Практическое занятие № 3

Оглавление

Часть 1. Матричная алгебра

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например *A, B, C,…,* а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, *i*–номер строки, *j*–номер столбца. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей. Матрица, у которой *m*=*n*, т. е. число строк равно числу столбцов, называется квадратной. Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер строки (*i*=*j*) равен номеру столбца, называются диагональными и образуют главную диагональ. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Если все не диагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется диагональной Если у диагональной матрицы *n*-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется единичной, обозначается буквой *E*. Например, единичная матрица третьего порядка:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей (вектор)–строкой, а из одного столбца матрицей (вектор)–столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами. К простейшим операциям с матрицами принято относить следующие: сложение и вычитание матриц, умножение и деление матрицы на число, перемножение матриц, транспонирование, вычисление обратной матрицы.

1. **Сложение матриц.** Суммой двух матриц *A* и *B* одинакового размера $m \times n$ называется матрица *C*, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц *A* и *B*, *i=1,…,m*; *j=1,…,n*. Матрицы складываются поэлементно. Например:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i = 1...m,\ j = 1...n$$

2. **Умножение матрицы на число.** Произведением матрицы A на число l называется матрица B, которая получается из матрицы A умножением всех ее элементов на l, т.е.

$$B = \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. **Вычитание матриц.** Разность двух матриц, одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1)B$.
4. **Умножение матриц.** Операция умножения двух матриц выполнима только в том случае, если число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором; в этом случае говорят, что форма матриц *согласована*. В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка.
5. **Транспонирование матриц** – переход от матрицы A к матрице, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.
6. Квадратную матрицу A порядка n можно сопоставить с числом det$A$ (или $|A|$, или Δ_A), называемым определителем или детерминантом.
7. **Обратная матрица** — такая матрица A^{-1}, при умножении на которую, исходная матрица A даёт в результате единичную матрицу E: $AA^{-1} = A^{-1}A = E.$ Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная, то есть её определитель не равен нулю. Для неквадратных матриц и вырожденных матриц обратных матриц не существует

МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ В EXCEL

Табличные формулы или *формулы массива* – очень мощное вычислительное средство Excel, позволяющее работать с блоками рабочего листа как с отдельными ячейками. Табличные формулы в качестве результата возвращают массив значений. Поэтому перед вводом такой формулы необходимо выделить диапазон ячеек, куда будут помещены результаты. Потом набирается сама формула. Ввод ее в выделенный диапазон ячеек осуществляется нажатием комбинации клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. **Это принципиально**. Формула вводится во все ячейки выделенного интервала. При активизации любой ячейки из интервала, содержащего формулу массива, в строке формул отображается введенная формула, заключенная в *фигурные скобки*. Именно фигурные скобки являются признаком табличной формулы. Для выделения всего блока, содержащего табличную формулу, необходимо выделить одну из его ячеек, после чего нажать комбинацию клавиш **Ctrl+/**. Невозможно редактировать содержимое только одной ячейки из интервала с табличной формулой. Изменить можно только весь блок целиком, для чего он и должен быть предварительно выделен.

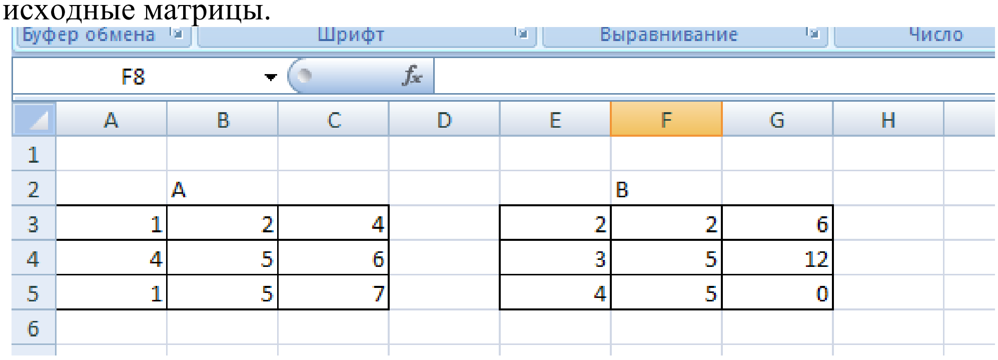
Умножение (деление) матрицы на число, сложение (вычитание) матриц в Excel реализуются достаточно просто: с помощью обычных формул (поэлементное сложение или вычитание, умножение или деление на число), либо с использованием табличных формул. Для остальных матричных операций в Excel предусмотрены функции рабочего листа из категории «Математические функции»:

1. **МОПРЕД(***массив***)** – вычисление определителя матрицы,
2. **МОБР(***массив***)** – вычисление обратной матрицы,
3. **МУМНОЖ(***массив1; массив 2***)** – произведение матриц,
4. **ТРАНСП(***массив***)** – транспонирование матрицы.

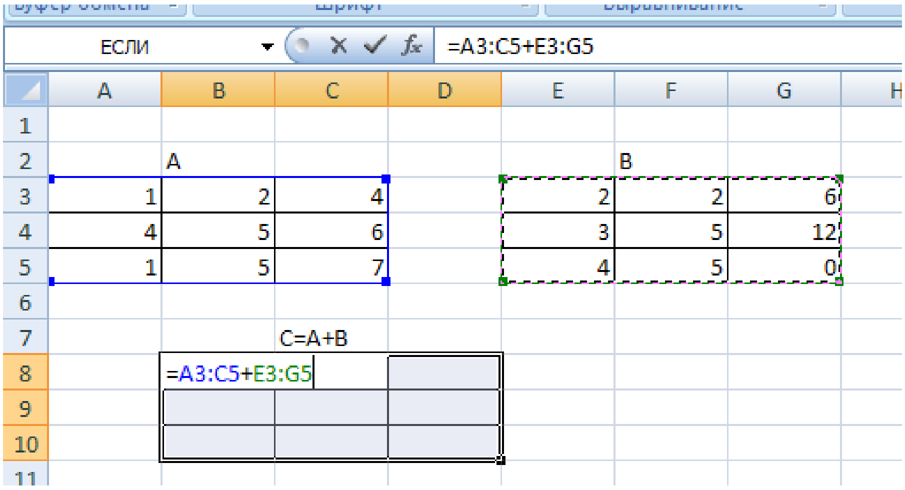
ЗАДАНИЕ №1.

Для **сложения двух матриц в MS Excel** одинаковой размерности следует выполнить следующую последовательность действий:

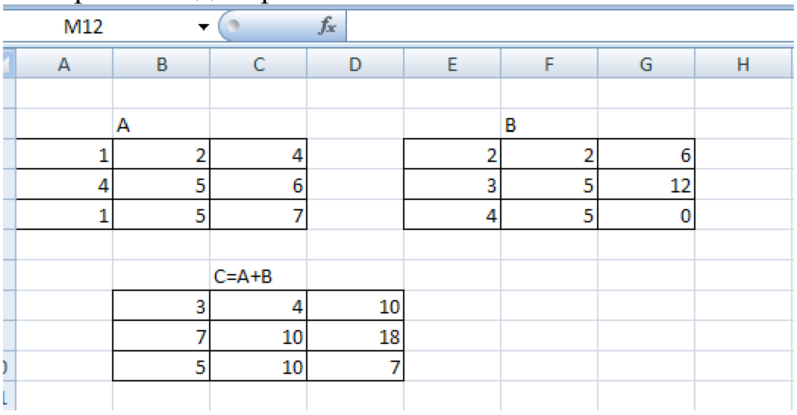
1. Задать две исходные матрицы.



2. Отметить место для матрицы-результата.
3. В выделенном месте под результат поставить знак равенства и записать сумму так, как показано на рис.

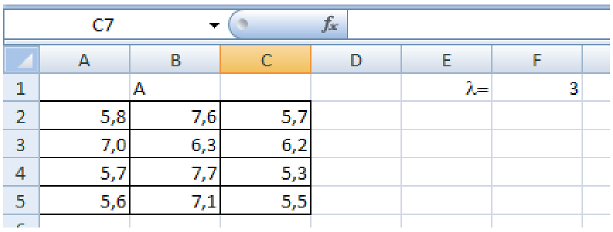


4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

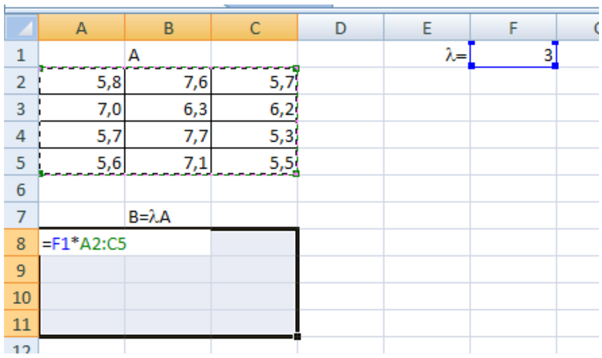


Для умножения матрицы на число в MS Excel следует выполнить следующие действия:

1. Задать исходную матрицу. Ввести число λ



2. Отметить место для матрицы-результата.
3. В выделенном под результат месте электронной таблицы записать произведение так, как показано на рис.

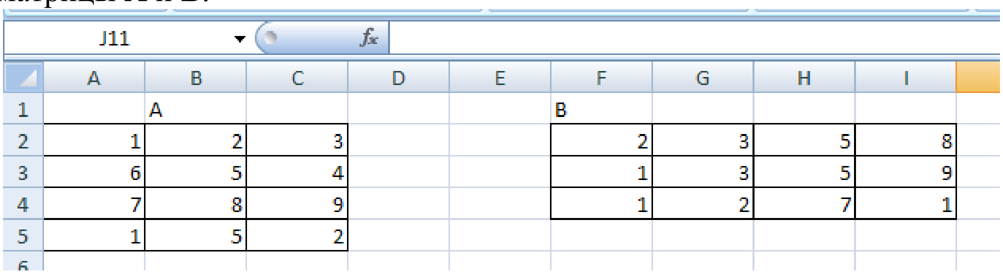


4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

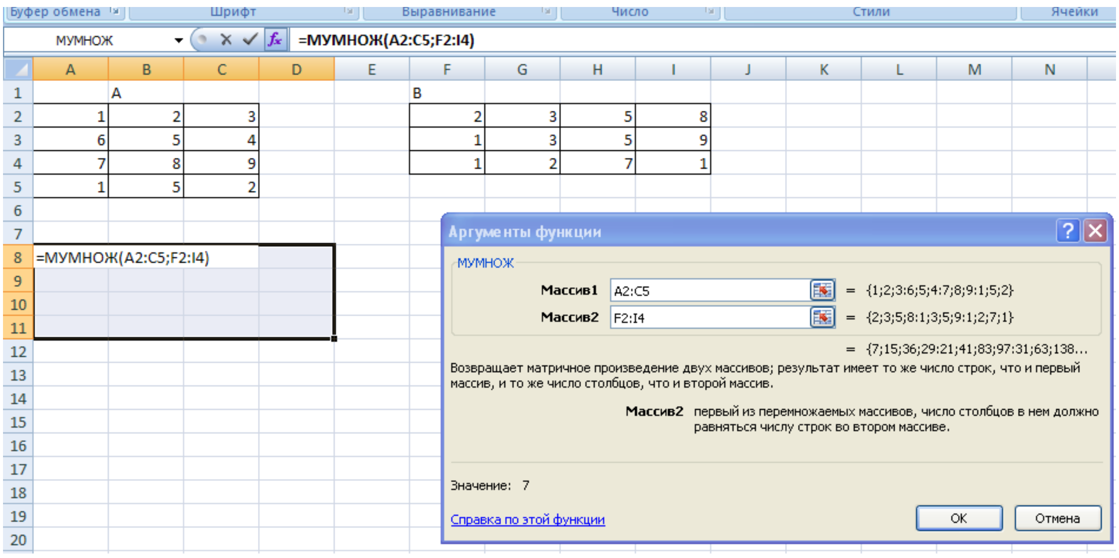
Умножение матриц в MS Excel. **Умножение матриц *A* и *B* возможно, если число столбцов матрицы *A* совпадает с числом строк матрицы *B*.**

Выполним следующую последовательность действий:

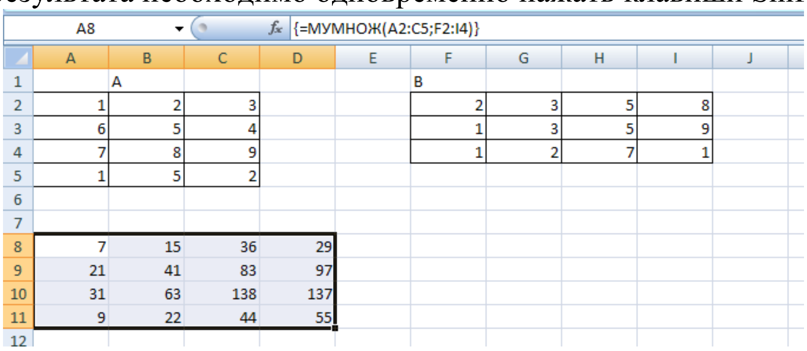
1. Зададим матрицы А и В.



2. Отметим место под матрицу-результат.
3. Обратимся к мастеру функций, найдем функцию **МУМНОЖ** и выполним постановку задачи так, как показано на рис. В качестве массива 1 указываем диапазон адресов матрицы А, а в качестве массива 2 – диапазон адресов матрицы В.



