1 Антиплоские колебания полупространства с цилиндрической полостью

Рассмотрим упругое полупространство $x_2 < 0$ с цилиндрической полостью S, ограниченной контуром $l = \partial S$. Решение имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = u(x_1, x_2) e^{-i\omega t} \end{cases} \tag{1}$$

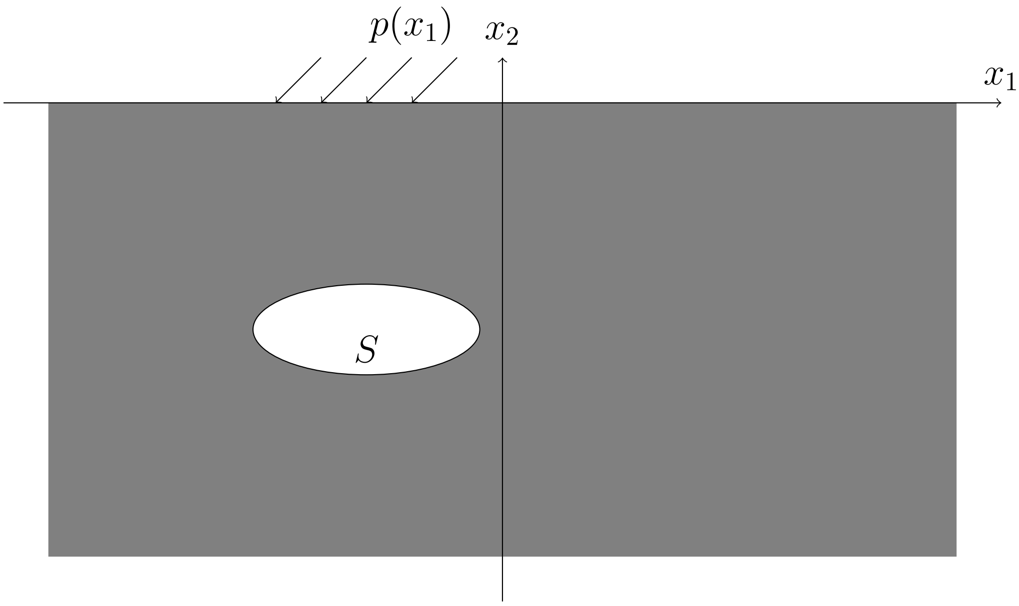

Рис. 1: Полупространство

Граничные условия имеют вид:

На верхней поверхности полупространства действует цилиндрическая нагрузка:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = p(x_1) \tag{2}$$

Границы полости свободны от напряжений:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\bigg|_l = \mu \left(n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)\bigg|_l = 0, \tag{3}$$

где $\underline{n}$ — внутренняя нормаль к границе полости.

1.1 Построение фундаментального решения для полуплоскости

Фундаментальное решение удовлетворяет уравнению

$$U^0_{,11} + U^0_{,22} + k_2^2 U^0 = -\delta(x - \xi), \tag{4}$$

где

$$k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, μ — модуль сдвига.

Верхняя поверхность полупространства свободна от напряжений:

$$\mu \frac{\partial U^0}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = 0 \tag{5}$$

Ишем решение U^0 в виде суммы двух слагаемых:

$$U^0 = V + W,$$

где V — решение неоднородного уравнения Гельмгольца

$$V_{,11} + V_{,22} + k_2^2 V = -\delta(x - \xi), \tag{6}$$

для неограниченной плоскости.

Функция W — решение однородного уравнения Гельмгольца

$$W_{,11} + W_{,22} + k_2^2 W = 0, \tag{7}$$

при граничном условии

$$W'\big|_{x_2=0} = -\,V'\big|_{x_2=0} \tag{8}$$

Для отыскания функции V воспользуемся двойным преобразованием Фурье:

$$\tilde{\tilde{V}} = \int\limits_{R}^{2} V(x_1, x_2) e^{i(\alpha,x)} dx_1 dx_2,\ (\alpha, x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

Уравнение (6) принимает вид:

$$-\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2\right) \tilde{\tilde{V}} = -e^{i(\alpha,\xi)}, \tag{9}$$

следовательно

$$\tilde{\tilde{V}} = \frac{e^{i(\alpha,\xi)}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2}, \tag{10}$$

Обращаем преобразование Фурье по переменной x_2:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2(\xi_2 - x_2)]}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2} d\alpha_2, \tag{11}$$

