1 Задача об отслоении трещины

Рассмотрим упругий слой толщины H, совершающий вынужденные колебания в состоянии антиплоской деформации. Уравнение колебаний имеет вид:

$$u_{,11} + u_{,22} + k^2 u = 0,\ k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu} \tag{1}$$

Граничные условия следующие:

- на верхней поверхности задана касательная нагрузка:

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=H} = \begin{cases} p(x_1), & x_1 \in [c, d] \\ 0, & x_1 \notin [c, d] \end{cases} \tag{2}$$

- нижняя поверхность жёстко защемлена всюду, за исключением отрезка $[a, b]$, напряжения на котором отсутствует:

$$u\big|_{x_2=0} = 0,\ x_2 \notin [a, b] \tag{3}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = 0,\ x_2 \in [a, b] \tag{4}$$

Граничные условия являются смешанными.

Рассмотрим вспомогательную задачу со следующими граничными условиями на нижней поверхности:

$$u\big|_{x_2=0} = \chi(x_1) \tag{5}$$

Применяем преобразование Фурье по переменной x_1:

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Уравнение (1) принимает вид:

$$- \alpha^2 \tilde{u} + \tilde{u}'' + k^2 \tilde{u} = 0, \tag{6}$$

или

$$\tilde{u}'' - \left(\alpha^2 - k^2\right) \tilde{u} = 0, \tag{7}$$

Общее решение (7) имеет вид:

$$\tilde{u} = A\mathrm{ch}\gamma x_2 + B\mathrm{sh}\gamma x_2, \tag{8}$$

Граничные условия вспомогательной задачи в трансфрмантах принимают вид:

$$\tilde{u}|_{x_2=0} = \tilde{\chi}(\alpha),\ \tilde{\chi}(\alpha) = \int\limits_a^b \chi(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1 \tag{9}$$

$$\tilde{u}'|_{x_2=H} = p_0(\alpha),\ p_0(\alpha) = \frac{1}{\mu} \int\limits_c^d p(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1 \tag{10}$$

Удовлетворяем общее решение (8) граничным условиям (9)-(10), получаем следующие равенства:

$$\tilde{u}|_{x_2=0} = A = \tilde{\chi}(\alpha)$$

$$\tilde{u}'|_{x_2=H} = \tilde{\chi}(\alpha)\gamma\mathrm{sh}\gamma H + B\gamma\mathrm{ch}\gamma H = p_0(\alpha)$$

Следовательно

$$B = \frac{1}{\gamma\mathrm{ch}\gamma H} \left[p_0(\alpha) - \tilde{\chi}(\alpha)\gamma\mathrm{sh}\gamma H\right]$$

Общее решение теперь принимает вид:

$$\tilde{u} = \tilde{\chi}(\alpha)\mathrm{ch}\gamma x_2 + \frac{\mathrm{sh}\gamma x_2}{\gamma\mathrm{ch}\gamma H} \left[p_0(\alpha) - \tilde{\chi}(\alpha)\gamma\mathrm{sh}\gamma H\right], \tag{11}$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\tilde{u} = \tilde{\chi}(\alpha)\frac{\text{ch}\gamma x_2 \text{ch}\gamma H - \text{sh}\gamma x_2 \text{sh}\gamma H}{\text{ch}\gamma H} + p_0(\alpha)\frac{\text{sh}\gamma x_2}{\gamma \text{ch}\gamma H}, \tag{12}$$

или

$$\tilde{u} = \tilde{\chi}(\alpha)\frac{\text{ch}\gamma\,(x_2 - H)}{\text{ch}\gamma H} + p_0(\alpha)\frac{\text{sh}\gamma x_2}{\gamma \text{ch}\gamma H}, \tag{13}$$

Построим обратное преобразование Фурье. Представим выражения для $\tilde{\chi}$, $\tilde{p}_0$ в виде:

$$\tilde{\chi}(\alpha) = \int\limits_a^b \chi(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi,\ \tilde{p}_0(\alpha) = \frac{1}{\mu}\int\limits_c^d p(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi$$

Тогда обратное преобразование Фурье представимо в виде:

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \chi(\xi)d\xi \int\limits_\sigma \frac{\text{ch}\gamma\,(x_2 - H)}{\text{ch}\gamma H}e^{i\alpha(\xi - x_1)}d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi\mu}\int\limits_c^d p(\xi)d\xi \int\limits_\sigma \frac{\text{sh}\gamma x_2}{\gamma\text{ch}\gamma H}e^{i\alpha(\xi - x_1)}d\alpha, \end{aligned} \tag{14}$$