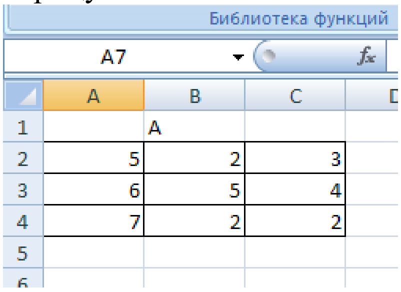
4. Для получения результата необходимо одновременно нажать клавиши Shift/Ctrl/Enter



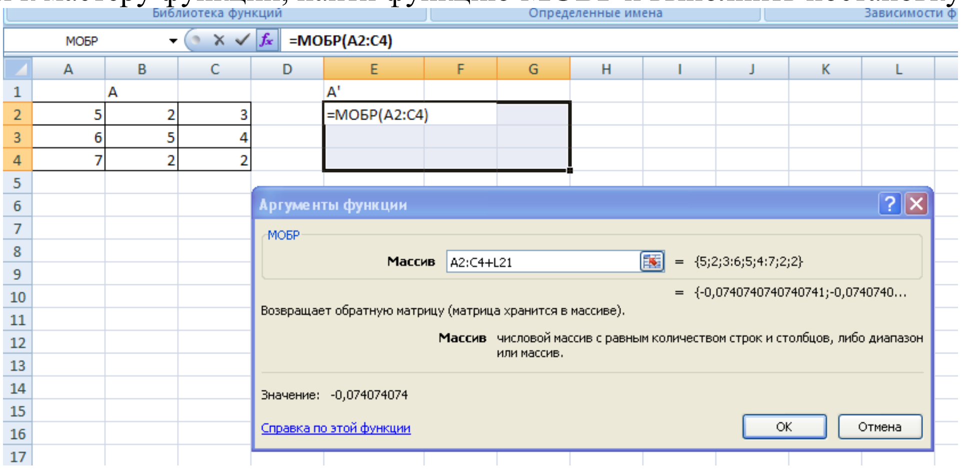
ЗАДАНИЕ №2.

Вычисление обратной матрицы в MS Excel. **Работу с матричной функцией** МОБР **в MS Excel следует выполнять в следующем порядке:**

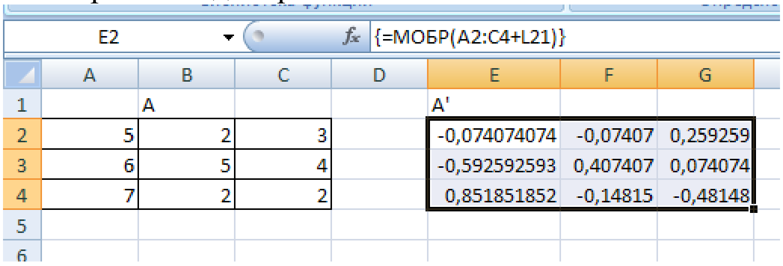
1. Задать исходную квадратную матрицу.



2. Отметить место для матрицы-результата.
3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **МОБР** и выполнить постановку задачи

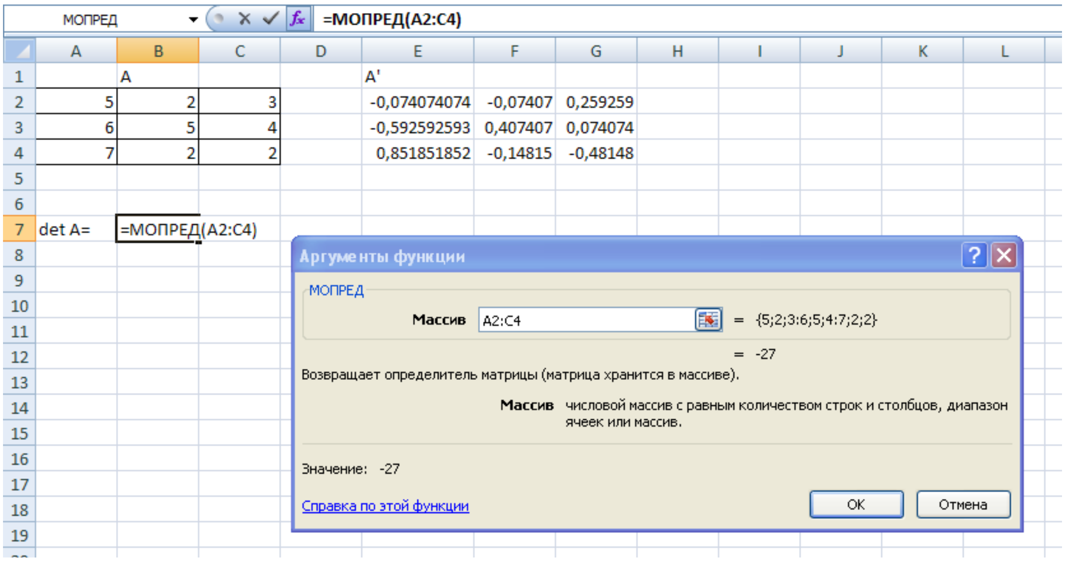


4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

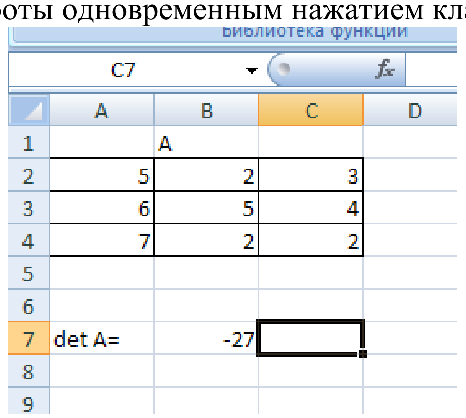


Вычисление определителя матрицы в MS Excel. **Для вычисления определителя матрицы сформируем лист электронной таблицы MS Excel:**

1. Определим исходную матрицу.
2. Определим место под результат.
3. Обратимся к мастеру функций, найдем функцию **МОПРЕД** , выполним постановку задачи.

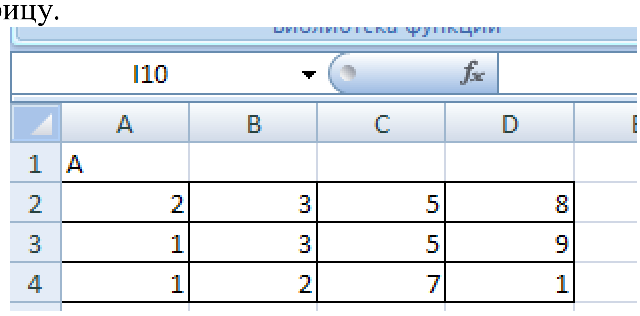


4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

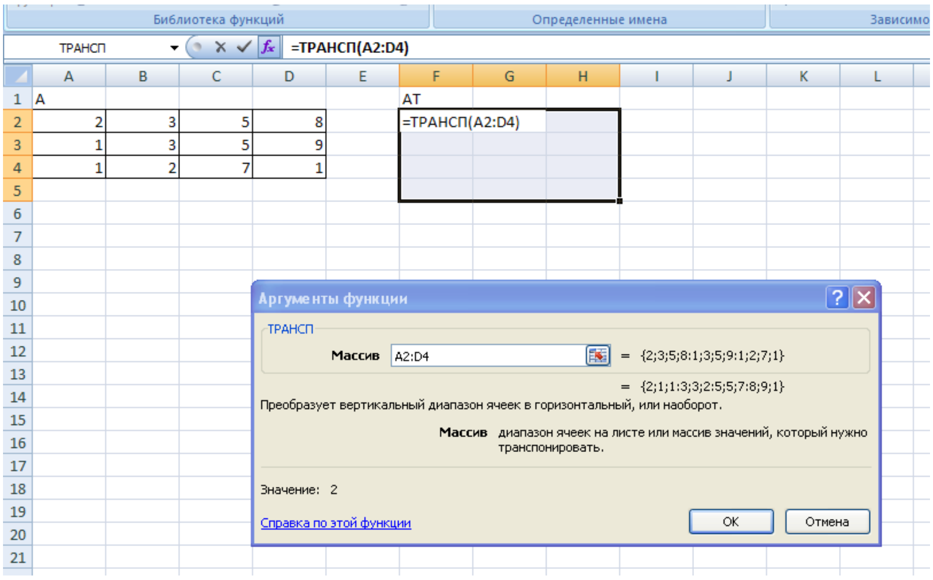


Транспонирование матрицы в MS Excel. **Работу с матричной функцией** ТРАНСП **в MS Excel следует выполнять в следующем порядке:**

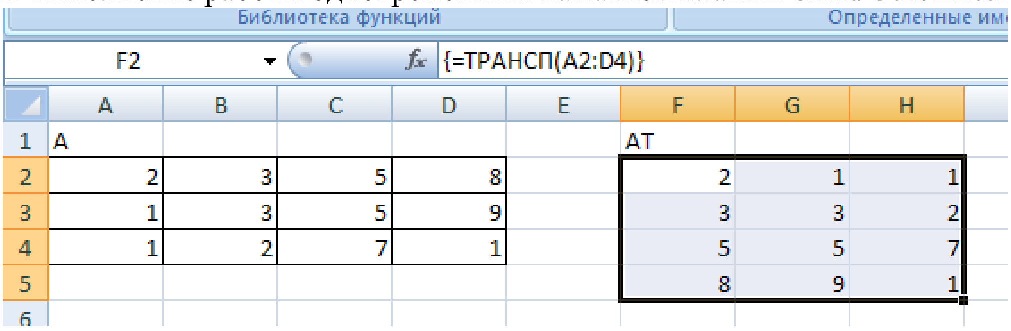
1. Задать исходную матрицу.



2. Отметить место для матрицы-результата.
3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **ТРАНСП** и выполнить постановку задачи.



4. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**



ЗАДАНИЕ №3.

Доступ к частям матрицы

Для доступа и отделения частей матрицы применяются две стандартные функции листа: **ИНДЕКС и СМЕЩ**

ИНДЕКС(массив, номер_строки, [номер_столбца]) - Возвращает значения элементов в массиве, выбранных с помощью индексов строк и столбцов.

- **Массив** — обязательный аргумент. Диапазон ячеек или константа массива.
  - Если массив содержит только одну строку или один столбец, аргумент "номер_строки" или "номер_столбца" соответственно не является обязательным.
  - Если массив занимает больше одной строки и одного столбца, а из аргументов "номер_строки" и "номер_столбца" задан только один, то функция ИНДЕКС возвращает массив, состоящий из целой строки или целого столбца аргумента "массив".
- **Номер_строки** — обязательный аргумент. Номер строки в массиве, из которой требуется возвратить значение. Если аргумент "номер_строки" опущен, аргумент "номер_столбца" является обязательным.
- **Номер_столбца** — необязательный аргумент. Номер столбца в массиве, из которого требуется возвратить значение. Если аргумент "номер_столбца" опущен, аргумент "номер_строки" является обязательным.

Замечания

- Если используются оба аргумента — и "номер_строки", и "номер_столбца", — то функция ИНДЕКС возвращает значение, находящееся в ячейке на пересечении указанных строки и столбца.
- Если указать в качестве аргумента "номер_строки" или "номер_столбца" значение 0, функция ИНДЕКС возвратит массив значений для целого столбца или целой строки соответственно. Чтобы использовать значения, возвращенные как массив, введите функцию ИНДЕКС как

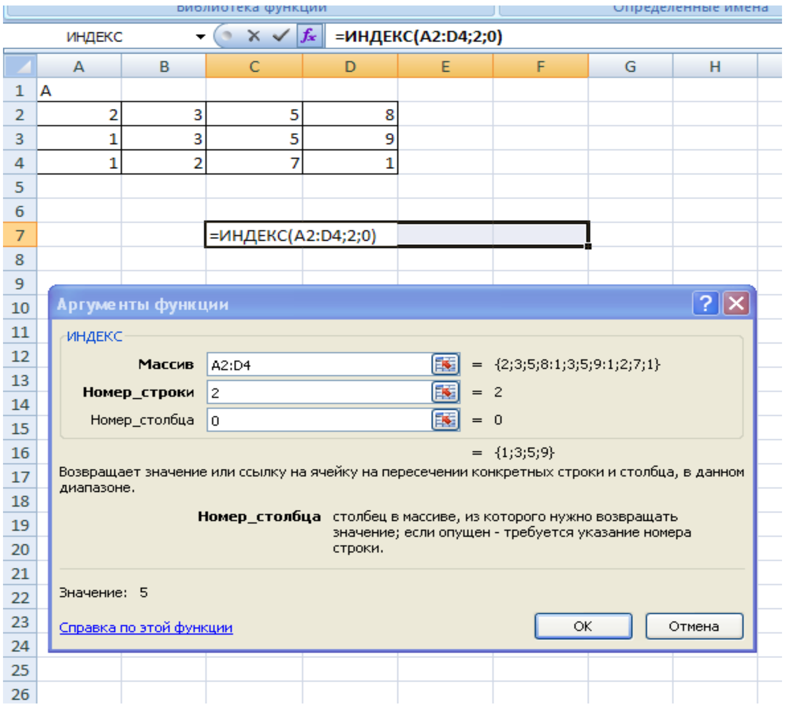
формулу массива в горизонтальный диапазон ячеек для строки и в вертикальный — для столбца. Чтобы ввести формулу массива, нажмите сочетание клавиш **CTRL+SHIFT+ENTER.**

- Аргументы "номер_строки" и "номер_столбца" должны указывать на ячейку внутри заданного массива, в противном случае функция ИНДЕКС возвратит значение ошибки #ССЫЛ!.

