2}=\frac{1}{k_2^2}\left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}-1\right]^{-1}=-\frac{2(1-\nu)}{k_2^2}$$

и

$$\frac{1}{\Delta}=-\frac{1-2\nu}{k_2^2}\left(\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right) \tag{5}$$

Подставим (8) в (7) и найдём трансформанты перемещений:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{U}}_1^{(m)} = -\dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2}\left[\alpha_1^2+\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\alpha_2^2-k_2^2\right]\times \\ \qquad\times\left(\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right), \\ \tilde{\tilde{U}}_2^{(m)} = \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\rho\omega^2}\left(\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}-\dfrac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}\right), \end{cases} \tag{6}$$

Обращаем преобразование Фурье, используя соответствие

$$\alpha_k = i\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Получаем:

$$\begin{cases} U_1^{(m)} = \dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_2^2\right]\times \\ \times\left[\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}d\alpha_1 d\alpha_2 - \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}d\alpha_1 d\alpha_2\right], \\ U_2^{(m)} = -\dfrac{1}{\rho\omega^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\times \\ \times\left[\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_1^2}d\alpha_1 d\alpha_2 - \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int\limits_{R^2}\dfrac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_2^2}d\alpha_1 d\alpha_2\right], \end{cases} \tag{7}$$

Вычислим интеграл:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{R^2}\frac{e^{i(\alpha,\xi-x)}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2-k_j^2}d\alpha_1 d\alpha_2$$

Произведём замену переменных:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha\cos\varphi, \\ \alpha_2 = \alpha\sin\varphi, \end{cases}, \begin{cases} \xi_1 - x_1 = R\cos\psi, \\ \xi_2 - x_2 = R\sin\psi \end{cases},$$

Интеграл приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\alpha e^{i\alpha R\cos(\varphi-\psi)}}{\alpha^2-k_j^2}d\alpha d\varphi$$

Воспользуемся формулой:

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta},$$

$J_n(z)$ — функция Бесселя n-го порядка.

Получаем:

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k_j^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha R) e^{in(\varphi - \psi)} \right] d\alpha d\varphi$$

Воспользуемся ортогональностью тригонометрических функций:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{in\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}$$

Теперь

$$I_j = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha d\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha$$

Подынтегральное выражение содержит вещественный полюс $\alpha = k_j$ и интеграл I_j расходится. Воспользуемся принципом предельного поглощения. При добавлении в исходные уравнения колебаний слагаемых, характеризующих вязкое трение, особенность смещается в верхнюю комплексную полуплоскость. Следовательно, для того, чтобы обеспечить равномерный предельный переход, следует интеграл по положительной вещественной полуоси заменить интегралом по контуру σ_+, обходящему снизу вещественный полюс.

Теперь сделаем еще одну замену в интеграле. Воспользуемся следующим представлением функции Бесселя

$$J_0(z) = \frac{1}{2} \left[H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z) \right],$$

где $H_0^{(1)}(z)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $H_0^{(2)}(z)$ — функция

Ганкеля второго рода нулевого порядка. Выражения для них имеют вид:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z),$$
$$H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iN_0(z),$$

где $N_0(z)$ — функция Неймана. Для функций Ганкеля имеет место асимптотика

$$H_0^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)},\ z \to \infty$$
$$H_0^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)},\ z \to \infty$$

при $z \to \infty$. Интеграл I_j приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(1)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha + \int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(2)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha\right]$$

Воспользуемся формулой

$$H_m^{(2)}\left(e^{-i\pi} z\right) = -e^{-im\pi} H_m^{(1)}(z),$$

следовательно

$$H_0^{(2)}\left(e^{-i\pi} z\right) = -H_0^{(1)}(z),$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(2)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha = \|\alpha = e^{-i\pi}\alpha'\| = \int\limits_{\sigma_-} \frac{\alpha' H_0^{(1)}(\alpha' R)}{\alpha'^2 - k_j^2} d\alpha',$$

где σ_- — контур в левой полуплоскости, совпадающий с вещественной осью всюду, за исключением особой точки $\alpha = -k_j$, которую он обходит в верхней полуплоскости.