σ — контур, обходящий особенности подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения. Удовлетворим полученное решение краевому условию (4):

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \chi(\xi)d\xi \int\limits_\sigma \frac{\gamma\text{sh}\gamma H}{\text{ch}\gamma H}e^{i\alpha(\xi - x_1)}d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi\mu}\int\limits_c^d p(\xi)d\xi \int\limits_\sigma \frac{e^{i\alpha(\xi - x_1)}}{\text{ch}\gamma H}d\alpha,\ x_1 \in [a, b] \end{aligned} \tag{15}$$

Равенство (15) может быть переписано в виде:

$$\int\limits_a^b \chi(\xi)k(\xi - x_1)d\xi = f(x_1),\ x_1 \in [a, b] \tag{16}$$

Последнее равенство — интегральное уравнение для определения функции раскрытия трещины. В нём введены следующие обозначения:

$$k(\xi - x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma} \frac{\gamma \mathrm{sh} \gamma H}{\mathrm{ch} \gamma H} e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha \tag{17}$$

$$f(x_1) = \frac{1}{2\pi\mu} \int\limits_{c}^{d} p(\xi) d\xi \int\limits_{\sigma} \frac{e^{i\alpha(\xi - x_1)}}{\mathrm{ch} \gamma H} d\alpha \tag{18}$$

Выражение

$$\frac{\gamma \mathrm{sh} \gamma H}{\mathrm{ch} \gamma H}$$

не стремится к нулю при $\alpha \to \infty$, следовательно, доказать сходимсость интеграла (17) не представляется возможным.

Функция раскрытия обладает следующими свойствами:

- $\chi(a) = \chi(b) = 0$;
- потребуем, чтобы функция $\chi'(\xi)$ удовлетворяла условию Гёльдера с показателем μ:

  $$\|\chi'(\xi_1) - \chi'(\xi_2)\| \leq A \|\xi_1 - \xi_2\|^{\mu},$$

  A — константа, не зависящая от выбора точек, а $\mu \in (0, 1]$

Если функция удовлетворяет условию Гёльдера, она непрерывна, но не обязательно дифференцируема.

Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{a}^{b} \chi(\xi) d\xi \int\limits_{\sigma} \frac{\gamma \mathrm{sh} \gamma H}{\mathrm{ch} \gamma H} e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \left[\chi(\xi) \int\limits_{\sigma} \frac{\gamma \mathrm{sh} \gamma H}{i\alpha \mathrm{ch} \gamma H} e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha \right] \Bigg|_{a}^{b} -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a}^{b} \chi'(\xi) d\xi \int\limits_{\sigma} \frac{\gamma \mathrm{sh} \gamma H}{\alpha \mathrm{ch} \gamma H} e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha$$

Уравнение (16) переписывается в виде:

$$-\int_a^b \chi'(\xi) k_1(\xi - x_1) d\xi = f(x_1),\ x_1 \in [a, b] \tag{19}$$

$$k_1(\xi - x_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{\gamma \mathrm{sh} \gamma H}{\alpha \mathrm{ch} \gamma H} e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha \tag{20}$$

Рассмотрим символ ядра k_1:

$$K(\alpha) = \frac{\gamma}{\alpha} \mathrm{th} \gamma H = \mathrm{sgn}\alpha + \Big(\frac{\gamma}{\alpha} \mathrm{th} \gamma H - \mathrm{sgn}\alpha\Big) = K_0(\alpha) + K_1(\alpha)$$

Найдём обраное преобразование Фурье для K_0:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \mathrm{sgn}\alpha e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha = \frac{i}{\pi} \frac{1}{\xi - x_1}$$

Уравнение (20) принимает вид:

$$-\frac{1}{\pi} \mathrm{v.p.} \int_a^b \frac{\chi'(\xi)}{\xi - x_1} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \chi'(\xi) d\xi \int_\sigma K_1(\alpha) e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha = f(x_1) \tag{21}$$

Если χ' удовлетворяет условию Гёльдера, интеграл в первом слагаемом сходится.

Такой приём назывется расщеплением оператора. Запишем уравнение в схематичном виде:

$$K_0 \chi' + K_1 \chi' = f \tag{22}$$

Оператор K_0 называется главным, K_1 – подчинённым. Оператор K_0 – имеет непрерывный обратный оператор и его можно построить в явном виде. Существует два способа решения уравнения (22):

1. Строится K_0^{-1} и уравнение (22) сводится к уравнению второго рода

$$\chi' + K_0^{-1} K_1 \chi' = K_0^{-1} f \tag{23}$$

При этом оператор $K_0^{-1}K_1$ является вполне непрерывным (так как K_0^{-1} – ограничен, а K_1 – вполне непрерывен).

