

Практическое занятие № 3

Оглавление

ЧАСТЬ 1. МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА	1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА	1
МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ в EXCEL	2
ЗАДАНИЕ №1	2
ЗАДАНИЕ №2	5
ЗАДАНИЕ №3	7
ЧАСТЬ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	12
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)	12
ЗАДАНИЕ №4	13
ЗАДАНИЕ №5	20
ЗАДАНИЕ №6	22

Часть 1. Матричная алгебра

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например A, B, C, \dots , а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij} , i -номер строки, j -номер столбца. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей. Матрица, у которой $m=n$, т. е. число строк равно числу столбцов, называется квадратной. Элементы матрицы a_{ij} , у которых номер строки ($i=j$) равен номеру столбца, называются диагональными и образуют главную диагональ. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Если все не диагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется диагональной. Если у диагональной матрицы n -го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется единичной, обозначается буквой E . Например, единичная матрица третьего порядка:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей (вектором)-строкой, а из одного столбца матрицей (вектором)-столбцом:

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами. К простейшим операциям с матрицами принято относить следующие: сложение и вычитание матриц, умножение и деление матрицы на число, перемножение матриц, транспонирование, вычисление обратной матрицы.

- Сложение матриц.** Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица C , каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B , $i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$. Матрицы складываются поэлементно. Например:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i=1..m, j=1..n$$

2. **Умножение матрицы на число.** Произведением матрицы A на число l называется матрица B , которая получается из матрицы A умножением всех ее элементов на l , т.е.

$$B = \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. **Вычитание матриц.** Разность двух матриц, одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1)B$.
4. **Умножение матриц.** Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором; в этом случае говорят, что форма матриц *согласована*. В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка.
5. **Транспонирование матриц** — переход от матрицы A к матрице, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.
6. Квадратную матрицу A порядка n можно сопоставить с числом $\det A$ (или $|A|$, или Δ_A), называемым определителем или детерминантом.
7. **Обратная матрица** — такая матрица A^{-1} , при умножении на которую, исходная матрица A даёт в результате единичную матрицу E : $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её определитель не равен нулю. Для неквадратных матриц и вырожденных матриц обратных матриц не существует

МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ В EXCEL

Табличные формулы или *формулы массива* — очень мощное вычислительное средство Excel, позволяющее работать с блоками рабочего листа как с отдельными ячейками. Табличные формулы в качестве результата возвращают массив значений. Поэтому перед вводом такой формулы необходимо выделить диапазон ячеек, куда будут помещены результаты. Потом набирается сама формула. Ввод ее в выделенный диапазон ячеек осуществляется нажатием комбинации клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Это принципиально. Формула вводится во все ячейки выделенного интервала. При активизации любой ячейки из интервала, содержащего формулу массива, в строке формул отображается введенная формула, заключенная в *фигурные скобки*. Именно фигурные скобки являются признаком табличной формулы. Для выделения всего блока, содержащего табличную формулу, необходимо выделить одну из его ячеек, после чего нажать комбинацию клавиш **Ctrl+/.** Невозможно редактировать содержимое только одной ячейки из интервала с табличной формулой. Изменить можно только весь блок целиком, для чего он и должен быть предварительно выделен.

Умножение (деление) матрицы на число, сложение (вычитание) матриц в Excel реализуются достаточно просто: с помощью обычных формул (поэлементное сложение или вычитание, умножение или деление на число), либо с использованием табличных формул. Для остальных матричных операций в Excel предусмотрены функции рабочего листа из категории «Математические функции»:

1. **МОПРЕД(массив)** — вычисление определителя матрицы,
2. **МОБР(массив)** — вычисление обратной матрицы,
3. **МУМНОЖ(массив1; массив 2)** — произведение матриц,
4. **ТРАНСП(массив)** — транспонирование матрицы.

ЗАДАНИЕ №1.

Для **сложения двух матриц в MS Excel** одинаковой размерности следует выполнить следующую последовательность действий:

1. Задать две исходные матрицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	A			B				
3	1	2	4		2	2	6	
4	4	5	6		3	5	12	
5	1	5	7		4	5	0	
6								

2. Отметить место для матрицы-результата.

3. В выделенном месте под результат поставить знак равенства и записать сумму так, как показано на рис.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	A			B				
3	1	2	4		2	2	6	
4	4	5	6		3	5	12	
5	1	5	7		4	5	0	
6								
7	C=A+B							
8	=A3:C5+E3:G5							
9								
10								
11								

4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	A			B				
3	1	2	4		2	2	6	
4	4	5	6		3	5	12	
5	1	5	7		4	5	0	
6								
7	C=A+B							
8	3	4	10					
9	7	10	18					
10	5	10	7					
11								

Для умножения матрицы на число в MS Excel следует выполнить следующие действия:

1. Задать исходную матрицу. Ввести число λ

	A	B	C	D	E	F
1						
2	5,8	7,6	5,7			
3	7,0	6,3	6,2			
4	5,7	7,7	5,3			
5	5,6	7,1	5,5			

2. Отметить место для матрицы-результата.

3. В выделенном под результат месте электронной таблицы записать произведение так, как показано на рис.

	A	B	C	D	E	F	G
1		A					
2	5,8	7,6	5,7				
3	7,0	6,3	6,2				
4	5,7	7,7	5,3				
5	5,6	7,1	5,5				
6							
7		B=λA					
8	=F1*A2:C5						
9							
10							
11							

4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

Умножение матриц в MS Excel. Умножение матриц **A** и **B** возможно, если число столбцов матрицы **A** совпадает с числом строк матрицы **B**.

Выполним следующую последовательность действий:

1. Зададим матрицы **A** и **B**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1		A				B				
2	1	2	3			2	3	5	8	
3	6	5	4			1	3	5	9	
4	7	8	9			1	2	7	1	
5	1	5	2							
6										

2. Отметим место под матрицу-результат.

3. Обратимся к мастеру функций, найдем функцию **МУМНОЖ** и выполним постановку задачи так, как показано на рис. В качестве массива 1 указываем диапазон адресов матрицы **A**, а в качестве массива 2 – диапазон адресов матрицы **B**.