Интеграл приобретает вид:

$$I_j = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\sigma_+} \frac{\alpha H_0^{(1)}(\alpha R)}{\alpha^2 - k_j^2} d\alpha,$$

$$\sigma = \sigma_- \cup \sigma_+$$

Так как функция Ганкеля экспоненциально убывает в верхней полуплоскости, контур можно замкнуть в верхней полуплоскости и тогда интеграл равен вычету подынтегральной функции в точке $\alpha = k_j$.

$$I_j = \frac{1}{4\pi} 2\pi i \frac{k_j H_0^{(1)}(k_j R)}{2k_j} = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j R).$$

Выражения для фундаментального решения принимают вид:

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = \dfrac{i}{4} \dfrac{1-2\nu}{\rho\omega^2} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_2^2 \right] \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right], \\ U_2^{(1)} = -\dfrac{i}{4} \dfrac{1}{\rho\omega^2} \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right], \end{cases} \tag{8}$$

Выражения (8) можно привести к виду

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = \dfrac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,11} + \left[H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,22} \right\}, \\ U_2^{(1)} = -\dfrac{i}{4\rho\omega^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,12}, \end{cases} \tag{9}$$

Сингулярные напряжения имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{(1)} = -\dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,122} + \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,1} \right\}, \\ \sigma_{12}^{(1)} = \dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,112} + \left[H_0^{(1)}(k_1 R) \right]_{,2} \right\}, \\ \sigma_{22}^{(1)} = \dfrac{i}{4} \left\{ \dfrac{2}{k_2^2} \left[H_0^{(1)}(k_1 R) - H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,122} - \dfrac{\nu}{1-\nu} \left[H_0^{(1)}(k_2 R) \right]_{,1} \right\} \end{cases} \tag{10}$$

Аналогично можно построить решение в случае $m = 2$. При этом $U_2^{(2)} = U_1^{(1)}$, $U_1^{(2)} =$

$U_2^{(1)}$

2 Прямой метод сведения

Теорема взаимности Пусть у нас имеется некоторое упругое тело объёма V, ограниченное поверхностью S. Рассмотрим два его состояния:

1. поверхностные силы $p_i^{(1)}$, массовые силы $F_i^{(1)}$, этой нагрузке соответствует решение $u_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$;

2. поверхностные силы $p_i^{(2)}$, массовые силы $F_i^{(2)}$, этой нагрузке соответствует решение $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$;

Работа первой системы сил на перемещениях, вызванных второй системой сил, равняется работе второй системы сил на перемещениях, вызванных первой системой сил.

Рассмотрим уравнения, которым удовлетворяют два решения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(1)} + F_i^{(1)} &= -\rho\omega^2 u_i^{(1)}, \\ \sigma_{ij,j}^{(2)} + F_i^{(2)} &= -\rho\omega^2 u_i^{(2)} \end{aligned} \tag{11}$$

Умножим первое уравнение (11) на $u_i^{(2)}$, второе — на $u_i^{(1)}$, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по объёму V. Получаем:

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} - \sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV + \int\limits_V \left[F_i^{(1)} u_i^{(2)} - F_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = 0 \tag{12}$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части (12):

$$\begin{aligned} &\int\limits_V \left[\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} - \sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = \\ &= \int\limits_V \left\{ \left[\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}\right]_{,j} - \left[\sigma_{ij}^{(2)} u_i^{(1)}\right]_{,j} - \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} \right\} dV \end{aligned} \tag{13}$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского:

$$\int\limits_V \left\{ \left[\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}\right]_{,j} - \left[\sigma_{ij}^{(2)} u_i^{(1)}\right]_{,j} - \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} \right\} dV = \\ = \int\limits_S \left[\sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^{(1)}\right] dS - \int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right] dV \tag{14}$$

Граничные условия для двух систем сил имеют вид:

$$\sigma_{ij}^{(1)} n_j \Big|_S = p_i^{(1)}, \\ \sigma_{ij}^{(2)} n_j \Big|_S = p_i^{(2)} \tag{15}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_V \left[\sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right] dV = \int\limits_V \left[C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)}\right] dV = \\ = \int\limits_V \left[C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} - C_{klij}\varepsilon_{ij}^{(2)}\varepsilon_{kl}^{(1)}\right] dV = 0 \tag{16}$$

Соотношение (12) приобретает вид:

$$\int\limits_S \left[p_i^{(1)} u_i^{(2)} - p_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] dS + \int\limits_V \left[F_i^{(1)} u_i^{(2)} - F_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] dV = 0 \tag{17}$$

или

$$\int\limits_V F_i^{(1)} u_i^{(2)} dV + \int\limits_S p_i^{(1)} u_i^{(2)} dS = \int\limits_V F_i^{(2)} u_i^{(1)} dV + \int\limits_S p_i^{(2)} u_i^{(1)} dS \tag{18}$$

Последнее равенство представляет из себя математическую формулировку теоремы взаимности. Теорема доказана.