Рассмотрим оператор

$$Au = \int_a^b K(x,s)u(s)ds$$

Если $K(x,s)$ – непрерывная функция своих переменных, то сответствующий оператор будет ограничен и непрерывен. Если Au действует из $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d]$, то выражение для его нормы имеет вид

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \int_c^d \int_a^b |K(x,s)|^2 dxds$$

Если интеграл сходится, то $\|A\| < \infty$ и A – ограничен.

Вполне непрерывный оператор – тот, котоый переводит ограниченное множество в компактное. Кроме того, вполне непрерывный оператор обладает важным свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение вида $A = Q + R$, где Q – конечномерный оператор, а $\|R\| < \varepsilon$. То есть вполне непрерывный операто можно со сколь угодно высокой точностью аппроксимировать кончномерным.

2. Второй способ – непосредственная дискретизация (22) с заменой интегралов конечными суммами по квадратурным формулам.

2 Задача о колебаниях слоя с поперечной трещиной

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу об антиплоских колебаниях слоя, занимающего область

$$\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty,\ 0 \leq x_2 \leq H\}$$

Будем считать, что слой совершает установившиеся колебания в состоянии антиплоской деформации, то есть

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = u(x_1, x_2)e^{-i\omega t} \end{cases}$$

Уравнение имеет следующий вид:

$$u_{,11} + u_{,22} + k^2 u = 0, \tag{24}$$

где

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu},$$

где ρ – плотность, а μ – модуль сдвига. Граничные условия следующие:

- нижняя поверхность слоя жёстко защемлена:

$$u|_{x_2=0} = 0 \tag{25}$$

- на верхней поверхности слоя действует касательная нагрузка

$$\sigma_{23}|_{x_2=H} = \mu \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=H} = p(x_1) = \begin{cases} p(x_1), & x_1 \in [a, b] \\ 0, & x_1 \notin [a, b] \end{cases} \tag{26}$$

- кроме того, на прямой $x_1 = 0$ расположена трещина на отрезке $x_2 \in [a, b]$. Берега трещины не взаимодействуют. Граничные условия на берегах терщины имеют следующий вид:

$$\sigma_{23}|_{x_1=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = 0 \text{ при } x_2 \in [a, b] \tag{27}$$

Применим у уравнению (24) интегральное преобразование Фурье в виде:

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Применим преобразование к первому слагаемому в левой части (24):

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{,11} e^{i\alpha x_1} dx_1 = u_{,1} e^{i\alpha x_1}\Big|_{+0}^{\infty} + u_{,1} e^{i\alpha x_1}\Big|_{-\infty}^{-0} - i\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{,1} e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Если воспользоваться принципом предельного поглошения и добавить в уравнение вязкие слагаемые, то на бесконечности u обратится в ноль. На берегах трещины производная $u_{,1}$ также обращается в ноль. Следовательно

$$I = -i\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{,1} e^{i\alpha x_1} dx_1$$

Продолжаем преобразования:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{,1} e^{i\alpha x_1} dx_1 = -\, u|_{+0} + u|_{-0} - i\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} u e^{i\alpha x_1} dx_1 = -\chi(x_2) - i\alpha \tilde{u},$$

где

$$\chi(x_2) = u|_{+0} - u|_{-0}$$

— скачок перемещения на берегах трещины.

Окончательно уравнение (24) после применения преобразования Фурье приобретает вид:

$$\tilde{u}'' - (\alpha^2 - k^2)\tilde{u} = i\alpha\chi(x_2) \tag{28}$$

Граничные условия теперь следующие:

$$\tilde{u}|_{x_2=0} = 0 \tag{29}$$

$$\tilde{u}'|_{x_2=0} = \frac{1}{\mu}\tilde{p}(\alpha),\ \tilde{p}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1)dx_1 \tag{30}$$

2.2 Фундаментальное решение

Для построения частного решения неонородного уравнения (28) удобно воспользоваться фундаментальным решением. Рассмотрим уравнение

$$\tilde{U}_0'' + (\alpha^2 - \kappa_2^2)\tilde{U}_0 = -\delta(x_2 - \xi) \tag{31}$$

при однородных граничных условиях:

$$\tilde{U}_0\Big|_{x_2=0} = 0 \tag{32}$$

$$\tilde{U}_0'\Big|_{x_2=0} = 0 \tag{33}$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$\tilde{U}_0 = A\mathrm{ch}\gamma x_2 + B\mathrm{sh}\gamma x_2 + \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi|}}{2\gamma}, \tag{34}$$