Рассмотрим особенности подынтегрального выражения. Они определяются из уравнения

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_2^2 = 0,$$

следовательно

$$\alpha_2^2 = -\left(\alpha_1^2 - k_2^2\right),$$

и

$$\alpha_2 = \pm i\gamma = \pm i\sqrt{\alpha_1^2 - k_2^2},$$

Предположим, что $\xi_2 - x_2 > 0$. Тогда контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости и выражение для $\tilde{V}$ принимает вид:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i[\alpha_1 \xi_1 + i\gamma(\xi_2 - x_2)]}}{2i\gamma} = \frac{e^{-\gamma(\xi_2 - x_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1 \xi_1}, \tag{12}$$

Аналогично, если $\xi_2 - x_2 < 0$, замыкаем контур в нижней полуплоскости, получаем:

$$\tilde{V} = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{e^{i[\alpha_1 \xi_1 - i\gamma(\xi_2 - x_2)]}}{-2i\gamma} = \frac{e^{\gamma(\xi_2 - x_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1 \xi_1}, \tag{13}$$

Объединяем выражения (12) и (13) и получаем:

$$\tilde{V} = \frac{e^{-\gamma|x_2 - \xi_2|}}{2\gamma} e^{i\alpha_1 \xi_1}, \tag{14}$$

Найдём теперь функцию W. Используем преобразование Фурье по переменной x_1:

$$\tilde{W}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1, x_2) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1$$

Уравнение в трансформантах имеет вид:

$$\tilde{W}'' - (\alpha_1^2 - k_2^2)\tilde{W} = 0 \tag{15}$$

Его общее решение, ограниченное в бесконечно удаленной точке, имеет вид:

$$\tilde{W} = Ce^{\gamma x_2} \tag{16}$$

Константу C определяем из условия (8). Найдём $\tilde{V}'$:

$$\tilde{V}' = -\frac{e^{-\gamma|x_2 - \xi_2|}}{2} e^{i\alpha_1 \xi_1} \operatorname{sgn}(x_2 - \xi_2),$$

следовательно

$$\gamma C = \frac{e^{\gamma \xi_2}}{2} e^{i\alpha_1 \xi_1} \tag{17}$$

и

$$\tilde{W} = \frac{e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1 x_1} \tag{18}$$

Трансформанта фундаментального решения принимает вид:

$$\tilde{U}^0 = \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|} + e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{2\gamma} e^{i\alpha_1 \xi_1} \tag{19}$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$U^0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi_2|} + e^{\gamma(x_2+\xi_2)}}{\gamma} e^{i\alpha_1(\xi_1-x_1)} d\alpha_1 \tag{20}$$

Согласно принципа предельного поглощения контур интегрирования по вещественной оси следует заменить на контур σ, который совпадает с вещественной осью всюду, за исключением окрестностей особых точек $\alpha_1 = \pm k_2$. При этом точка $\alpha_1 = k_2$ обходится в нижней полуплоскости, $\alpha_1 = -k_2$ — в верхней.

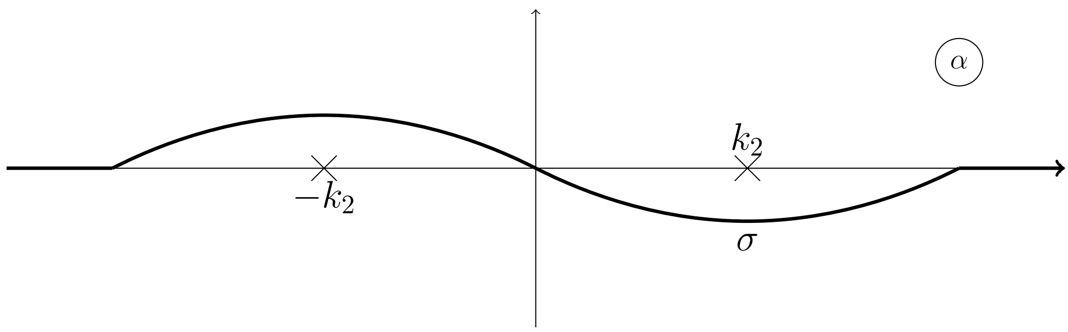

Рис. 2: Контур интегрирования

Интеграл (20) может быть взят аналитически и выражение для него имеет вид:

$$U^0 = \frac{i}{4} \left[H_0^{(1)}(k_2 r) + H_0^{(1)}(k_2 \tilde{r}) \right], \tag{21}$$