4. Для получения результата необходимо одновременно нажать клавиши Shift/Ctrl/Enter

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		A				B				
2	1	2	3			2	3	5	8	
3	6	5	4			1	3	5	9	
4	7	8	9			1	2	7	1	
5	1	5	2							
6										
7										
8	7	15	36	29						
9	21	41	83	97						
10	31	63	138	137						
11	9	22	44	55						
12										

ЗАДАНИЕ №2.

Вычисление обратной матрицы в MS Excel. Работу с матричной функцией МОБР в MS Excel следует выполнять в следующем порядке:

1. Задать исходную квадратную матрицу.

Библиотека функций				
A7	f _x			
	A	B	C	D
1		A		
2		5	2	3
3		6	5	4
4		7	2	2
5				
6				

2. Отметить место для матрицы-результата.

3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию МОБР и выполнить постановку задачи

Матрица

=МОБР(A2:C4)

Аргументы функции

МОБР

Массив: A2:C4+L21

Возвращает обратную матрицу (матрица хранится в массиве).

Массив: числовой массив с равным количеством строк и столбцов, либо диапазон или массив.

Значение: -0,0740740740741;-0,0740740...

Справка по этой функции

OK Отмена

4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

Библиотека функций				
E2	f _x	{=МОБР(A2:C4+L21)}		
	A	B	C	D
1		A		
2		5	2	3
3		6	5	4
4		7	2	2
5				
6				

E2

f_x

{=МОБР(A2:C4+L21)}

A

5 2 3

6 5 4

7 2 2

A'

-0,074074074 -0,07407 0,259259

-0,592592593 0,407407 0,074074

0,851851852 -0,14815 -0,48148

Вычисление определителя матрицы в MS Excel. Для вычисления определителя матрицы сформируем лист электронной таблицы MS Excel:

1. Определим исходную матрицу.
2. Определим место под результат.
3. Обратимся к мастеру функций, найдем функцию МОПРЕД, выполним постановку задачи.

МОПРЕД													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
1					A'								
2	5	2	3		-0,074074074	-0,07407	0,259259						
3	6	5	4		-0,592592593	0,407407	0,074074						
4	7	2	2		0,851851852	-0,14815	-0,48148						
5													
6													
7	det A=	=МОПРЕД(A2:C4)											
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													

Аргументы функции

МОПРЕД

Массив A2:C4 = {5;2;3;6;5;4;7;2;2} = -27

Возращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

Массив числовой массив с равным количеством строк и столбцов, диапазон ячеек или массив.

Значение: -27

Справка по этой функции

OK Отмена

4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

БИБЛИОТЕКА ФУНКЦИЙ			
C7			
	A	B	C
1		A	
2	5	2	3
3	6	5	4
4	7	2	2
5			
6			
7	det A=	-27	
8			
9			

Транспонирование матрицы в MS Excel. Работу с матричной функцией ТРАНСП в MS Excel следует выполнять в следующем порядке:

1. Задать исходную матрицу.

БИБЛИОТЕКА ФУНКЦИЙ					
I10					
	A	B	C	D	E
1	A				
2	2	3	5	8	
3	1	3	5	9	
4	1	2	7	1	

2. Отметить место для матрицы-результата.

3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию ТРАНСП и выполнить постановку задачи.

Библиотека функций Определенные имена Зависимо

АТ
=TRANSPOSE(A2:D4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	A											
2	2	3	5	8		AT						
3	1	3	5	9		=TRANSPOSE(A2:D4)						
4	1	2	7	1								
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												

4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

Библиотека функций Определенные имена

F2 {=TRANSPOSE(A2:D4)}

	A	B	C	D	E	F	G	H			
1	A					AT					
2	2	3	5	8		2	1	1			
3	1	3	5	9		3	3	2			
4	1	2	7	1		5	5	7			
5						8	9	1			
6											

ЗАДАНИЕ №3.

Доступ к частям матрицы

Для доступа и отделения частей матрицы применяются две стандартные функции листа: ИНДЕКС и СМЕШ

- ИНДЕКС(массив, номер_строки, [номер_столбца])** - Возвращает значения элементов в массиве, выбранных с помощью индексов строк и столбцов.
- ❖ **Массив** — обязательный аргумент. Диапазон ячеек или константа массива.
 - Если массив содержит только одну строку или один столбец, аргумент "номер_строки" или "номер_столбца" соответственно не является обязательным.
 - Если массив занимает больше одной строки и одного столбца, а из аргументов "номер_строки" и "номер_столбца" задан только один, то функция ИНДЕКС возвращает массив, состоящий из целой строки или целого столбца аргумента "массив".
 - ❖ **Номер_строки** — обязательный аргумент. Номер строки в массиве, из которой требуется возвратить значение. Если аргумент "номер_строки" опущен, аргумент "номер_столбца" является обязательным.
 - ❖ **Номер_столбца** — необязательный аргумент. Номер столбца в массиве, из которого требуется возвратить значение. Если аргумент "номер_столбца" опущен, аргумент "номер_строки" является обязательным.

Замечания

- Если используются оба аргумента — и "номер_строки", и "номер_столбца", — то функция ИНДЕКС возвращает значение, находящееся в ячейке на пересечении указанных строки и столбца.
- Если указать в качестве аргумента "номер_строки" или "номер_столбца" значение 0, функция ИНДЕКС возвратит массив значений для целого столбца или целой строки соответственно. Чтобы использовать значения, возвращенные как массив, введите функцию ИНДЕКС как

формулу массива в горизонтальный диапазон ячеек для строки и в вертикальный — для столбца. Чтобы ввести формулу массива, нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER**.

- Аргументы "номер_строки" и "номер_столбца" должны указывать на ячейку внутри заданного массива, в противном случае функция ИНДЕКС возвратит значение ошибки #ССЫЛ!.