где

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}.$$

При построении выражения (34) было использовано фундаментальное решение для неограниченной плоскости, построенные раннее. Удовлетворим общее решение граничным условиям:

$$\tilde{U}_0\Big|_{x_2=0} = 0 = A + \frac{e^{-\gamma\xi}}{2\gamma} \tag{35}$$

Следовательно

$$A = -\frac{e^{-\gamma\xi}}{2\gamma} \tag{36}$$

Подставим общее решение (34) в граничное условие при $x_2 = H$:

$$\tilde{U}_0'\Big|_{x_2=H} = \gamma\left(A\mathrm{sh}\gamma H + B\mathrm{ch}\gamma H\right) - \frac{e^{-\gamma(H-\xi)}}{2} \tag{37}$$

Следовательно

$$B = \frac{1}{2\gamma\mathrm{ch}\gamma H}\left[e^{-\gamma(H-\xi)} + e^{-\gamma\xi}\mathrm{sh}\gamma H\right] \tag{38}$$

и решение задачи (31)-(33) приобретает вид:

$$\tilde{U}_0 = -\frac{e^{-\gamma\xi}}{2\gamma}\mathrm{ch}\gamma x_2 + \frac{\mathrm{sh}\gamma x_2}{2\gamma\mathrm{ch}\gamma H}\left[e^{-\gamma(H-\xi)} + e^{-\gamma\xi}\mathrm{sh}\gamma H\right] + \frac{e^{-\gamma|x_2-\xi|}}{2\gamma} \tag{39}$$

Приведём выражение в общему знаменателю

$$\tilde{U}_0 = \frac{1}{2\gamma\mathrm{ch}\gamma H}\left[-e^{-\gamma\xi}\mathrm{ch}\gamma(x_2-H) + e^{-\gamma(H-\xi)}\mathrm{sh}\gamma x_2 + e^{-\gamma|x_2-\xi|}\mathrm{ch}\gamma H\right] \tag{40}$$

Рассмотрим последнее выражение при $x_2 > \xi$:

$$\tilde{U}_0 = \frac{1}{2\gamma\mathrm{ch}\gamma H}\left[-e^{-\gamma\xi}\mathrm{ch}\gamma(x_2-H) + e^{-\gamma(H-\xi)}\mathrm{sh}\gamma x_2 + e^{-\gamma(x_2-\xi)}\mathrm{ch}\gamma H\right] \tag{41}$$

Рассмотрим

$$e^{-\gamma(H-\xi)}\mathrm{sh}\gamma x_2 + e^{-\gamma(x_2-\xi)}\mathrm{ch}\gamma H = \frac{1}{2}e^{\gamma\xi}\left[e^{-\gamma H}\left(e^{\gamma x_2} - e^{-\gamma x_2}\right) + e^{-\gamma x_2}\left(e^{\gamma H} + e^{-\gamma H}\right)\right] =$$

$$= e^{\gamma\xi}\mathrm{ch}\gamma(x_2-H)$$

Окончательно:

$$\tilde{U}_0 = \frac{\mathrm{sh}\gamma\xi\mathrm{ch}\gamma(x_2 - H)}{\gamma\mathrm{ch}\gamma H} \tag{42}$$

Рассмотрим последнее выражение при $x_2 \leq \xi$:

$$\tilde{U}_0 = \frac{1}{2\gamma\mathrm{ch}\gamma H}\left[-e^{-\gamma\xi}\mathrm{ch}\gamma(x_2 - H) + e^{-\gamma(H-\xi)}\mathrm{sh}\gamma x_2 + e^{\gamma(x_2-\xi)}\mathrm{ch}\gamma H\right] \tag{43}$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{2}\left[-e^{-\gamma\xi}(e^{\gamma x_2}e^{-\gamma H} + e^{-\gamma x_2}e^{\gamma H}) + e^{-\gamma H}e^{\gamma\xi}(e^{\gamma x_2} - e^{-\gamma x_2}) + e^{\gamma x_2}e^{-\gamma\xi}(e^{\gamma H} + e^{-\gamma H})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-e^{-\gamma\xi}e^{-\gamma x_2}e^{\gamma H} + e^{-\gamma H}e^{\gamma\xi}(e^{\gamma x_2} - e^{-\gamma x_2}) + e^{\gamma x_2}e^{-\gamma\xi}e^{\gamma H}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{\gamma x_2}(e^{\gamma(\xi-H)} + e^{-\gamma(\xi-H)}) - e^{-\gamma x_2}(e^{\gamma(\xi-H)} + e^{-\gamma(\xi-H)})\right] = \mathrm{sh}\gamma x_2\mathrm{ch}\gamma(\xi - H)$$