Рассмотрим два состояния:

1. истинное: F_i, u_i, σ_{ij}, ε_{ij};

2. $F_i^{(2)} = \delta_{im}\delta(x-\xi)$, $u_i^{(2)} = U_i^{(m)}(x,\xi)$ — фундаментальное решение, $\sigma_{ij}^{(2)} n_j = \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi) n_j$ — сингулярное решение;

Подставим эти два состояния в уравнение (18):

$$
\begin{gathered}
\int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,\xi)dV_x + \int\limits_S \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi)dS_x = \\
= \int\limits_V \delta(x-\xi)u_i(x)dV_x + \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)dS_x
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Воспользуемся свойствами функции Дирака, свойствами символа Кронекера, и перегруппируем слагаемые в (19):

$$
\begin{gathered}
u_m(\xi) = \int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,\xi)dV_x + \\
+ \int\limits_S \left[\sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi) - \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)\right] dS_x,\ \xi \in V
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Соотношение (17) называется формулой Сомильяны и оно позволяет построить поле перемещений во всём теле, если на его границе известны перемещения и напряжения. Однако в краевой задаче теории упругости на границе обычно задаётся что-нибудь одно: или перемещение, или напряжение. Следовательно, если граничные условия имеют вид:

$$
S = S_u \cup S_\sigma,\ u_i|_{S_u} = u_i^0,\ \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i,
$$

то нужно определить перемещения на S_σ и поверхностные напряжения на S_u.

Осуществим предельный переход при $\xi \to y \in S$. Рассмотрим отдельно подынтегральные слагаемые:

$$
\int\limits_S \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,\xi)dS_x
$$

— аналог потенциала простого слоя.

$$
\int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi)n_ju_i(x)dS_x
$$

— аналог потенциала двойного слоя.

Выполняется теорема, аналогичная теореме о скачке потенциала двойного слоя и если $\xi \in V$, то

$$\lim_{\xi \to y} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,\xi) n_j u_i(x) dS_x = -\frac{1}{2} u_m(y) + \text{v.p.} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,y) n_j u_i(x) dS_x$$

и соотношение (20) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_m(y) = & \int\limits_V F_i(x) U_i^{(m)}(x,y) dV_x + \\ & + \int\limits_S \sigma_{ij}(x) n_j U_i^{(m)}(x,y) dS_x - \text{v.p.} \int\limits_S \sigma_{ij}^{(m)}(x,y) n_j u_i(x) dS_x,\ y \in S \end{aligned} \tag{21}$$

Соотношения (20), (21) связывают неизвестные граничные условия с известными и позволяют полностью решить задачу.

Зачечание Соотношение (21) получено в предположении гладкости поверхности S. Если поверхность содержит особые точки (или кривые), то

$$\frac{1}{2} u_m(y)$$

заменяется на

$$C_{mk} u_k,$$

C_{mk} — зависит от механических и геометрических параметров.

3 Метод граничных элементов (Boundary Elements Method, BEM)

Требуется из уравнения (21) найти $\sigma_{ij}n_j|_{S_u}$ и $u_i|_{S_\sigma}$. Рассмотрим случай двух измерений. Соотношение (21) имеет вид:

$$\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \int\limits_l \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,y)dl_x - \text{v.p.}\int\limits_l \sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_ju_i(x)dl_x,\ y\in l, \quad (22)$$

где S — рассматриваемая область, $l = \partial S$ — её граница.

$$u_0(y) = \int\limits_V F_i(x)U_i^{(m)}(x,y)dS_x$$

Метод граничных элементов состоит из следующих этапов:

1. Разбиение границы на элементы.