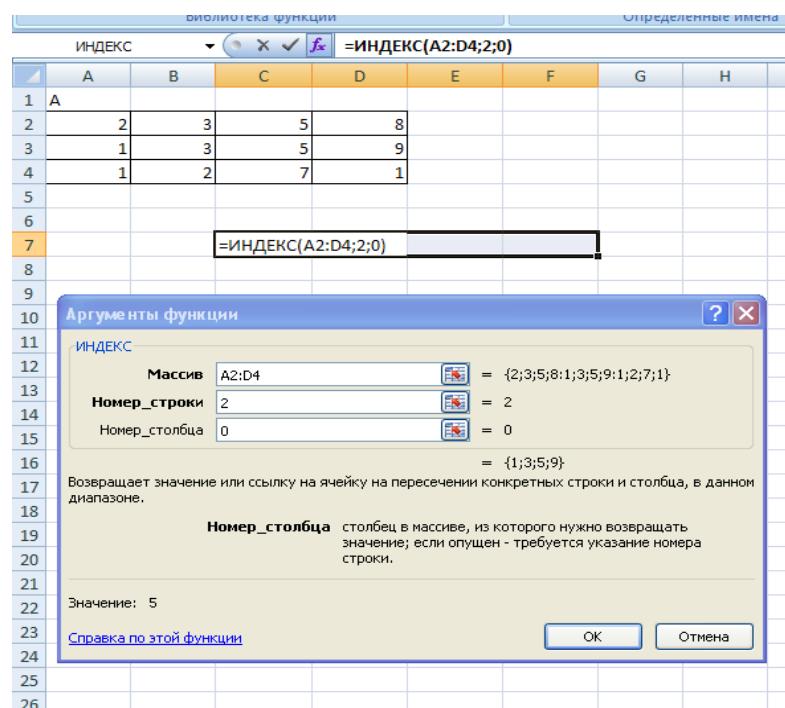
Пример

Выберем из исходной матрицы 2 строку; 3 столбец и элемент a_{32} с помощью функции ИНДЕКС

1. Задать исходную матрицу.

2. Отметить место для 2 строки.

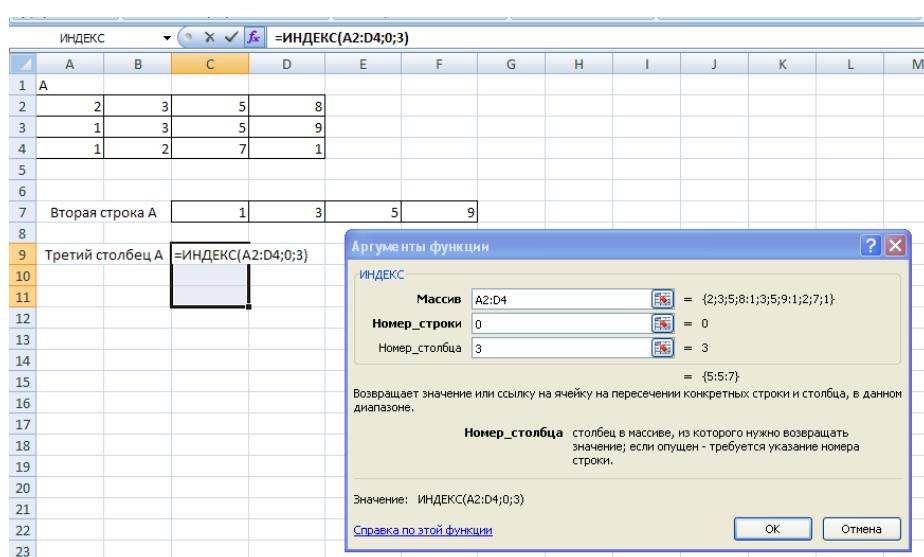
3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию ИНДЕКС и выполнить постановку задачи.



5. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

4. Отметить место для 3 столбца.

5. Обратиться к мастеру функций, найти функцию ИНДЕКС и выполнить постановку задачи.



6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**
6. Отметить место для элемента a_{32} .
7. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **ИНДЕКС** и выполнить постановку задачи.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with data in rows 1-4 and columns A-D. Row 1 contains 'A'. Row 2 contains '2', '3', '5', '8'. Row 3 contains '1', '3', '5', '9'. Row 4 contains '1', '2', '7', '1'. Row 7 is labeled 'Вторая строка А' and contains '1', '3', '5', '9'. Row 9 is labeled 'Третий столбец А' and contains '5', '5', '7'. Row 13 is labeled 'A32=' and contains '2:D4;3;2'. A callout box points to the formula bar with '=ИНДЕКС(A2:D4;3;2)'. A 'Формула' (Formula) bar at the top shows 'Индекс'. A 'Аргументы функции' (Function Arguments) dialog box is open, showing the parameters: 'Массив' (Array) set to 'A2:D4' (value: {2;3;5;8;1;3;5;9;1;2;7;1}), 'Номер_строки' (Row number) set to '3' (value: 3), and 'Номер_столбца' (Column number) set to '2' (value: 2). The result is '2'. The dialog also includes a note: 'Возвращает значение или ссылку на ячейку на пересечении конкретных строки и столбца, в данном диапазоне.' (Returns the value or a reference to the cell at the intersection of the specified row and column in the given range.) and a help link 'Справка по этой функции' (Help on this function). Buttons 'OK' and 'Отмена' (Cancel) are at the bottom.

7. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

The screenshot shows the same Excel spreadsheet as before, but now the formula 'A32=2' has been entered into cell G5. The formula bar at the top shows 'G5' and '=ИНДЕКС(A2:D4;3;2)'. The rest of the spreadsheet and dialog box are identical to the previous screenshot.

СМЕШ(ссылка, смещ_по_строкам, смещ_по_столбцам, [высота], [ширина]) - данная функция возвращает ссылку на диапазон, отстоящий от ячейки или диапазона ячеек на заданное число строк и столбцов. Возвращаемая ссылка может быть отдельной ячейкой или диапазоном ячеек. Можно задавать количество возвращаемых строк и столбцов.

- **Ссылка** - Обязательный. Ссылка, от которой вычисляется смещение. Аргумент "ссылка" должен быть ссылкой на ячейку или на диапазон смежных ячеек, в противном случае функция СМЕШ возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.
- **Смещ_по_строкам** - Обязательный. Количество строк, которые требуется отсчитать вверх или вниз, чтобы левая верхняя ячейка результата ссылалась на нужную ячейку. Например, если в качестве значения аргумента "смещ_по_строкам" задано число 5, это означает, что левая верхняя ячейка возвращаемой ссылки должна быть на пять строк ниже, чем указано в

аргументе "ссылка". Значение аргумента "смещ_по_строкам" может быть как положительным (для ячеек ниже начальной ссылки), так и отрицательным (выше начальной ссылки).