Пример

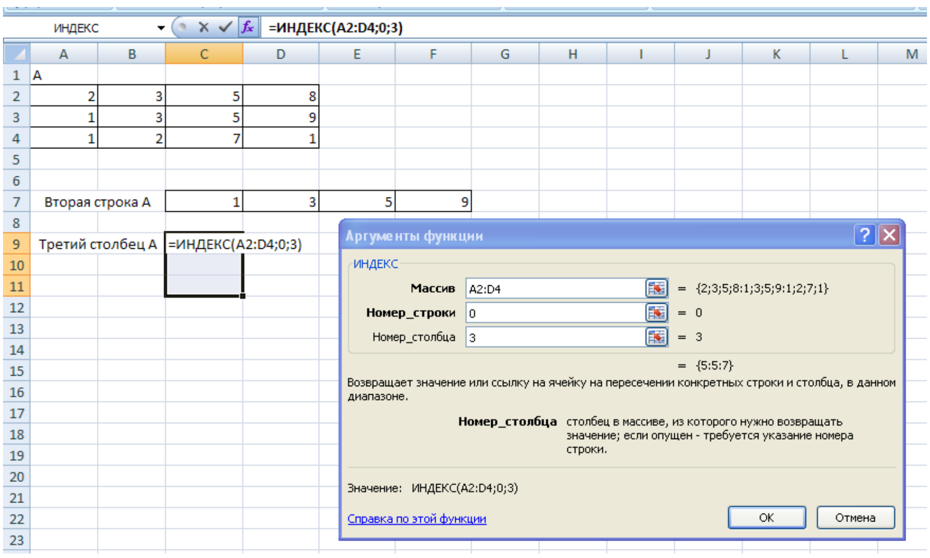
Выберем из исходной матрицы 2 строку; 3 столбец и элемент a_{32} с помощью функции **ИНДЕКС**

1. Задать исходную матрицу.
2. Отметить место для 2 строки.
3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **ИНДЕКС** и выполнить постановку задачи.

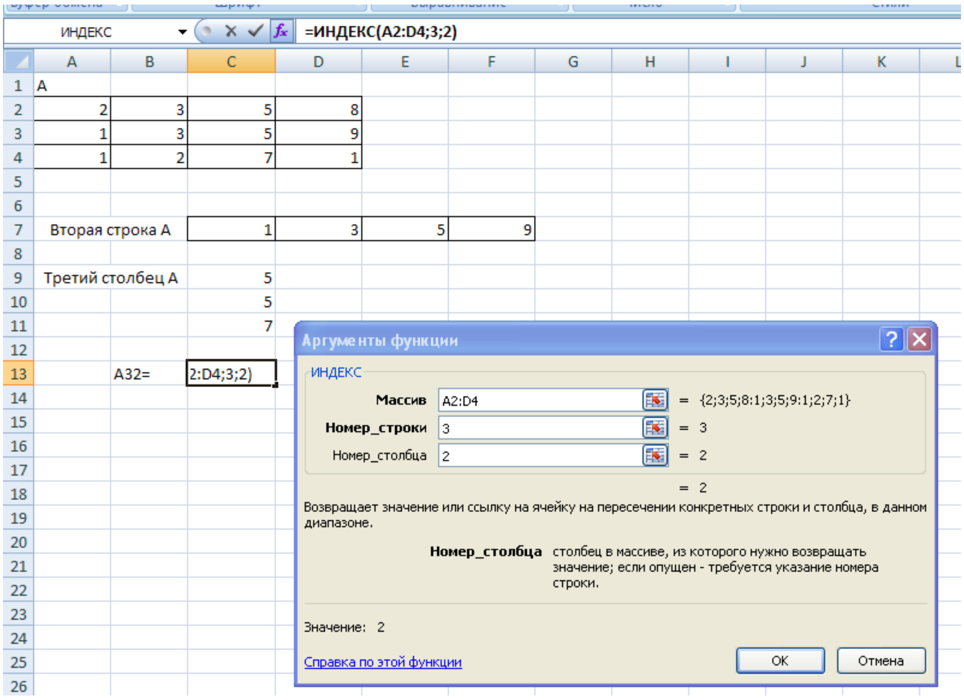


5. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

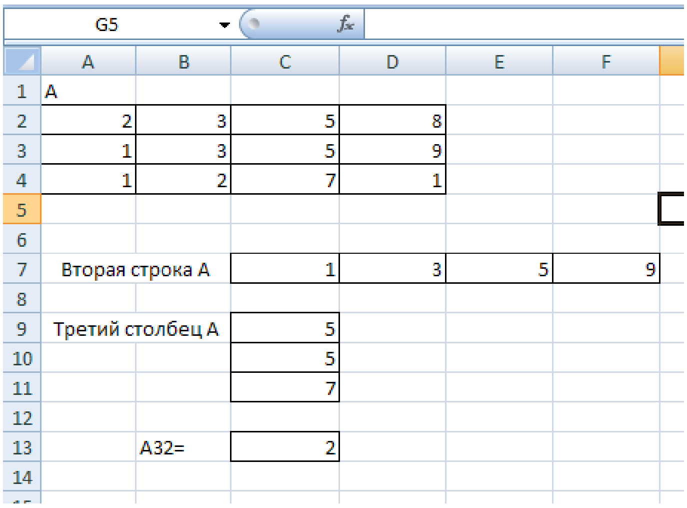
4. Отметить место для 3 столбца.
5. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **ИНДЕКС** и выполнить постановку задачи.



6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**
6. Отметить место для элемента a_{32} .
7. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **ИНДЕКС** и выполнить постановку задачи.



7. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**



СМЕЩ(ссылка, смещ_по_строкам, смещ_по_столбцам, [высота], [ширина]) - данная функция возвращает ссылку на диапазон, отстоящий от ячейки или диапазона ячеек на заданное число строк и столбцов. Возвращаемая ссылка может быть отдельной ячейкой или диапазоном ячеек. Можно задавать количество возвращаемых строк и столбцов.

- **Ссылка** - Обязательный. Ссылка, от которой вычисляется смещение. Аргумент "ссылка" должен быть ссылкой на ячейку или на диапазон смежных ячеек, в противном случае функция СМЕЩ возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.
- **Смещ_по_строкам** - Обязательный. Количество строк, которые требуется отсчитать вверх или вниз, чтобы левая верхняя ячейка результата ссылалась на нужную ячейку. Например, если в качестве значения аргумента "смещ_по_строкам" задано число 5, это означает, что левая верхняя ячейка возвращаемой ссылки должна быть на пять строк ниже, чем указано в

аргументе "ссылка". Значение аргумента "смещ_по_строкам" может быть как положительным (для ячеек ниже начальной ссылки), так и отрицательным (выше начальной ссылки).

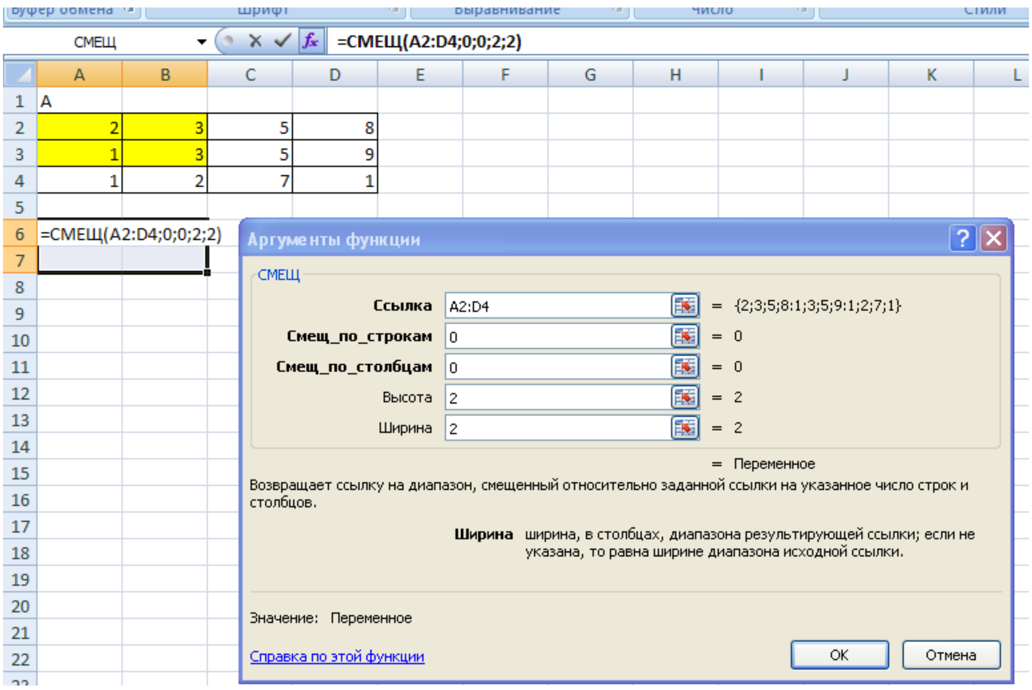
- **Смещ_по_столбцам** - Обязательный. Количество столбцов, которые требуется отсчитать влево или вправо, чтобы левая верхняя ячейка результата ссылалась на нужную ячейку. Например, если в качестве значения аргумента "смещ_по_столбцам" задано число 5, это означает, что левая верхняя ячейка возвращаемой ссылки должна быть на пять столбцов правее, чем указано в аргументе "ссылка". Значение "смещ_по_столбцам" может быть как положительным (для ячеек справа от начальной ссылки), так и отрицательным (слева от начальной ссылки).
- **Высота** - Необязательный. Высота (число строк) возвращаемой ссылки. Значение аргумента "высота" должно быть положительным числом.
- **Ширина** - Необязательный. Ширина (число столбцов) возвращаемой ссылки. Значение аргумента "ширина" должно быть положительным числом.

Примечания

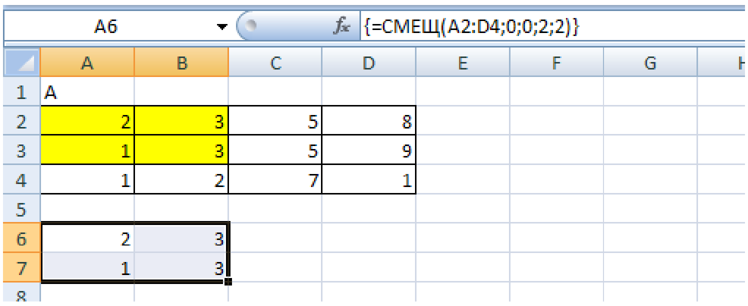
- Если аргументы **Высота** или **Ширина** опущены, то предполагается, что используется такая же высота или ширина, как в аргументе **Ссылка**;
- Аргумент **Ссылка** – это ссылка на область, которая должна быть реальным, а не виртуальным массивом, т.е. находиться где-то на листе.

Пример

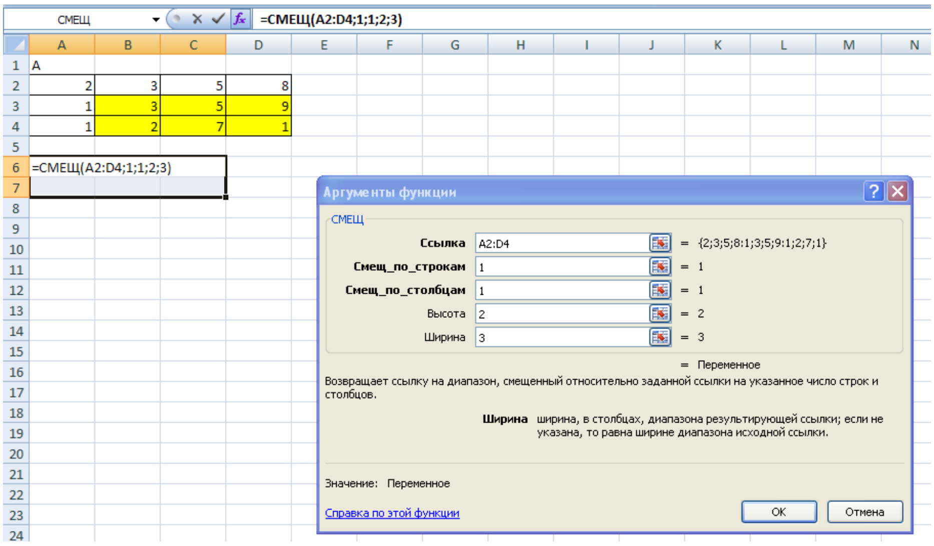
1. Задать исходную матрицу.
2. Отметить место для подматрицы (выделена в основной желтым цветом)