   Граница аппроксимируется ломаной

$$l = \bigcup_{q=1}^{N} l_q,$$

   l_q — отрезки прямой. Соотношение (22) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \sum_{q=1}^{N}\int\limits_{l_q} \sigma_{ij}(x)n_jU_i^{(m)}(x,y)dl_x - \\ -\sum_{q=1}^{N}\text{v.p.}\int\limits_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x,y)n_ju_i(x)dl_x,\ y\in l,\end{aligned} \quad (23)$$

2. Интерполяция неизвестной функции и введение узловых неизвестных

   Каждый из отрезков l_q взаимно однозначно отображается на отрещок $[-1,1]$. Обозначим концы отрезка ломаной через (x_{1q}^-, x_{2q}^-) и (x_{1q}^+, x_{2q}^+). Отображение имеет вид:

$$x_{iq} = x_{iq}^0 + \beta_{iq}\xi,$$

где

$$x_{iq}^0 = \frac{x_{iq}^+ + x_{iq}^-}{2},\ \beta_{iq} = \frac{x_{iq}^+ - x_{iq}^-}{2},\ \xi \in [-1, 1]$$

Аппроксимируем неизвестные функции на отрезке ломаной по формулам:

$$u_i(x)|_{l_q} = \sum_{n=1}^{n_q} u_{im}\psi_m(\xi),\ \sigma_{ij}(x)n_j|_{l_q} = \sum_{n=1}^{n_q} t_{im}\psi_m(\xi)$$

Граничным элементом называется подмножество границы области (в нашем случае отрезок ломаной) вместе с заданными базисными функциями. Существуют следующие типы элеметов:

- Постоянные, $n = 1$, $\psi_1(\xi) = 1$, узловыми точками являются x_q^0, — середины отрезков ломаных.
- Линейные, $n = 2$,
$$\psi_1(\xi) = \frac{1+\xi}{2},\ \psi_2(\xi) = \frac{1-\xi}{2},$$
узловыми точками являются x_q^-, x_q^+ — концы отрезков ломаных.
- Квадратичные, $n = 3$
$$\psi_1(\xi) = -\frac{\xi(1-\xi)}{2},\ \psi_2(\xi) = 1 - \xi^2,\ \psi_3(\xi) = \frac{\xi(1+\xi)}{2},$$
три узловые точки расположены на концах и в середине отрезка ломаной

В дальнейшем используем постоянные элементы.

3. Формирование конечномерного оператора и его обращение

Уравнение (23) теперь имеет вид:

$$\frac{1}{2}u_m(y) = u_0(y) + \sum_{q=1}^{N} t_{iq} \int\limits_{l_q} U_i^{(m)}(x,y) dl_x - \\ - \sum_{q=1}^{N} u_{iq} \cdot \text{v.p.} \int\limits_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x,y) n_j dl_x \tag{24}$$

Потребуем выполнения равенств (24) в узловых точках, расположенных на серединах отрезков ломаных. Получаем:

$$\frac{1}{2}u_{mp} = u_{0p} + \sum_{q=1}^{N} A_{imqp} t_{iq} - \sum_{q=1}^{N} B_{imqp} u_{iq},\ p = \overline{1,N} \tag{25}$$

где

$$A_{imqp} = \int\limits_{l_q} U_i^{(m)}(x, x_p) dl_x,$$

$$B_{imqp} = \text{v.p.} \int\limits_{l_q} \sigma_{ij}^{(m)}(x, x_p) n_j dl_x$$

При решении задачи известные слагаемые переносим влево, неизвестные — вправо.

3.1 Сравнение методов граничных элементов (Boundary Elements Method, BEM, МГЭ) и метода конечных элементов (Finite Elements Method, FEM, МКЭ)

Особенности методов:

- Размерность матрицы:
  - МКЭ — большая размерность матрицы СЛАУ, матрица разреженная, основное расчётное время — решение СЛАУ;
  - МГЭ — малая размерность матрицы СЛАУ (размерность начинается от $N = 20 \div 40$), матрица плотно заполненная, несимметричная и комплекс-

  нозначная, однако она хорошо обусловлена, с диагональным преобладанием. Основное расчётное время — вычисление коэффициентов матрицу, используются квадратурные формулы Гаусса;

- Неоднородность среды:
  - для МКЭ — не является препятствием;
  - для МГЭ — серьёзное препятствие, если рассматриваемое тело состоит из нескольких материалов, добавляются уравнения по границам раздела, в случае гладкой зависимости механических параметров от координат метод практически неприменим;
- Неограниченность среды:
  - для МКЭ — серьёзное препятствие. При помощи МКЭ может быть решена статическая задача для неограниченной области (с использованием принципа Сен-Венана). Динамическую задачу для неограниченной области можно решить при помощи МКЭ только если решение стремится к нулю на бесконечности;
  - для МГЭ — не препятствие;