- **Смещ_по_столбцам** - Обязательный. Количество столбцов, которые требуется отсчитать влево или вправо, чтобы левая верхняя ячейка результата ссылалась на нужную ячейку. Например, если в качестве значения аргумента "смещ_по_столбцам" задано число 5, это означает, что левая верхняя ячейка возвращаемой ссылки должна быть на пять столбцов правее, чем указано в аргументе "ссылка". Значение "смещ_по_столбцам" может быть как положительным (для ячеек справа от начальной ссылки), так и отрицательным (слева от начальной ссылки).
- **Высота** - Необязательный. Высота (число строк) возвращаемой ссылки. Значение аргумента "высота" должно быть положительным числом.
- **Ширина** - Необязательный. Ширина (число столбцов) возвращаемой ссылки. Значение аргумента "ширина" должно быть положительным числом.

Примечания

- Если аргументы **Высота** или **Ширина** опущены, то предполагается, что используется такая же высота или ширина, как в аргументе **Ссылка**;
- Аргумент **Ссылка** – это ссылка на область, которая должна быть реальным, а не виртуальным массивом, т.е. находиться где-то на листе.

Пример

1. Задать исходную матрицу.
2. Отметить место для подматрицы (выделена в основной желтым цветом)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	A											
2	2	3	5	8								
3	1	3	5	9								
4	1	2	7	1								
5												
6	=СМЕЩ(A2:D4;0;0;2;2)											
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												

8. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	A							
2	2	3	5	8				
3	1	3	5	9				
4	1	2	7	1				
5								
6	2	3						
7	1	3						
8								

Еще пример:

СМЕШ

=СМЕШ(A2:D4;1;1;2;3)

Аргументы функции

СМЕШ

Ссылка: A2:D4 = {2;3;5;8;1;3;5;9;1;2;7;1}

Смеш_по_строкам: 1 = 1

Смеш_по_столбцам: 1 = 1

Высота: 2 = 2

Ширина: 3 = 3

= Переменное

Возвращает ссылку на диапазон, смещенный относительно заданной ссылки на указанное число строк и столбцов.

Ширина ширина, в столбцах, диапазона результирующей ссылки; если не указана, то равна ширине диапазона исходной ссылки.

Значение: Переменное

Справка по этой функции

OK Отмена

Shift/Ctrl/Enter

A6

=СМЕШ(A2:D4;1;1;2;3)

A	B	C	D	E	F
1	2	3	5	8	
2	1	3	5	9	
3	1	2	7	1	
4					
5					
6	3	5	9		
7	2	7	1		

Часть 2. Системы линейных алгебраических уравнений

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Совокупность уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

относительно неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n называется *системой линейных алгебраических уравнений*.

Числа a_{ij} — *коэффициенты системы*, b_i — *правые части системы* $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

Совокупность коэффициентов системы можно представить в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Совокупность неизвестных системы — в виде вектора столбца:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Используя выше приведенные определения, запишем СЛАУ в **матричном виде**:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (2)$$

Совокупность значений неизвестных, удовлетворяющая *всем уравнениям системы*, называется *решением* системы. Решить СЛАУ значит найти такие значения вектора

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

подстановка которого в систему (1), обращает каждое уравнение этой системы в тождество.

Классификация СЛАУ

- Если число уравнений больше чем число неизвестных, т.е. $n > m$, то СЛАУ называется *переопределенной*.
- Если число уравнений меньше чем число неизвестных, т.е. $n < m$, то СЛАУ называется *недоопределенной*.
- Если число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $n = m$, то СЛАУ называется *нормальной*

- Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, у которой нет решений, называется *несовместной*.
- Каждое решение совместной системы называется *частным решением*. Совокупность всех решений совместной системы называется *общим решением*.
- Если среди правых частей b_i системы есть хоть одна, отличная от нуля, то система называется *неоднородной системой линейных уравнений*.
- Если *все* правые части системы равны нулю, то система называется *однородной*.

Методы решения СЛАУ

СЛАУ несовместна (не имеет решений), если $\det A=0$.

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно разделить на две группы: точные и итерационные:

1. Точные методы позволяют получить решение путем выполнения определённого и точного количества арифметических операций. При этом погрешность решения определяется лишь точностью представления исходных данных и точностью вычислительных операций.
2. Итерационные методы дают некоторую последовательность приближений к решению. Пределом этой последовательности является решение системы уравнений. Решение, возможно, определить лишь с некоторой, как правило, заданной степенью точности ϵ . Количество итераций для достижения требуемой точности решения определяется величиной ϵ , выбором начального приближения и видом системы уравнений.

Метод обратной матрицы.

Систему линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ умножим слева на матрицу, обратную к A^{-1} . Система уравнений примет вид:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow E\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b},$$

(E - единичная матрица).

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Метод Крамера.

В этом случае неизвестные x_1, x_2, \dots, x_n вычисляются по формуле: $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, $i=1\dots n$, где $\det(A)$ – определитель матрицы A ; $\det(A_i)$ – определитель матрицы, получаемой из матрицы A путем замены i -го столбца вектором \vec{b} .

ЗАДАНИЕ №4.

Решение СЛАУ в Excel

Рассмотрим задачу решения СЛАУ на следующем примере

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases} \quad (3)$$

Т.е. будем решать систему из четырех алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных. Размерность системы (3) $n=4$, матрица системы A размерности 4×4 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

а вектор-столбец свободных членов (3): $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

В матричном виде система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Будем решать СЛАУ (3) в среде MS Excel тремя различными способами. Для чего создадим рабочую книгу из трех листов и назовем ее SLAU.xlsx. Поскольку исходные данные для трех различных способов решения (а значит и трех рабочих листов книги) одни и те же (матрица системы A и вектор-столбец свободных членов \vec{b}), то неплохо было бы их одновременно ввести в эти рабочие листы. Excel предоставляет такую возможность. Этот инструмент называется *группировкой* рабочих листов. Для того, чтобы применить средство Группа,

- необходимо выделить группируемые рабочие листы, щелкнув первый рабочий лист (Лист1), на котором будут вводиться данные, а затем, удерживая клавишу **Ctrl**, щелкнуть ярлычки листов (Лист2 и Лист3), куда одновременно должны вводиться те же самые данные.
- Либо, если группируемые рабочие листы расположены подряд, как в нашем случае, при выделенном первом (Лист1) щелкнуть, удерживая нажатой клавишу **Shift**, на ярлычке последнего (Лист3).