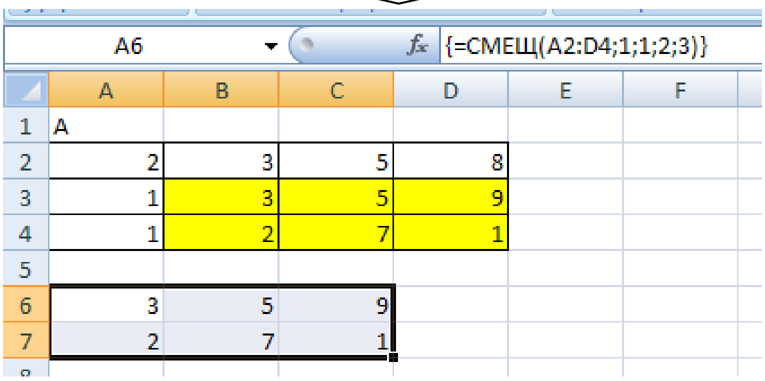
8. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**



Еще пример:


=СМЕЩ(A2:D4;1;1;2;3)
Аргументы функции
Ссылка A2:D4 = {2;3;5;8:1;3;5;9:1;2;7;1}
Смещ_по_строкам 1 = 1
Смещ_по_столбцам 1 = 1
Высота 2 = 2
Ширина 3 = 3
= Переменное
Возвращает ссылку на диапазон, смещенный относительно заданной ссылки на указанное число строк и столбцов.
Ширина ширина, в столбцах, диапазона результирующей ссылки; если не указана, то равна ширине диапазона исходной ссылки.
Значение: Переменное
Справка по этой функции
ОК
Отмена


Shift/Ctrl/Enter


A6
{=СМЕЩ(A2:D4;1;1;2;3)}

Часть 2. Системы линейных алгебраических уравнений

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Совокупность уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *системой линейных алгебраических уравнений*. Числа a_{ij} — *коэффициенты системы*, b_i— *правые части системы* $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Совокупность коэффициентов системы можно представить в виде матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Совокупность неизвестных системы – в виде вектора столбца: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Совокупность свободных членов – в виде и вектора столбца: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Используя выше приведенные определения, запишем СЛАУ в **матричном** виде:

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad (2)$$

Совокупность значений неизвестных, удовлетворяющая *всем уравнениям системы,* называется *решением* системы. Решить СЛАУ значить найти такие значения вектора

$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ подстановка которого в систему (1), обращает каждое уравнение этой системы в тождество.

Классификация СЛАУ

- Если число уравнений больше чем число неизвестных, т.е. $n>m$, то СЛАУ называется переопределенной.
- Если число уравнений меньше чем число неизвестных, т.е. $n<m$, то СЛАУ называется недоопределенной.
- Если число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $n=m$, то СЛАУ называется нормальной

- Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, у которой нет решений, называется *несовместной*.
- Каждое решение совместной системы называется *частным решением*. Совокупность всех решений совместной системы называется *общим решением*.
- Если среди правых частей b_i системы есть хоть одна, отличная от нуля, то система называется *неоднородной системой* линейных уравнений.
- Если *все* правые части системы равны нулю, то система называется *однородной*.

Методы решения СЛАУ

СЛАУ несовместна (не имеет решений), если det A=0.

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно разделить на две группы: точные и итерационные:

1. Точные методы позволяют получить решение путем выполнения определённого и точного количества арифметических операций. При этом погрешность решения определяется лишь точностью представления исходных данных и точностью вычислительных операций.
2. Итерационные методы дают некоторую последовательность приближений к решению. Пределом этой последовательности является решение системы уравнений. Решение, возможно, определить лишь с некоторой, как правило, заданной степенью точности ε. Количество итераций для достижения требуемой точности решения определяется величиной ε, выбором начального приближения и видом системы уравнений.

<u>Метод обратной матрицы.</u>

Систему линейных алгебраических уравнений $A\vec{x}=\vec{b}$ умножим слева на матрицу, обратную к A^{-1}. Система уравнений примет вид:

$$A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad E\vec{x}=A^{-1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}=A^{-1}\vec{b},$$

(E - единичная матрица).

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

<u>Метод Крамера.</u>

В этом случае неизвестные $x_1, x_2, ..., x_n$ вычисляются по формуле: $x_i=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, $i=1\ldots n$, где $\det(A)$ – определитель матрицы A; $\det(A_i)$–определитель матрицы, получаемой из матрицы A путем замены i-го столбца вектором $\vec{b}$ **.**

ЗАДАНИЕ №4.

Решение СЛАУ в Excel

Рассмотрим задачу решения СЛАУ на следующем примере

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases} \qquad (3)$$

Т.е. будем решать систему из четырех алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных. Размерность системы (3) n=4, матрица системы A размерности 4×4 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

а вектор-столбец свободных членов (3): $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

В матричном виде система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Будем решать СЛАУ (3) в среде MS Excel тремя различными способами. Для чего создадим рабочую книгу из трех листов и назовем ее `SLAU.xlsx`. Поскольку исходные данные для трех различных способов решения (а значит и трех рабочих листов книги) одни и те же (матрица системы A и вектор-столбец свободных членов $\vec{b}$), то неплохо было бы их одновременно ввести в эти рабочие листы. Excel предоставляет такую возможность. Этот инструмент называется *группировкой* рабочих листов. Для того, чтобы применить средство `Группа`,

- ➢ необходимо выделить группируемые рабочие листы, щелкнув первый рабочий лист (`Лист1`), на котором будут вводиться данные, а затем, удерживая клавишу **Ctrl**, щелкнуть ярлычки листов (`Лист2` и `Лист3`), куда одновременно должны вводиться те же самые данные.
- ➢ Либо, если группируемые рабочие листы расположены подряд, как в нашем случае, при выделенном первом (`Лист1`) щелкнуть, удерживая нажатой клавишу **Shift**, на ярлычке последнего (`Лист3`).

После этого можно вводить данные на текущем рабочем листе, они автоматически появятся в одноименных ячейках на всех остальных сгруппированных листах. Признаком группировки нескольких листов является появившееся в строке заголовка слово `[Группа]` (`[Group]`), заключенное в квадратные скобки (рис.1).

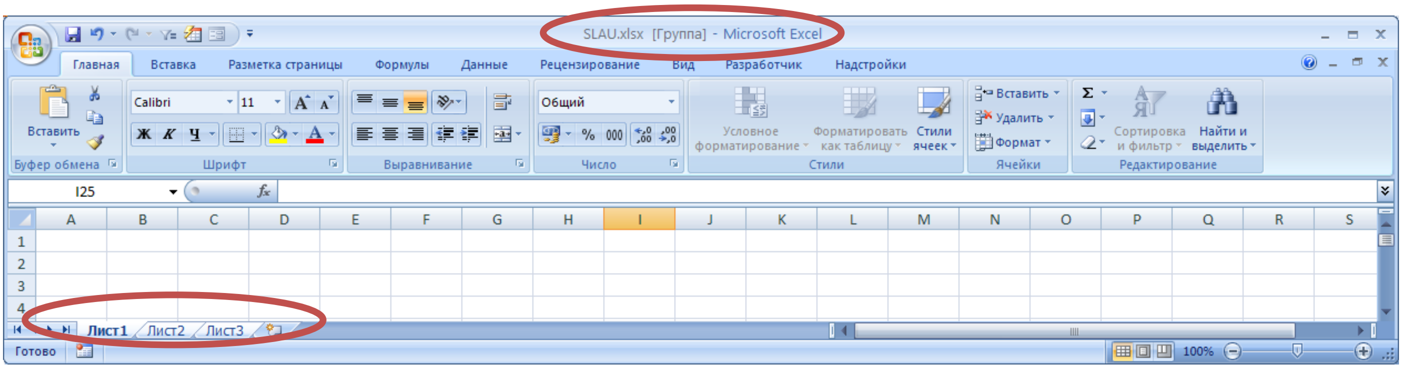


Рис. 1. Группировка рабочих листов

Для решения рассматриваемой СЛАУ (3)

- сгруппируем листы (`Лист1:Лист3`),
- разместим в ячейках текущего листа (`Лист1`) A1:E2, A8:A12 соответствующие поясняющие тексты (заголовки),
- в интервале A3:D6 – элементы матрицы A,
- в интервале E3:E6 – элементы вектора $\vec{b}$.
- Интервал B9:B12 зарезервируем под искомое решение – вектор $\vec{x}$.

После этих манипуляций все три рабочих листа примут одинаковый вид. После ввода группировку необходимо отменить. Для отмены необходимо выбрать любой из листов, не входящих в группу, либо щелкнуть правой кнопкой мыши на любом ярлычке листа из группы и выполнить команду Разгруппировать листы. (рис. 2)

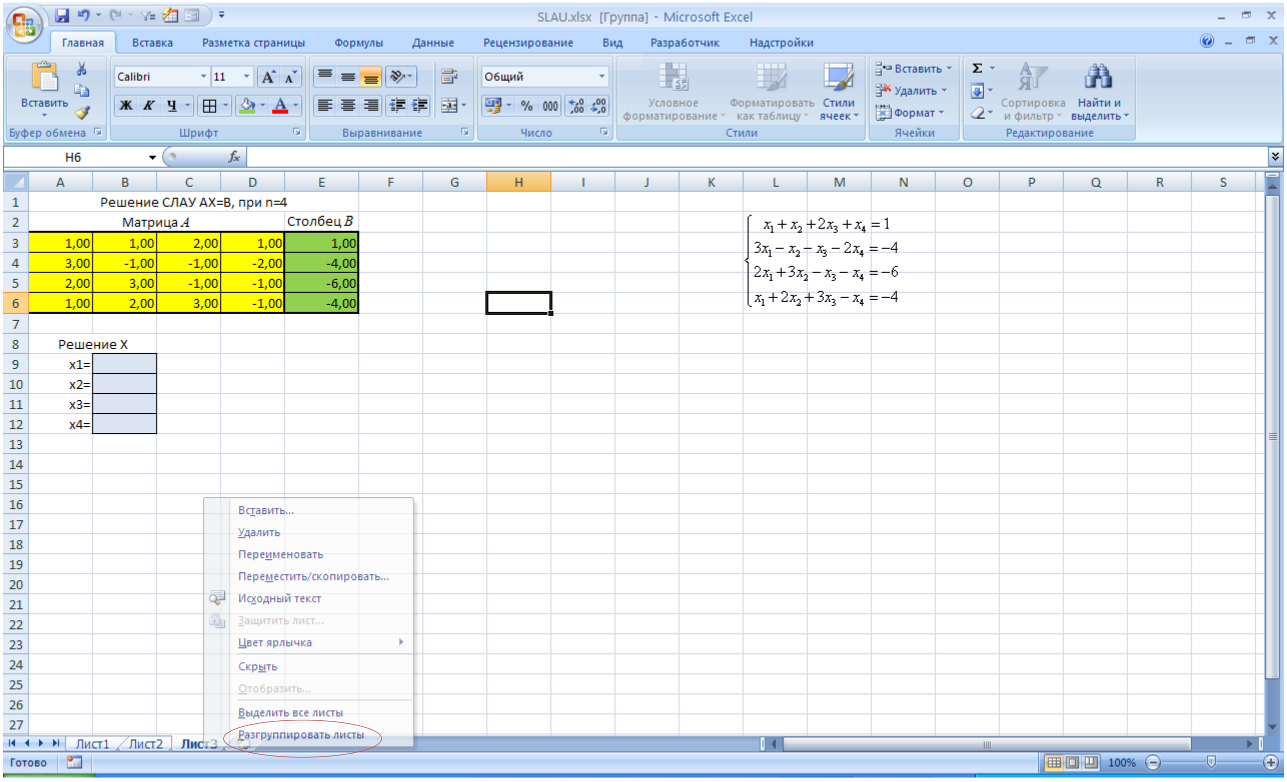


Рис. 2. Рабочие листы, после ввода исходных данных.

1. Метод обратной матрицы.

