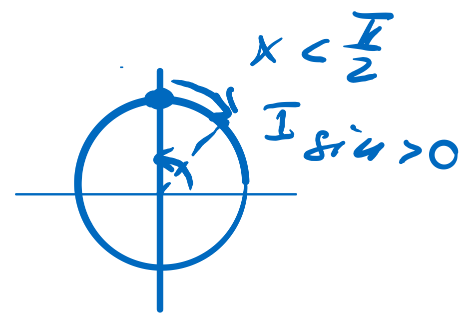
13.3. [ЕГЭ-2019] а) Решить уравнение $4\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg} x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

решение

а) $4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg} x$



$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-\underline{\sin}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$

$=-\cos x$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sin x\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}+\cos x\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}=$

$=-\cos x$

$4\cos^2 x=\operatorname{ctg} x$ $\qquad \operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x};\ \sin x\neq 0$

$4\cos^2 x-\dfrac{\cos x}{\sin x}=0 \quad \Big|\cdot\sin x$

$4\sin x\cos^2 x-\cos x=0$

$\cos x\,(4\sin x\cos x-1)=0$

$\cos x=0$

$x=\pm\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$2\cdot\underbrace{2\sin x\cos x}=1$

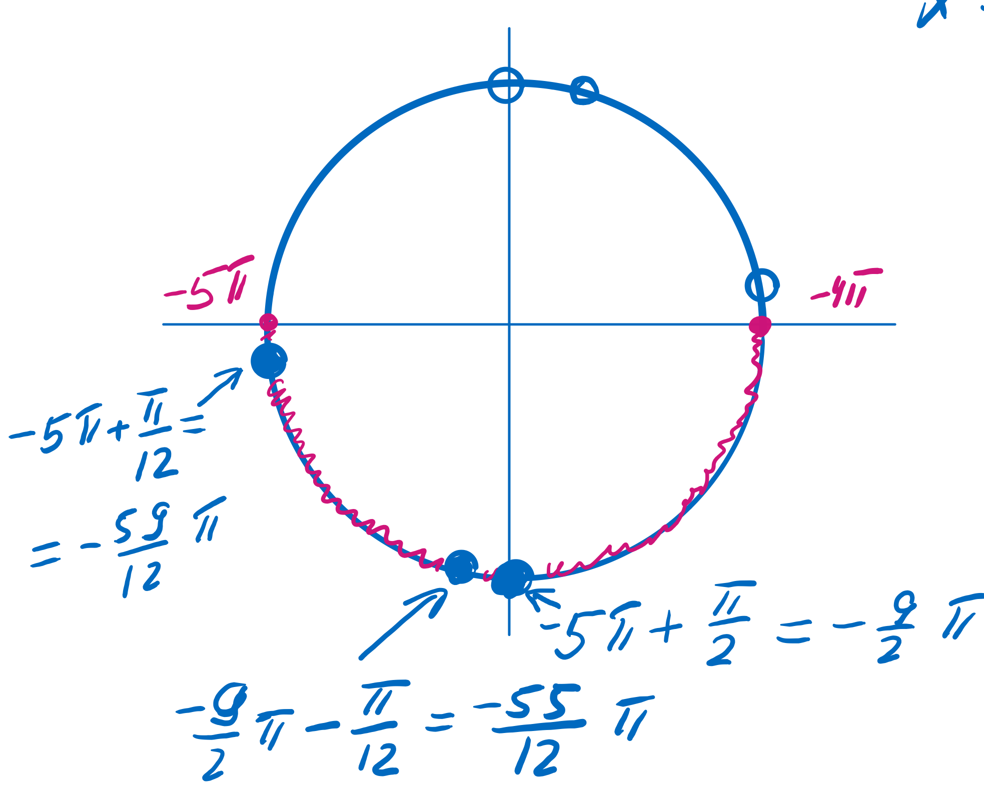
$2\sin 2x=1$

$\sin 2x=\frac{1}{2}$

$2x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=(-1)^k\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$

б)



$\left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{5}{12}\pi+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ:

а) $\pm\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\frac{59}{12}\pi;\ -\frac{55}{12}\pi;\ -\frac{9}{2}\pi$