После этого можно вводить данные на текущем рабочем листе, они автоматически появятся в одноименных ячейках на всех остальных сгруппированных листах. Признаком группировки нескольких листов является появившееся в строке заголовка слово [Группа] ([Group]), заключенное в квадратные скобки (рис.1).

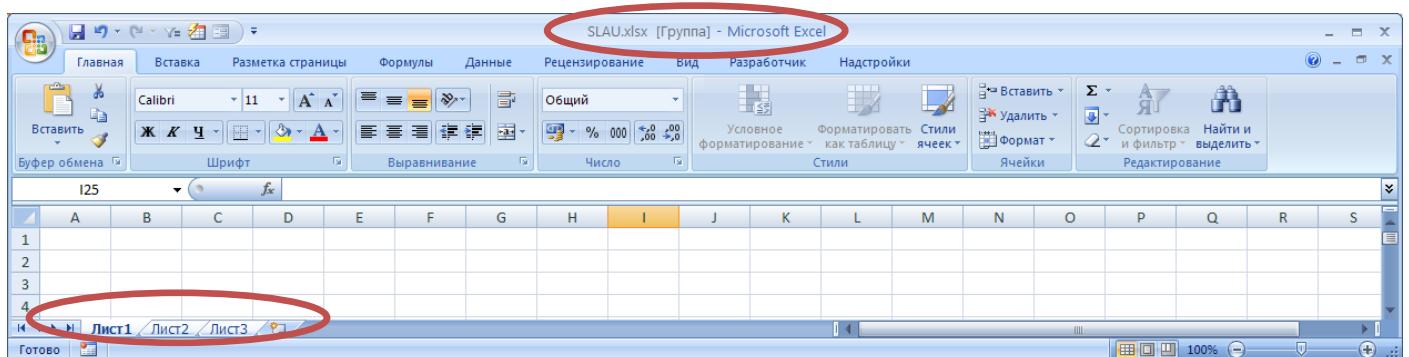


Рис. 1. Группировка рабочих листов

Для решения рассматриваемой СЛАУ (3)

- сгруппируем листы (Лист1 : Лист3),
- разместим в ячейках текущего листа (Лист1) A1:E2, A8:A12 соответствующие поясняющие тексты (заголовки),
- в интервале A3:D6 – элементы матрицы A ,
- в интервале E3:E6 – элементы вектора \vec{b} .
- Интервал B9:B12 зарезервируем под искомое решение – вектор \vec{x} .

После этих манипуляций все три рабочих листа примут одинаковый вид. После ввода группировку необходимо отменить. Для отмены необходимо выбрать любой из листов, не входящих в группу, либо щелкнуть правой кнопкой мыши на любом ярлычке листа из группы и выполнить команду Разгруппировать листы. (рис. 2)

Матрица A				Столбец B			
1,00	1,00	2,00	1,00	1,00			
3,00	-1,00	-1,00	-2,00	-4,00			
2,00	3,00	-1,00	-1,00	-6,00			
1,00	2,00	3,00	-1,00	-4,00			

Рис. 2. Рабочие листы, после ввода исходных данных.

1. Метод обратной матрицы.

Систему линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ умножим слева на матрицу, обратную к A^{-1} , вектор неизвестных вычисляется по формуле $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

- Переименовать Лист 1 в “Матричный метод”.
- Объединить ячейки A14: D14 и разместить поясняющий текст: Обратная матрица к А.
- Выделить диапазон A15:E18 под значения обратной матрицы
- Обратиться к мастеру функций, найти функцию **МОБР** (рис. 3)

СЛАУ $Ax = b$, при $n=4$

1,00	1,00	2,00	1,00	1,00
3,00	-1,00	-1,00	-2,00	-4,00
2,00	3,00	-1,00	-1,00	-6,00
1,00	2,00	3,00	-1,00	-4,00

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Решение Х

x1=	
x2=	
x3=	
x4=	

Обратная матрица к А

0,36	0,23	0,05	-0,15
-0,04	-0,17	0,25	0,05
0,08	0,01	-0,17	0,23
0,52	-0,08	0,04	-0,36

Рис.3.

- Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

СЛАУ $Ax = b$, при $n=4$

1,00	1,00	2,00	1,00	1,00
3,00	-1,00	-1,00	-2,00	-4,00
2,00	3,00	-1,00	-1,00	-6,00
1,00	2,00	3,00	-1,00	-4,00

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Решение Х

x1=	
x2=	
x3=	
x4=	

Обратная матрица к А

0,36	0,23	0,05	-0,15
-0,04	-0,17	0,25	0,05
0,08	0,01	-0,17	0,23
0,52	-0,08	0,04	-0,36

Рис.4

- Выделить диапазон B9:B12, найти решение системы, воспользовавшись функцией МУМНОЖ.

Решение СЛАУ $Ax=B$, при $n=4$

Матрица A Столбец B

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Матричный метод

Решение Х

Обратная матрица к A

0,36	0,23	0,05	-0,15
-0,04	-0,17	0,25	0,05
0,08	0,01	-0,17	0,23
0,52	-0,08	0,04	-0,36

Рис.5

➤ Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

Решение СЛАУ $Ax=B$, при $n=4$

Матрица A Столбец B

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Матричный метод

Решение Х

-0,28
-1,08
0,16
2,04

Обратная матрица к A

0,36	0,23	0,05	-0,15
-0,04	-0,17	0,25	0,05
0,08	0,01	-0,17	0,23
0,52	-0,08	0,04	-0,36

Рис.6

Предложим более универсальную реализацию матричного метода. Для этого будем использовать мегаформулу

ЕСЛИ(МОПРЕД(А3:D6)<>0;МУМНОЖ(МОБР(А3:D6);Е3:E6);"Решения нет"),

которая объединяет все предыдущие шаги и содержит проверку на условие совместности системы (неравенство определителя матрицы A нулю).