Систему линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ умножим слева на матрицу, обратную к A^{-1}, вектор неизвестных вычисляется по формуле $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

- Переименовать Лист 1 в “Матричный метод”.
- Объединить ячейки A14: D14 и разместить поясняющий текст: Обратная матрица к А.
- Выделить диапазон A15:E18 под значения обратной матрицы
- Обратиться к мастеру функций, найти функцию **МОБР** (рис. 3)

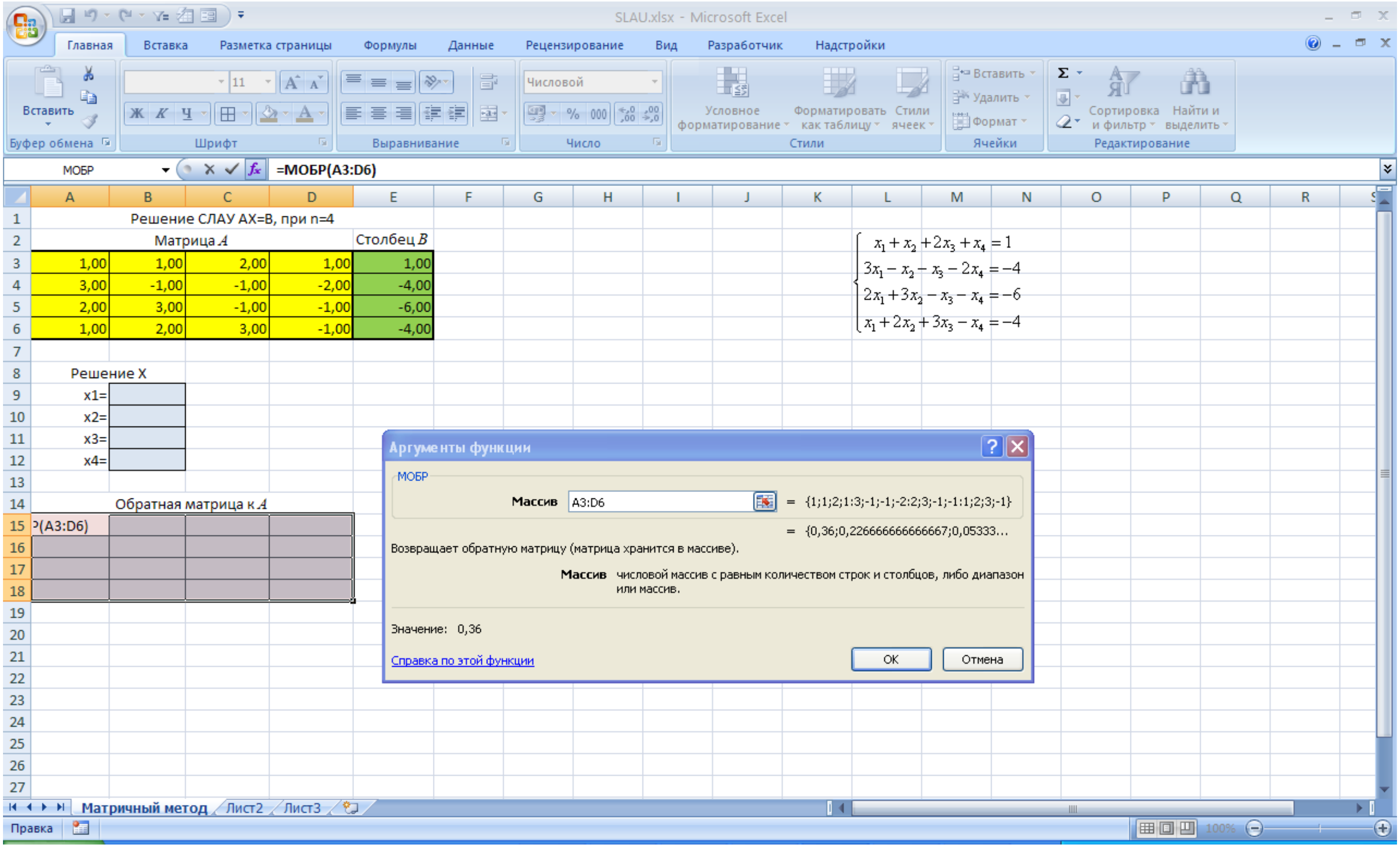


Рис.3.

➢ Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

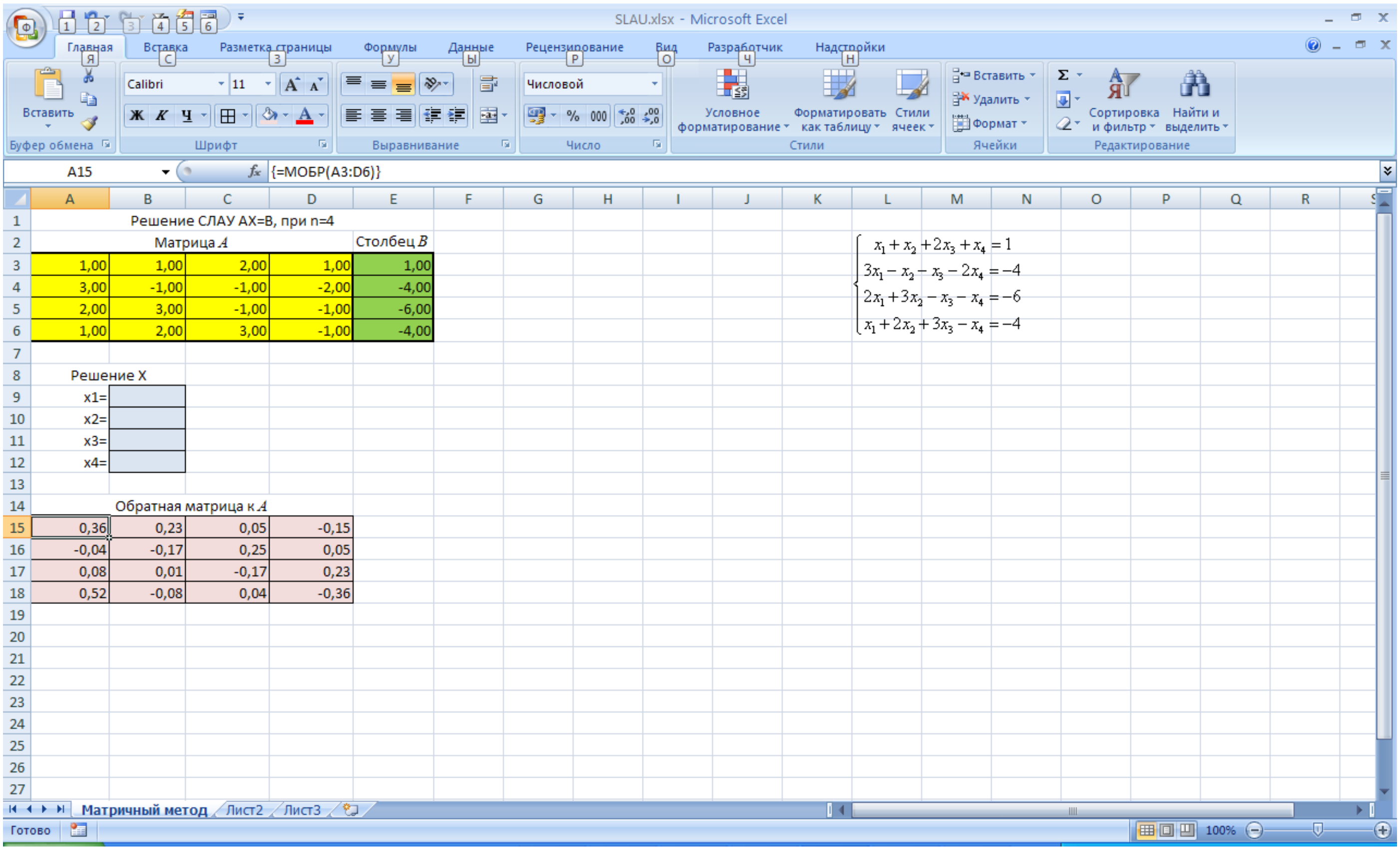


Рис.4

➢ Выделить диапазон B9:B12, найти решение системы, воспользовавшись функцией **МУМНОЖ**.

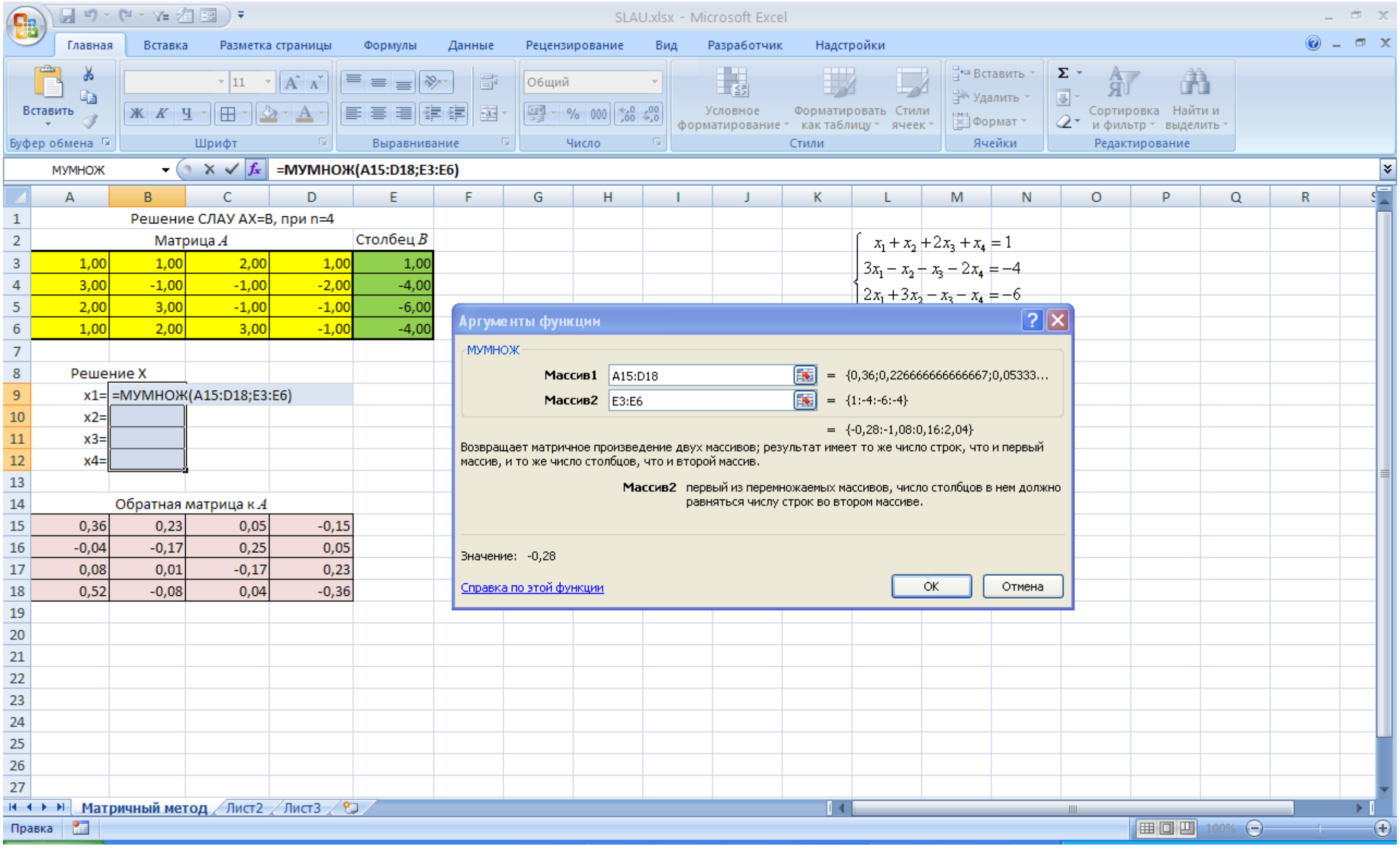


Рис.5

➢ Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

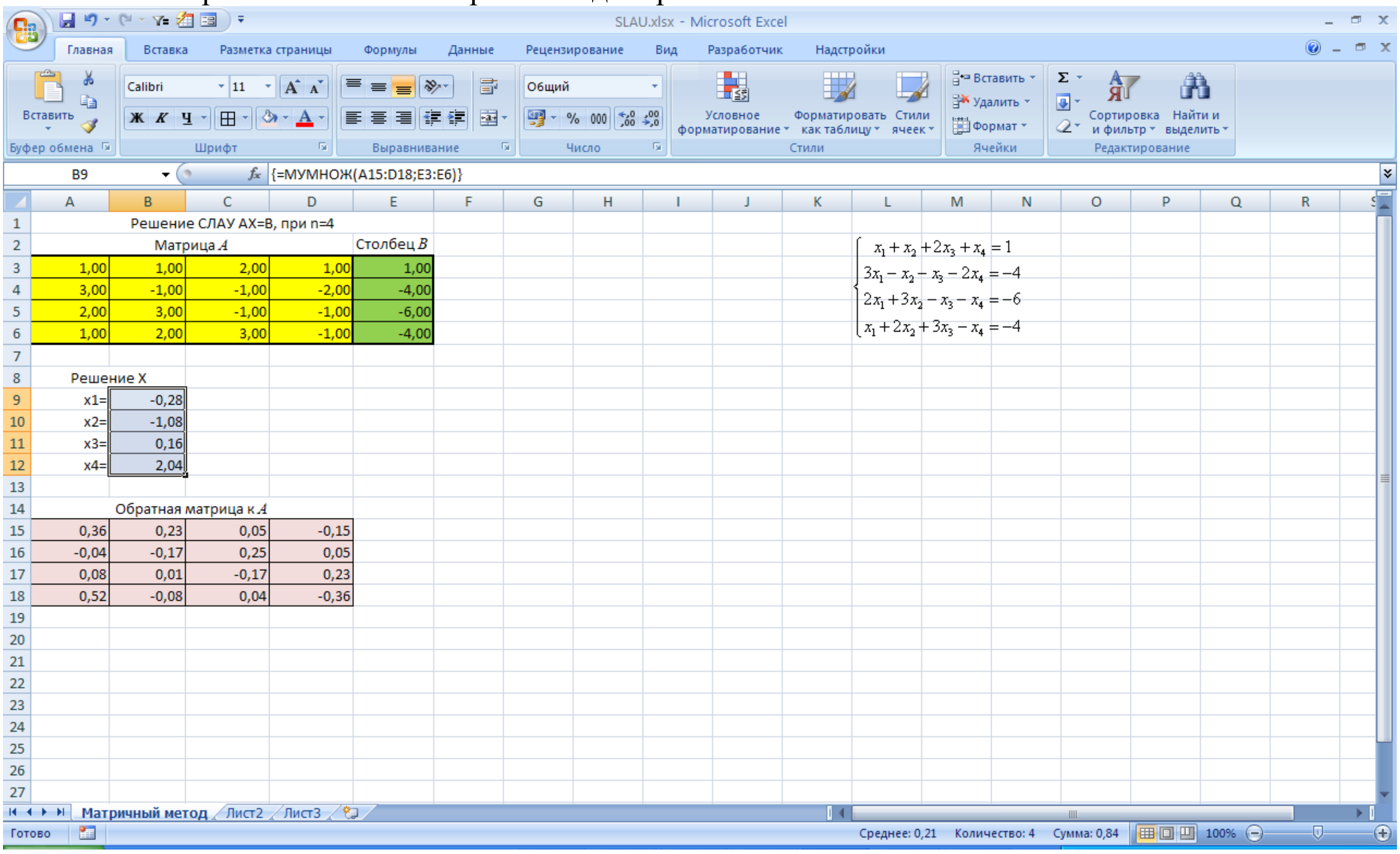


Рис.6

Предложим более универсальную реализацию матричного метода. Для этого будем использовать мегаформулу

ЕСЛИ(МОПРЕД(A3:D6)<>0;МУМНОЖ(МОБР(A3:D6);E3:E6);"Решения нет"),

которая объединяет все предыдущие шаги и содержит проверку на условие совместности системы (неравенство определителя матрицы *A* нулю).