Окончательно

$$\tilde{U}_0(\alpha, x_2; \xi) = \frac{1}{2\gamma\mathrm{ch}\gamma H}\begin{cases}\mathrm{sh}\gamma\xi\mathrm{ch}\gamma(x_2 - H), & x_2 > \xi\\ \mathrm{sh}\gamma x_2\mathrm{ch}\gamma(\xi - H), & x_2 \leq \xi\end{cases} \tag{44}$$

2.3 Построение интегрального уравнения

Теперь возвращаемся к решению уравнения (28) при краевых условиях (32)-(33). Решение строим в виде суммы частного решения неоднородного уравнения при однородных краевых условиях и решения однородного уравнения при неоднородных краевых условиях. Такое решение имеет вид:

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = i\alpha\int\limits_a^b \chi(\xi)\tilde{U}_0(\alpha, x_2; \xi)d\xi + A\mathrm{ch}\gamma x_2 + B\mathrm{sh}\gamma x_2 \tag{45}$$

Константы A и B находим из краевых условий (32)-(33), учитывая при этом то, что при $x_2 = 0$

$$\tilde{U}_0(\alpha, 0; \xi) = 0,$$

а при $x_2 = H$

$$\tilde{U}_0'(\alpha, H; \xi) = \frac{\mathrm{sh}\gamma\xi\mathrm{sh}\gamma(H-H)}{2\mathrm{ch}\gamma H} = 0.$$

Получаем:

$$\tilde{u}(\alpha, 0) = A = 0 \tag{46}$$

$$\tilde{u}'(\alpha, 0) = \gamma\left(A\mathrm{sh}\gamma H + B\mathrm{ch}\gamma H\right) = \frac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu} \tag{47}$$

Следовательно

$$B = \frac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu}\frac{1}{\gamma\mathrm{ch}\gamma H} \tag{48}$$

Окончательно

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = i\alpha\int\limits_a^b \chi(\xi)\tilde{U}_0(\alpha, x_2; \xi)d\xi + \frac{\tilde{p}(\alpha)}{\mu}\frac{\mathrm{sh}\gamma x_2}{\gamma\mathrm{ch}\gamma H} \tag{49}$$

Теперь производим обращение преобразования Фурье с учётом принципа предельного поглощения:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_a^b \chi(\xi)d\xi\int\limits_\sigma \alpha\tilde{U}_0(\alpha, x_2; \xi)e^{-i\alpha x_1}d\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi\mu}\int\limits_\sigma \tilde{p}(\alpha)\frac{\mathrm{sh}\gamma x_2}{\gamma\mathrm{ch}\gamma H}e^{-i\alpha x_1}d\alpha \end{aligned} \tag{50}$$

Это выражение должно удовлетворять граничному условию (27) на берегах трещины. Найдём сперва производную функции перемещения по x_1:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \chi(\xi)d\xi \int\limits_\sigma \alpha^2 \tilde{U}_0(\alpha, x_2; \xi) e^{-i\alpha x_1} d\alpha - \\ - \frac{i}{2\pi\mu}\int\limits_\sigma \tilde{p}(\alpha)\frac{\alpha \mathrm{sh}\gamma x_2}{\gamma \mathrm{ch}\gamma H} e^{-i\alpha x_1} d\alpha \tag{51}$$

Подставляем в (51) значение $x_1 = 0$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \chi(\xi)d\xi \int\limits_\sigma \alpha^2 \tilde{U}_0(\alpha, x_2; \xi) d\alpha - \frac{i}{2\pi\mu}\int\limits_\sigma \tilde{p}(\alpha)\frac{\alpha \mathrm{sh}\gamma x_2}{\gamma \mathrm{ch}\gamma H} d\alpha \tag{52}$$

Последнее равенство может быть истолковано как интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b \chi(\xi)d\xi \int\limits_\sigma \alpha^2 \tilde{U}_0(\alpha, x_2; \xi) d\alpha = F(x_2), \tag{53}$$

где

$$F(x_2) = \frac{i}{2\pi\mu}\int\limits_\sigma \tilde{p}(\alpha)\frac{\alpha \mathrm{sh}\gamma x_2}{\gamma \mathrm{ch}\gamma H} d\alpha$$

Легко видеть, что ядро уравнения (53) расходится при $x_2 = \xi$. При решении уравнения используется или понятие конечного значения по Адамару или преобразование с интегрированием по частям, аналогичное предыдущей задаче.