12.1. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 300x + 19$. $x_{min} = ?$

1) $y' = (x^3 - 300x + 19)' = (x^3)' - (300x)' + 19' =$
$= 3x^2 - 300$

2) $3x^2 - 300 = 0$
$x^2 = 100$
$x_{1,2} = \pm 10$

3) y': $+$ max $-$ min $+$
y: $\nearrow$ -10 $\searrow$ 10 $\nearrow$ x

Ответ: 10

12.2. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3; 3]$. $y_{max} = ?$

1) $y' = \left(\frac{1}{3} \cdot x^3\right)' - (9x)' - 7' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - 9 = x^2 - 9$
2) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$
3) y': $+$ max $-$ min $+$
y: $\nearrow$ -3 $\searrow$ 3 $\nearrow$ x

4) $x_{max} = -3$
$y(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9 \cdot (-3) - 7 = -9 + 3 \cdot 9 - 7 = 18 - 7 = 11$
Ответ: 11

12.3. Найдите точку максимума $y = -\frac{x}{x^2 + 289}$. $x_{max} = ?$

1) $y' = -\frac{x'(x^2+289) - x(x^2+289)'}{(x^2+289)^2} = -\frac{x^2+289 - x \cdot 2x}{(x^2+289)^2}$

$y' = -\frac{-x^2+289}{(x^2+289)^2}$ $x^2 + 289 \neq 0$ для любых x

2) $-x^2 + 289 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 17$

3) y': $+$ max $-$ min $+$
y: $\nearrow$ -17 $\searrow$ 17 $\nearrow$ x

Ответ: -17

12.4. Найдите наименьшее значение функции $y = 10x - 10\ln(x + 8) + 19$ на отрезке $[-7{,}5; 0]$.

$y_{min} = ?$

1) $y' = (10x)' - (10\ln(x+8))' + 19' =$
$= 10 - 10 \cdot \frac{1}{x+8} \cdot \underbrace{(x+8)'}_{1} = 10 - \frac{10}{x+8}$

2) $10 - \frac{10}{x+8} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x+8} = 1 \Rightarrow x + 8 = 1 \Rightarrow x = -7$

3) y': $-$ min $+$
y: $-7{,}5$ $\searrow$ -7 $\nearrow$ 0

4) $y(-7) = 10 \cdot (-7) - 10 \cdot \underbrace{\ln(-7+8)}_{0} + 19 =$
$= -70 + 19 = -51$

Ответ: -51

12.5. Найдите точку максимума функции $y = \underbrace{(x - 7)^2}_{u}\underbrace{e^{x-8}}_{v}$.

$x_{max} = ?$ $y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + uv'$

1) $y' = ((x-7)^2)' \cdot e^{x-8} + (x-7)^2 \cdot (e^{x-8})' =$
$= 2(x-7) \cdot \underbrace{(x-7)'}_{1} \cdot e^{x-8} + (x-7)^2 \cdot e^{x-8} \cdot \underbrace{(x-8)'}_{1} =$
$= 2(x-7)e^{x-8} + (x-7)^2 e^{x-8}$

2) $(x-7)e^{x-8}(2 + x - 7) = 0$ $a^x > 0$
$e^{x-8} \neq 0$ $x - 7 = 0$ $x - 5 = 0$
$x_1 = 7$ $x_2 = 5$

3) y': $+$ max $-$ min $+$
y: $\nearrow$ 5 $\searrow$ 7 $\nearrow$ x

Ответ: 5

12.6. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\operatorname{tg} x - 5x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
$y_{min} = ?$

1) $y' = \left(5\frac{\sin x}{\cos x}\right)' - (5x)' + 6' =$ $\sin' x = \cos x$
$= 5 \cdot \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} - 5$ $\cos' x = -\sin x$

$y' = 5\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 5 = \frac{5}{\cos^2 x} - 5$

2) $\frac{5}{\cos^2 x} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1$
$\cos x = 1$ $\cos x = -1$
$x = 2\pi n, n \in Z$ $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

3) y': ext $+$
y: $\boxed{0}$ $\nearrow$ $\frac{\pi}{4}$ x

на $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ y возрастает $\Rightarrow y_{min} = y(0)$

4) $y(0) = 5 \cdot \operatorname{tg} 0 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$

Ответ: 6