- Введем в ячейку C8 поясняющий текст : Мегаформула.
- Выделим диапазон C9:C12 и введем формулу

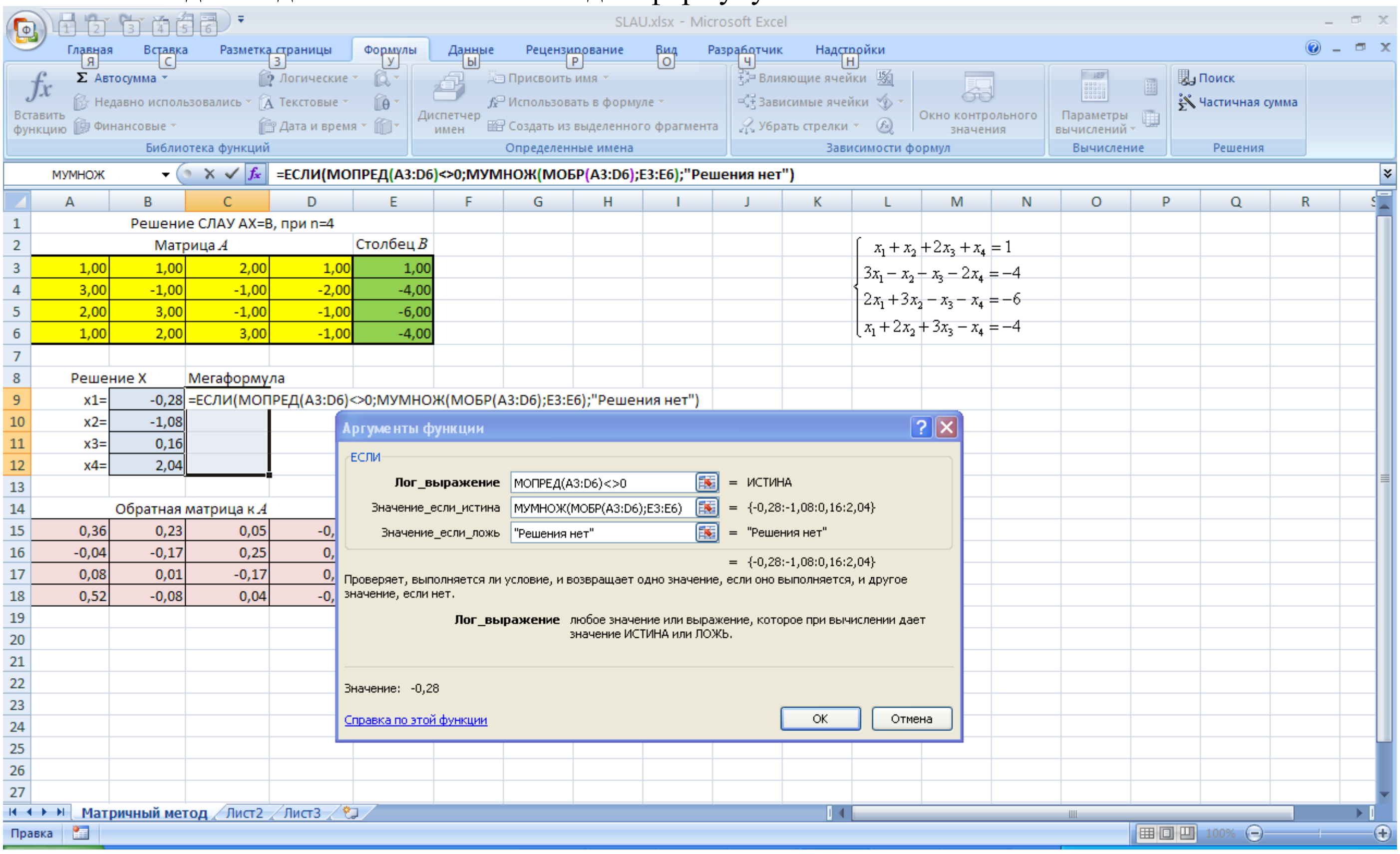


Рис.7

- Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

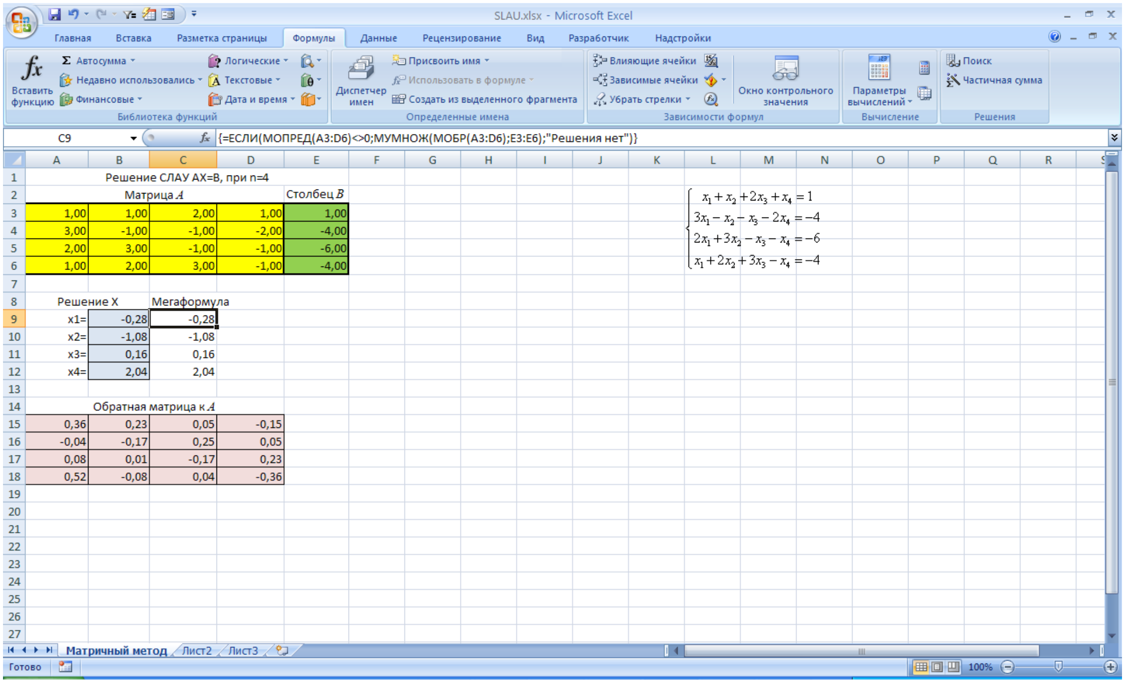
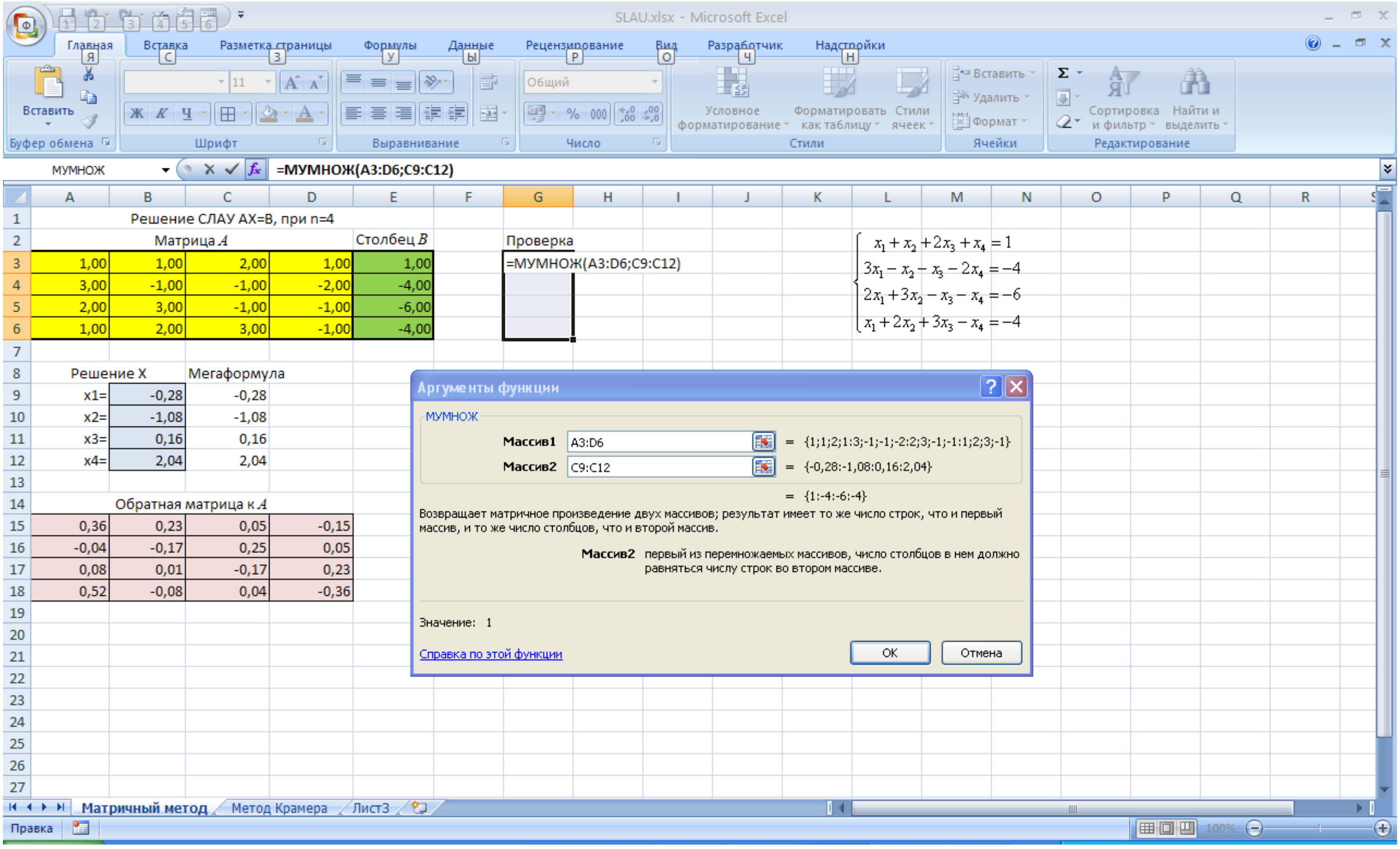
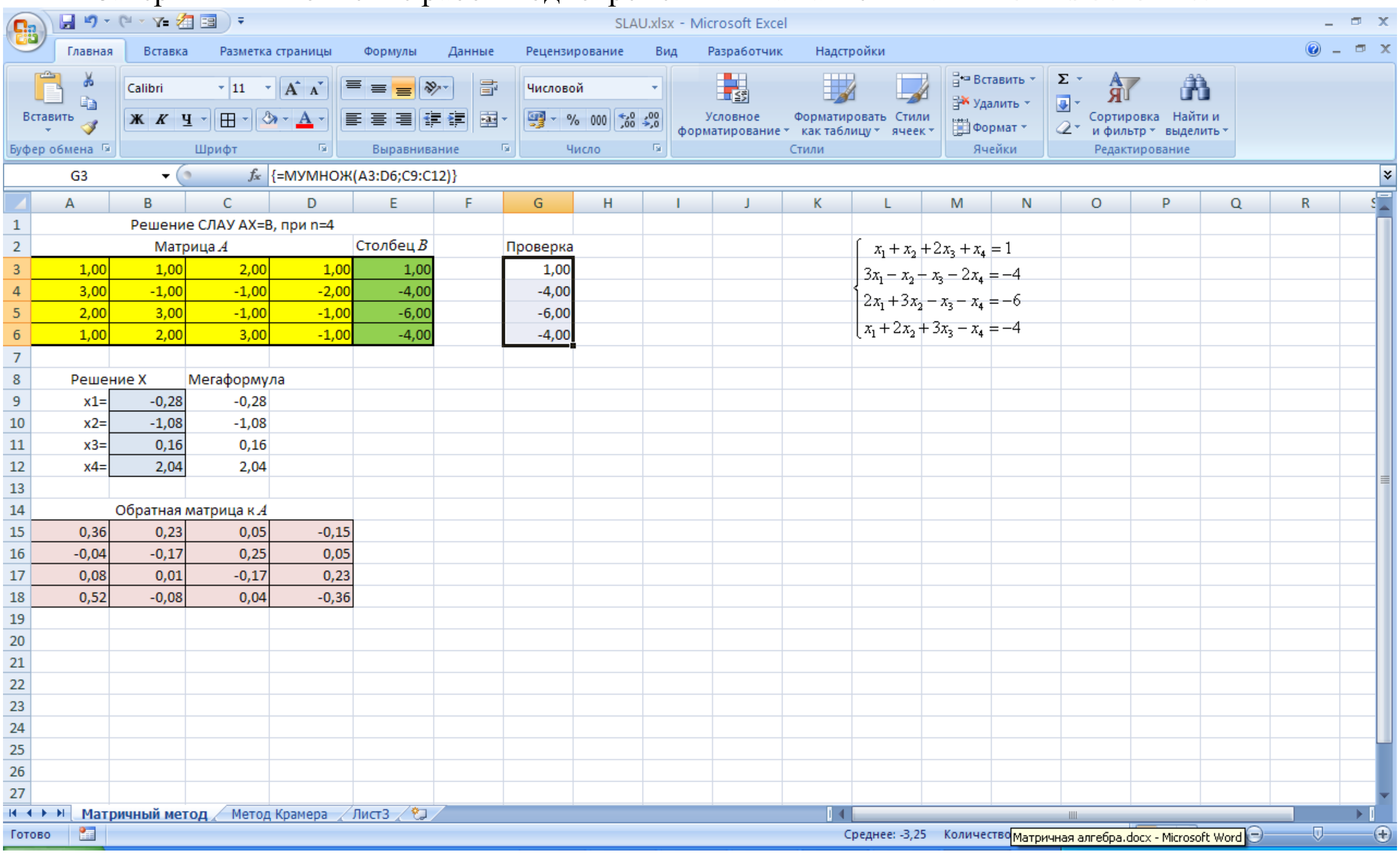