- Введем в ячейку C8 поясняющий текст : Мегаформула.
- Выделим диапазон C9:C12 и введем формулу

Рис.7

- Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

Рис.8

- Проверка решения: умножим матрицу A вектор-столбец \vec{x}

SLAU.xlsx - Microsoft Excel

МУМНОЖ

=МУМНОЖ(A3:D6;C9:C12)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R				
1	Решение СЛАУ $AX=B$, при $n=4$																				
2	Матрица A				Столбец B				Проверка												
3	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00																
4	3,00	-1,00	-1,00	-2,00	-4,00																
5	2,00	3,00	-1,00	-1,00	-6,00																
6	1,00	2,00	3,00	-1,00	-4,00																
7																					
8	Решение X				Мегаформула				Аргументы функции												
9	x1=	-0,28		-0,28																	
10	x2=	-1,08		-1,08																	
11	x3=	0,16		0,16																	
12	x4=	2,04		2,04																	
13																					
14	Обратная матрица k_A																				
15	0,36	0,23	0,05	-0,15																	
16	-0,04	-0,17	0,25	0,05																	
17	0,08	0,01	-0,17	0,23																	
18	0,52	-0,08	0,04	-0,36																	
19																					
20																					
21																					
22																					
23																					
24																					
25																					
26																					
27																					

Матричный метод Метод Крамера Лист3

Правка

➤ Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

SLAU.xlsx - Microsoft Excel

G3

=МУМНОЖ(A3:D6;C9:C12)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R				
1	Решение СЛАУ $AX=B$, при $n=4$																				
2	Матрица A				Столбец B				Проверка												
3	1,00	1,00	2,00	1,00	1,00																
4	3,00	-1,00	-1,00	-2,00	-4,00																
5	2,00	3,00	-1,00	-1,00	-6,00																
6	1,00	2,00	3,00	-1,00	-4,00																
7																					
8	Решение X				Мегаформула				Аргументы функции												
9	x1=	-0,28		-0,28																	
10	x2=	-1,08		-1,08																	
11	x3=	0,16		0,16																	
12	x4=	2,04		2,04																	
13																					
14	Обратная матрица k_A																				
15	0,36	0,23	0,05	-0,15																	
16	-0,04	-0,17	0,25	0,05																	
17	0,08	0,01	-0,17	0,23																	
18	0,52	-0,08	0,04	-0,36																	
19																					
20																					
21																					
22																					
23																					
24																					
25																					
26																					
27																					

Матричный метод Метод Крамера Лист3

Готово

Среднее: -3,25 Количество: 1

Матричная алгебра.docx - Microsoft Word

ЗАДАНИЕ №5.

Метод Крамера

Решение СЛАУ находится по формулам Крамера

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_3)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_4)}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

где $\det(A)$ – определитель матрицы системы (3) (главный определитель), $\det(A_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) – определители матриц A_i (вспомогательные определители), которые получаются из A заменой i -го столбца на столбец свободных членов B . Для рассматриваемой СЛАУ (3) вспомогательные матрицы имеют следующий вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Переименовать Лист 2 в Метод Крамера
- Ввести вспомогательные матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 .
 - Объединить ячейки A14:D14, ввести текст A1;
 - Выделить диапазон A15:A18, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter
 - Выделить диапазон B15:D18, ввести формулу =B3:D6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter
 - Объединить ячейки F14:I14, ввести текст A2;
 - Выделить диапазон F15:F18, ввести формулу =A3:A6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter.
 - Выделить диапазон G15:G18, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter.
 - Выделить диапазон H15:I18, ввести формулу =C3:D6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter
 - Объединить ячейки A21:D21, ввести текст A3;
 - Выделить диапазон C22:C25, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter

- Выделить диапазон A22:B25, ввести формулу =A3:B6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter
- Выделить диапазон D22:D25, ввести формулу =D3:D6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter
- Объединить ячейки F21:I21, ввести текст A4;
 - Выделить диапазон F22:H25, ввести формулу =A3:C6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter.
 - Выделить диапазон I22:I25, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter.

Решение СЛАУ $Ax=B$, при $n=4$

Матрица A				Столбец B	Проверка
1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$
3,00	-1,00	-1,00	-2,00	-4,00	$3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$
2,00	3,00	-1,00	-1,00	-6,00	$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6$
1,00	2,00	3,00	-1,00	-4,00	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4$

Решение X

$x_1 =$	
$x_2 =$	
$x_3 =$	
$x_4 =$	

A1				A2			
1,00	1,00	2,00	1,00	1,00	1,00	2,00	1,00
-4,00	-1,00	-1,00	-2,00	3,00	-4,00	-1,00	-2,00
-6,00	3,00	-1,00	-1,00	2,00	-6,00	-1,00	-1,00
-4,00	2,00	3,00	-1,00	1,00	-4,00	3,00	-1,00

A3				A4			
1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2,00	1,00
3,00	-1,00	-4,00	-2,00	3,00	-1,00	-1,00	-4,00
2,00	3,00	-6,00	-1,00	2,00	3,00	-1,00	-6,00
1,00	2,00	-4,00	-1,00	1,00	2,00	3,00	-4,00

Этот способ заполнения ячеек делает проектируемую таблицу универсальной в том смысле, что можно будет изменять только исходные данные (матрицу системы A в интервале A3:D6 и вектор-столбец свободных членов в E3:E6), а все остальное (в том числе и решение СЛАУ) будет автоматически вычисляться.

- Найти определители матриц: $\det(A)$, $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$, $\det(A_4)$. Для этого заполнить диапазон E8:F12 следующим образом:

E	F
8 $\det(A)=$	=МОПРЕД(A3:D6)
9 $\det(A_1)=$	=МОПРЕД(A15:D18)
10 $\det(A_2)=$	=МОПРЕД(F15:I18)
11 $\det(A_3)=$	=МОПРЕД(A22:D25)
12 $\det(A_4)=$	=МОПРЕД(F22:I25)

- Осталось по формулам Крамера найти решение системы (3). Соответствующие формулы Excel запишем в интервал решения B9:B12,

8	Решение X	
9	$x_1 =$	=ЕСЛИ(F8<>0; F9/\$F\$8;"Решения нет")
10	$x_2 =$	=ЕСЛИ(F9<>0; F10/\$F\$8)
11	$x_3 =$	=ЕСЛИ(F10<>0; F11/\$F\$8)
12	$x_4 =$	=ЕСЛИ(F11<>0; F12/\$F\$8)

в котором и увидим результат. Обратите внимание на то, что при вычислении x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) анализируется значение определителя матрицы системы A , вычисленное в ячейке F8, и, если оно равно нулю (система несовместна), то в B9 помещается текст Решения нет, а в ячейки B10:B12 – пустые строки.