$$r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2},$$

$$\tilde{r} = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2+\xi_2)^2}$$

1.2 Построение граничного интегрального уравнения

Введем в рассмотрение область

$$S_R = \{(x_1, x_2) | \left(x_1^2 + x_2^2\right) \leq R,\, x_2 < 0\}$$

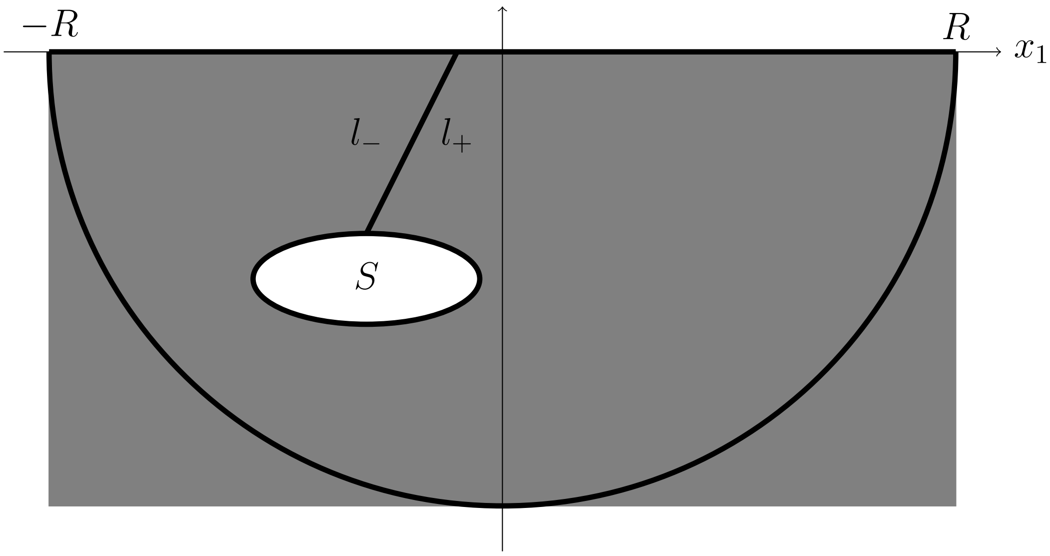

Рис. 3: Полупространство

Область S_R может быть сделана односвязной, если провести разрез l. Введём ещё одно обозначение $C_R = \partial S_R$.

Рассмотрим два уравнения: уравнение, которому удовлетворяет истинное решение задачи и уравнение, которому удовлетворяет фундаментальное решение:

$$\begin{aligned} &u_{,11} + u_{,22} + k_2^2 u = 0, \\ &U^0_{,11} + U^0_{,22} + k_2^2 U^0 = -\delta(x - \xi) \end{aligned} \tag{22}$$

Умножим первое из уравнений (22) на U^0, второе — на u, вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем разность по области S_R:

$$\int\limits_{S_R} \left[\Delta u(x) U^0(x,\xi) - \Delta U^0(x,\xi) u(x)\right] dS = u(\xi), \tag{23}$$

$$\Delta u = u_{,11} + u_{,22}.$$

Воспользуемся формулой Грина

$$u(\xi) = \int\limits_{C_R} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) \right] dl, \tag{24}$$

Устремим $R \to \infty$. Равенство (24) приобретает вид:

$$u(\xi) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{l} + \int\limits_{l_+} + \int\limits_{l_-} \right] \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) \right] dl, \tag{25}$$

Рассмотрим интегралы в выражении (24):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) \right] dl = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) U_0(x_1, 0; \xi) dx_1,$$

$$\int\limits_{l} \left[\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(x) U^0(x,\xi) - \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) \right] dl = -\int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl$$

Интегралы вдоль берегов разрезов l_- и l_+ взаимно сокращаются из-за противоположных направлений внешней нормали. Формула (25) теперь приобретает вид:

$$u(\xi) = u_0(\xi) - \int\limits_{l} \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x,\xi) u(x) dl, \tag{26}$$

где

$$u_0(\xi) = \frac{1}{\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1) U_0(x_1, 0; \xi) dx_1$$

Выражение (26) позволяет построить решение в любой точке полупространства, если на границе полости известно перемещение и напряжение. Но в условиях задачи указано только отсутствие напряжений на границе полости.

Рассмотрим выражение (26) и устремим точку ξ к точке $y \to l = \partial S$. Интеграл

$$\int_l \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x, \xi) u(x) dl$$

обладает свойствами потенциала двойного слоя. Уравнение (26) после предельного перехода принимает вид:

$$\frac{1}{2} u(y) = u_0(y) - \text{v.p.} \int_l \frac{\partial U^0}{\partial \underline{n}}(x, y) u(x) dl, \; y \in l, \tag{27}$$

где v.p. — главное значение интеграла по Коши.