Рис.8

- Проверка решения: умножим матрицу A вектор-столбец $\vec{x}$



➢ Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**



ЗАДАНИЕ №5.

<u>Метод Крамера</u>

Решение СЛАУ находится по формулам Крамера

$$x^* = \begin{pmatrix} \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} \\ \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} \\ \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} \\ \dfrac{\det(A_4)}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

где $\det(A)$ – определитель матрицы системы (3) (главный определитель), $\det(A_i)$ (i = 1, 2, 3, 4– определители матриц A_i (вспомогательные определители), которые получаются из A заменой i-го столбца на столбец свободных членов B. Для рассматриваемой СЛАУ (3) вспомогательные матрицы имеют следующий вид

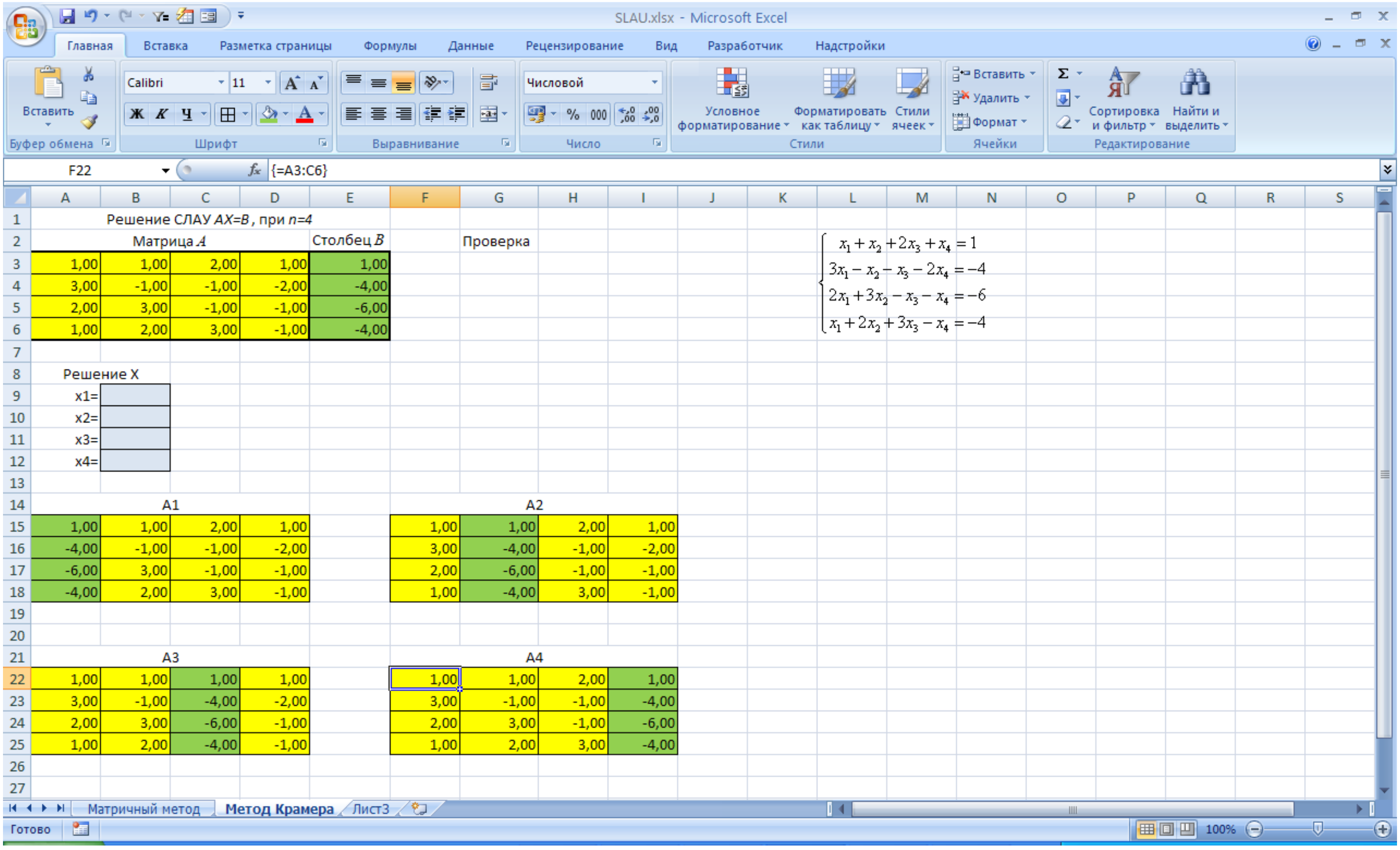
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

- Переименовать Лист 2 в Метод Крамера
- Ввести вспомогательные матрицы A_1, A_2, A_3, A_4.
  - Объединить ячейки A14:D14, ввести текст A1;
    - Выделить диапазон A15:A18, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**
    - Выделить диапазон B15:D18, ввести формулу =B3:D6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**
  - Объединить ячейки F14:I14, ввести текст A2;
    - Выделить диапазон F15:F18, ввести формулу =A3:A6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter.**
    - Выделить диапазон G15:G18, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter.**
    - Выделить диапазон H15:I18, ввести формулу =C3:D6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**
  - Объединить ячейки A21:D21, ввести текст A3;
    - Выделить диапазон C22:C25, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

- Выделить диапазон A22:B25, ввести формулу =A3:B6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**
- Выделить диапазон D22:D25, ввести формулу =D3:D6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter**

- Объединить ячейки F21:I21, ввести текст A4;
  - Выделить диапазон F22:H25, ввести формулу =A3:C6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter.**
  - Выделить диапазон I22:I25, ввести формулу =E3:E6. Завершить выполнение работы одновременным нажатием клавиш **Shift/Ctrl/Enter.**

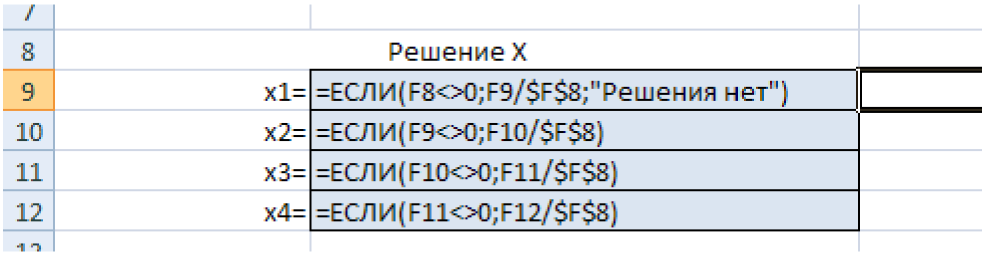


Этот способ заполнения ячеек делает проектируемую таблицу универсальной в том смысле, что можно будет изменять только исходные данные (матрицу системы A в интервале `A3:D6` и вектор-столбец свободных членов в E3:`E6`), а все остальное (в том числе и решение СЛАУ) будет автоматически вычисляться.

➢ Найти определители матриц: $\det(A)$, $\det(A_1)$, $\det(A_2)$, $\det(A_3)$, $\det(A_4)$. Для этого заполнить диапазон E8:F12 следующим образом:

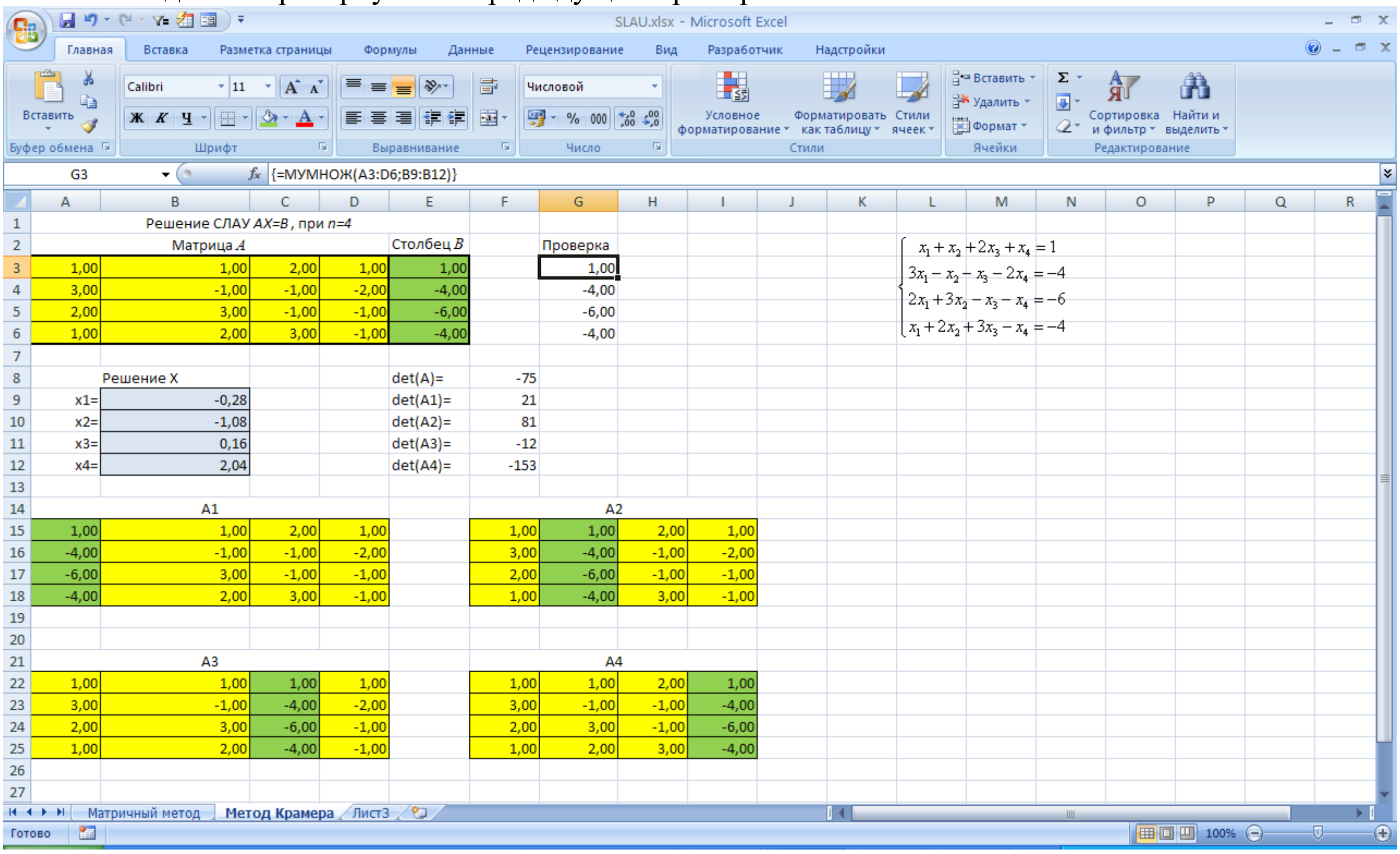
	E	F
8	det(A)=	=МОПРЕД(A3:D6)
9	det(A1)=	=МОПРЕД(A15:D18)
10	det(A2)=	=МОПРЕД(F15:I18)
11	det(A3)=	=МОПРЕД(A22:D25)
12	det(A4)=	=МОПРЕД(F22:I25)

➢ Осталось по формулам Крамера найти решение системы (3). Соответствующие формулы Excel запишем в интервал решения B9:B12,



в котором и увидим результат. Обратите внимание на то, что при вычислении x_i (i = 1, 2, 3, 4) анализируется значение определителя матрицы системы A, вычисленное в ячейке F8, и, если оно равно нулю (система несовместна), то в B9 помещается текст Решения нет, а в ячейки B10:B12 – пустые строки.