➤ Сделать проверку как в предыдущем примере.

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "SLAU.xlsx". The main content is as follows:

- Row 1:** A header row with formulas for calculating the solution components based on the determinant of matrix A (F8) and the elements of matrix B (F9 to F12).
- Row 2:** A row for "Решение X" (Solution X) containing the calculated values: x1=-0,28, x2=-1,08, x3=0,16, x4=2,04.
- Row 3:** A row for "Матрица A" (Matrix A) with values: 1,00, 1,00, 2,00, 1,00; -1,00, -1,00, -2,00, -4,00; 3,00, -1,00, -1,00, -6,00; 2,00, 3,00, -1,00, -4,00.
- Row 4:** A row for "Столбец B" (Column B) with values: 1,00, -4,00, -6,00, -4,00.
- Row 5:** A row for "Проверка" (Verification) with values: 1,00, -4,00, -6,00, -4,00.
- Row 6:** A row for "det(A)= -75" (Determinant of A = -75).
- Row 7:** A blank row.
- Row 8:** A header row for "Решение X" (Solution X) with formulas for calculating the solution components based on the determinant of matrix A (A1) and the elements of matrix B (A2 to A4).
- Row 9:** A row for "x1=" with formula =-0,28.
- Row 10:** A row for "x2=" with formula =-1,08.
- Row 11:** A row for "x3=" with formula =0,16.
- Row 12:** A row for "x4=" with formula =2,04.
- Row 13:** A blank row.
- Row 14:** A header row for "A1" and "A2" with matrix values: 1,00, 1,00, 2,00, 1,00; -4,00, -1,00, -2,00, -2,00; -6,00, 3,00, -1,00, -6,00; -4,00, 2,00, 3,00, -1,00.
- Row 15:** A header row for "A3" and "A4" with matrix values: 1,00, 1,00, 1,00, 1,00; 3,00, -1,00, -1,00, -4,00; 2,00, 3,00, -1,00, -6,00; 1,00, 2,00, 3,00, -4,00.
- Row 16:** A blank row.
- Row 17:** A blank row.
- Row 18:** A blank row.
- Row 19:** A blank row.
- Row 20:** A blank row.
- Row 21:** A blank row.
- Row 22:** A blank row.
- Row 23:** A blank row.
- Row 24:** A blank row.
- Row 25:** A blank row.
- Row 26:** A blank row.
- Row 27:** A blank row.

ЗАДАНИЕ №6.

Пример. Поворот фигуры на плоскости.

В двумерном пространстве поворот точки (x_0, y_0) относительно начала системы координат можно описать одним углом φ со следующей матрицей линейного преобразования в декартовой системе координат:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Поворот выполняется путём умножения матрицы поворота на вектор-столбец, описывающий вращаемую точку:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Таким образом, при повороте точки в правой декартовой системе координат с координатами (x_0, y_0) на угол φ , пересчет координат этой точки выполняется по формулам:

$$x = x_0 \cos(\varphi) - y_0 \sin(\varphi)$$

$$y = x_0 \sin(\varphi) + y_0 \cos(\varphi)$$

- Пусть на плоскости задан треугольник с вершинами $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$, $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$, $(x_0^{(3)}, y_0^{(3)})$.

Построить его поворот на угол φ , т.е. необходимо найти новые координаты вершин треугольника $(x^{(1)}, y^{(1)})$, $(x^{(2)}, y^{(2)})$, $(x^{(3)}, y^{(3)})$ по формулам (*).

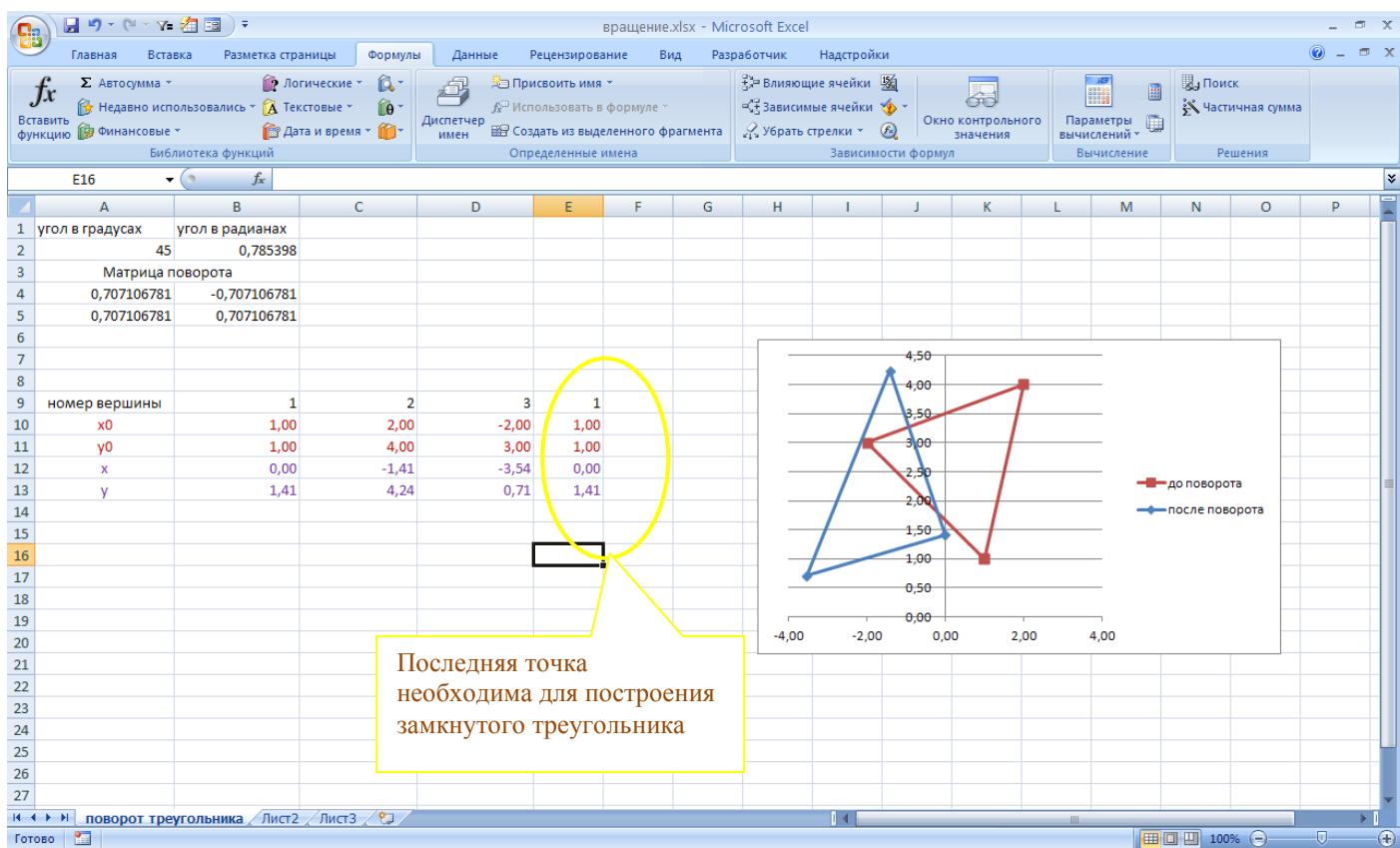
Решение задачи с использованием матричных функций представлено на рабочем листе в режиме формул:

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "вращение.xlsx - Microsoft Excel". The formula bar at the top displays "E16" and the formula $=A2^{\circ}\text{ПИ()}/180$. The main area contains a table with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G
1	угол в градусах	угол в радианах					
2	45	$=A2^{\circ}\text{ПИ()}/180$					
3	Матрица поворота						
4	$=\text{COS}(\$B\$2)$	$=-\text{SIN}(\$B\$2)$					
5	$=\text{SIN}(\$B\$2)$	$=\text{COS}(\$B\$2)$					
6							
7							
8							
9	номер вершины	1	2	3	1		
10	x0	1	2	-2	=B10		
11	y0	1	4	3	=B11		
12	x	$=\text{МУМНОЖ}(\$A\$4:\$B\$5;B10:B11)$	$=\text{МУМНОЖ}(\$A\$4:\$B\$5;C10:C11)$	$=\text{МУМНОЖ}(\$A\$4:\$B\$5;D10:D11)$	=B12		
13	y	$=\text{МУМНОЖ}(\$A\$4:\$B\$5;B10:B11)$	$=\text{МУМНОЖ}(\$A\$4:\$B\$5;C10:C11)$	$=\text{МУМНОЖ}(\$A\$4:\$B\$5;D10:D11)$	=B13		
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							

The status bar at the bottom shows "поворот треугольника Лист2 / Лист3" and "Готово".

И в обычном режиме



2. После поворота четырехугольника на угол φ его вершины стали $(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), (x^{(3)}, y^{(3)}), (x^{(4)}, y^{(4)})$. Найти исходные вершины $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}), (x_0^{(2)}, y_0^{(2)}), (x_0^{(3)}, y_0^{(3)}), (x_0^{(4)}, y_0^{(4)})$.

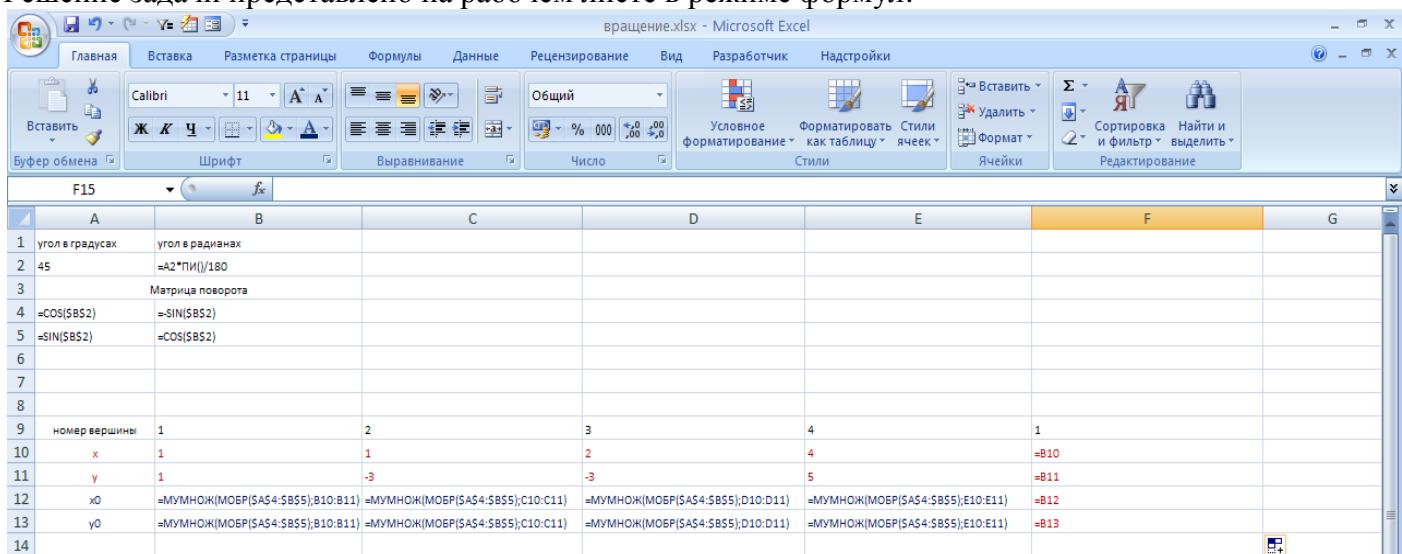
Исходные вершины можно найти, разрешив СЛАУ относительно неизвестных $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)})$, $i=1,2,3,4$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(i)} \\ y_0^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \end{pmatrix}$$

Т.е., например, методом обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} x_0^{(i)} \\ y_0^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \end{pmatrix}$$

Решение задачи представлено на рабочем листе в режиме формул:



И в обычном режиме