- Сделать проверку как в предыдущем примере.



ЗАДАНИЕ №6.

Пример. Поворот фигуры на плоскости.

В двумерном пространстве поворот точки (x_0, y_0) относительно начала системы координат можно описать одним углом φ со следующей матрицей линейного преобразования в декартовой системе координат:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Поворот выполняется путём умножения матрицы поворота на вектор-столбец, описывающий вращаемую точку:

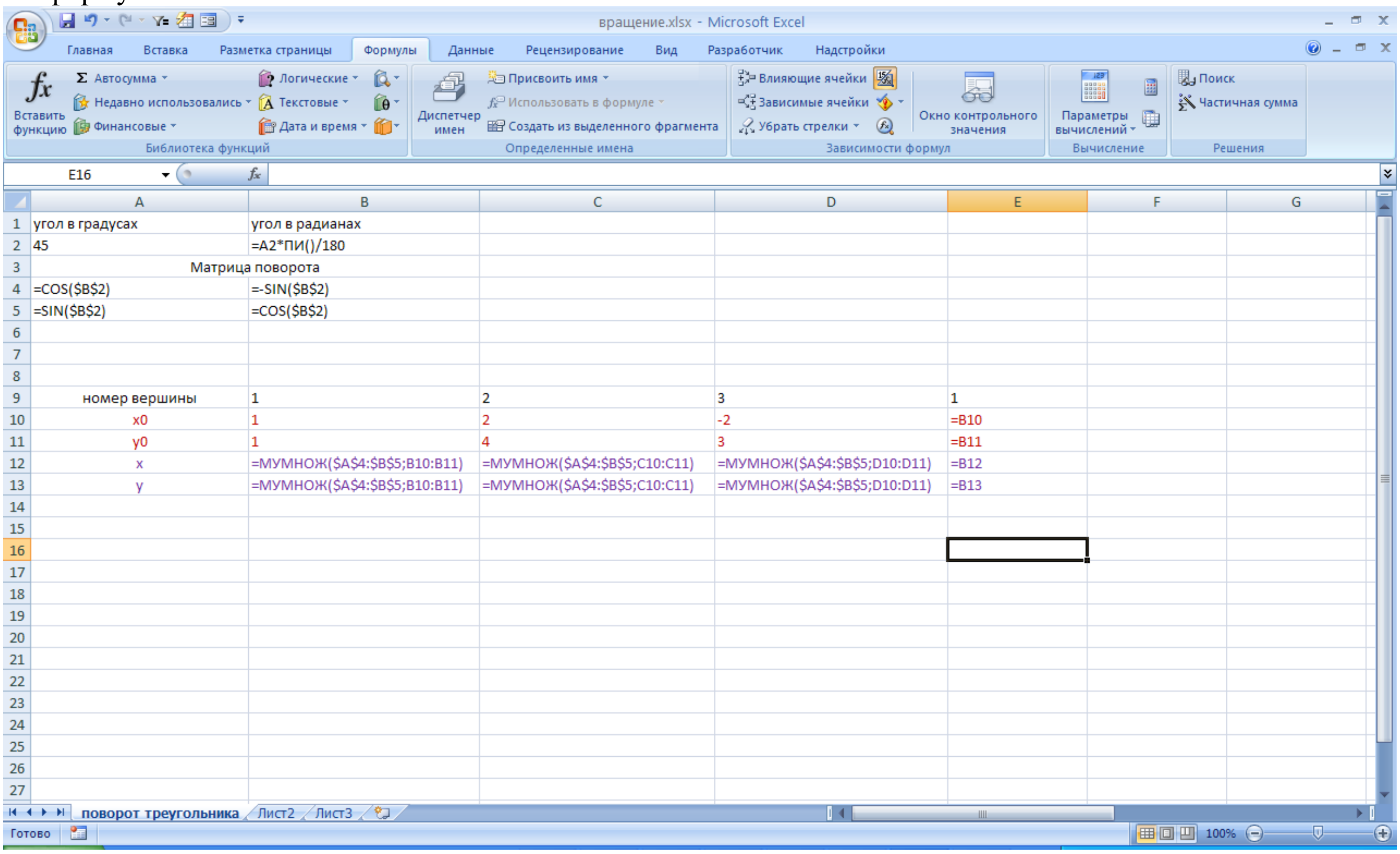
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Таким образом, при повороте точки в правой декартовой системе координат с координатами (x_0, y_0) на угол φ, персчет координат этой точки выполняется по формулам:

$$x = x_0 \cos(\varphi) - y_0 \sin(\varphi)$$
$$y = x_0 \sin(\varphi) + y_0 \cos(\varphi)$$

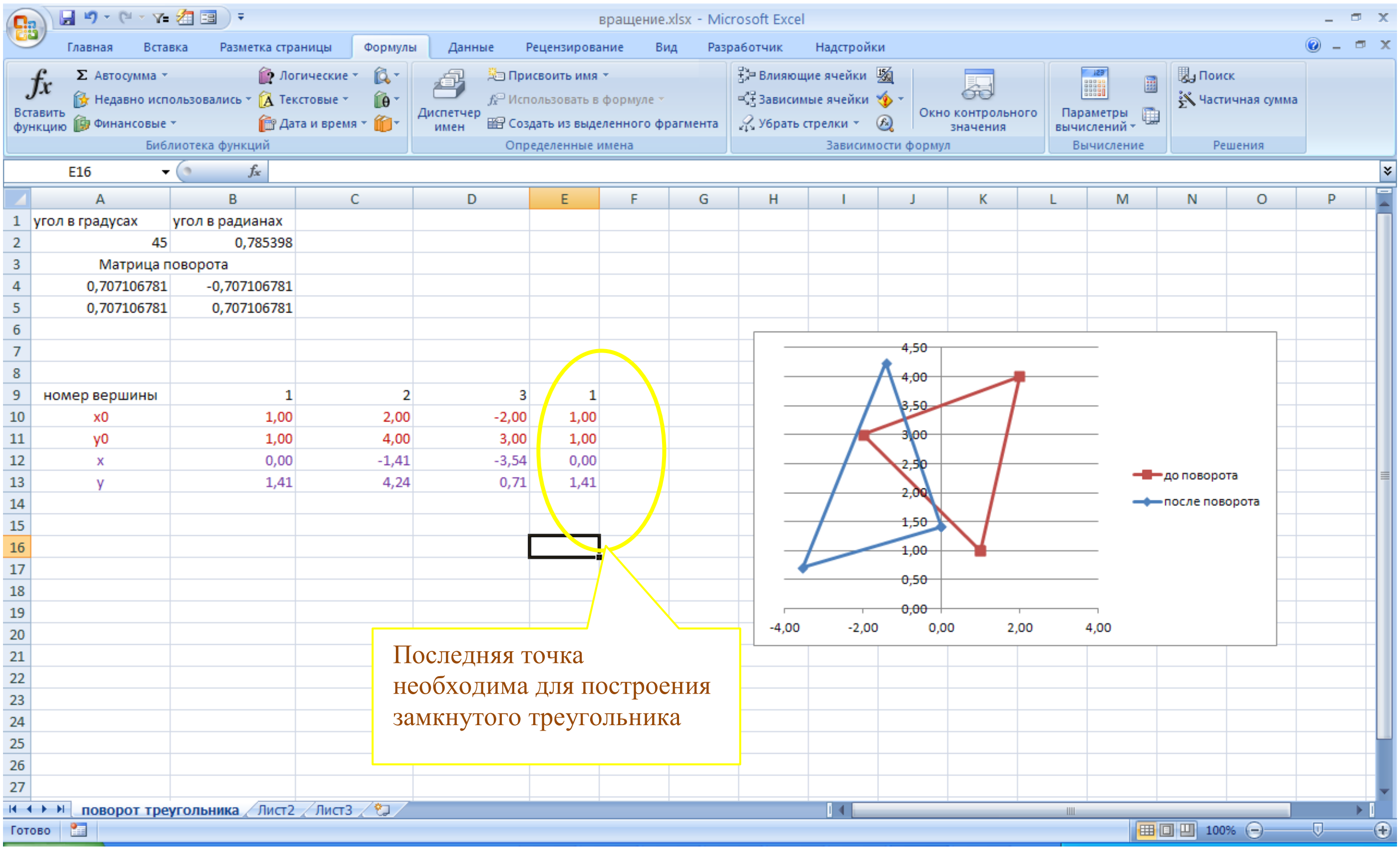
1. Пусть на плоскости задан треугольник с вершинами $\left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}\right)$, $\left(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}\right)$, $\left(x_0^{(3)}, y_0^{(3)}\right)$. Построить его поворот на угол φ, т.е. необходимо найти новые координаты вершин треугольника $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$, $\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right)$, $\left(x^{(3)}, y^{(3)}\right)$ по формулам (*).

Решение задачи с использованием матричных функций представлено на рабочем листе в режиме формул:



	A	B	C	D	E
1	угол в градусах	угол в радианах			
2	45	=A2*ПИ()/180			
3	Матрица поворота				
4	=COS($B$2)	=-SIN($B$2)			
5	=SIN($B$2)	=COS($B$2)			
9	номер вершины	1	2	3	1
10	x0	1	2	-2	=B10
11	y0	1	4	3	=B11
12	x	=МУМНОЖ($A$4:$B$5;B10:B11)	=МУМНОЖ($A$4:$B$5;C10:C11)	=МУМНОЖ($A$4:$B$5;D10:D11)	=B12
13	y	=МУМНОЖ($A$4:$B$5;B10:B11)	=МУМНОЖ($A$4:$B$5;C10:C11)	=МУМНОЖ($A$4:$B$5;D10:D11)	=B13

И в обычном режиме



2. После поворота четырехугольника на угол φ его вершины стали $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$, $\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right)$, $\left(x^{(3)}, y^{(3)}\right)$, $\left(x_1^{(4)}, y_1^{(4)}\right)$. Найти исходные вершины $\left(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}\right)$, $\left(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}\right)$, $\left(x_0^{(3)}, y_0^{(3)}\right)$, $\left(x_0^{(4)}, y_0^{(4)}\right)$.

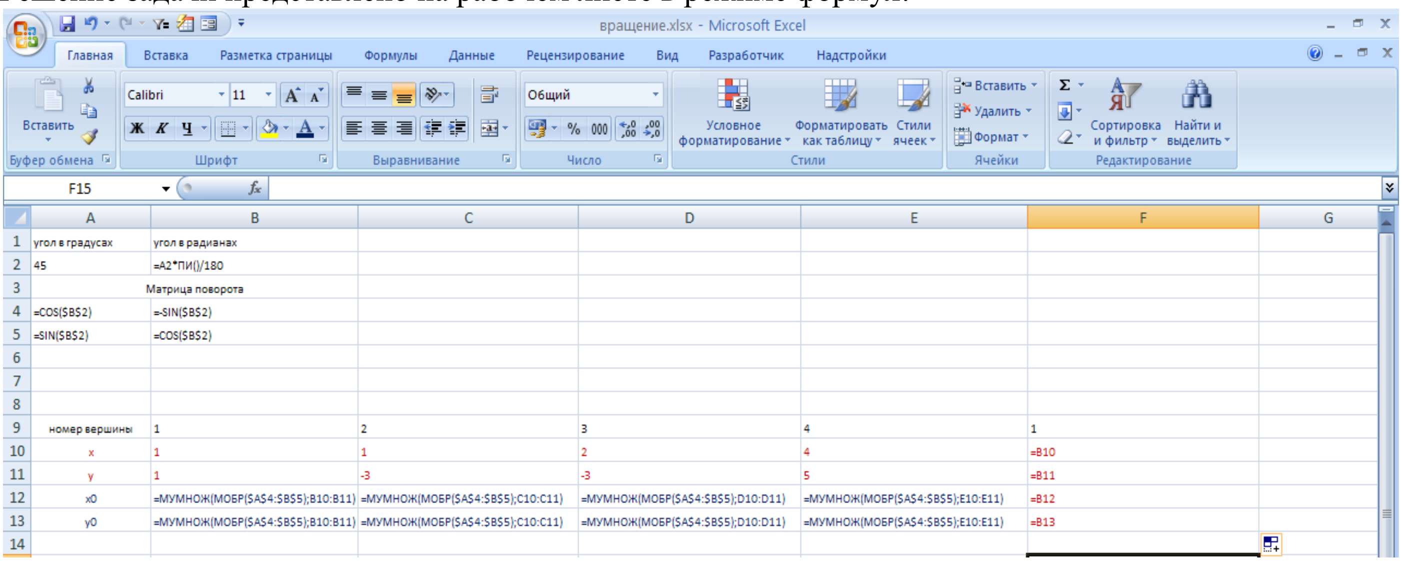
Исходные вершины можно найти, разрешив СЛАУ относительно неизвестных $\left(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}\right)$, *i=1,2,3,4*

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(i)} \\ y_0^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \end{pmatrix}$$

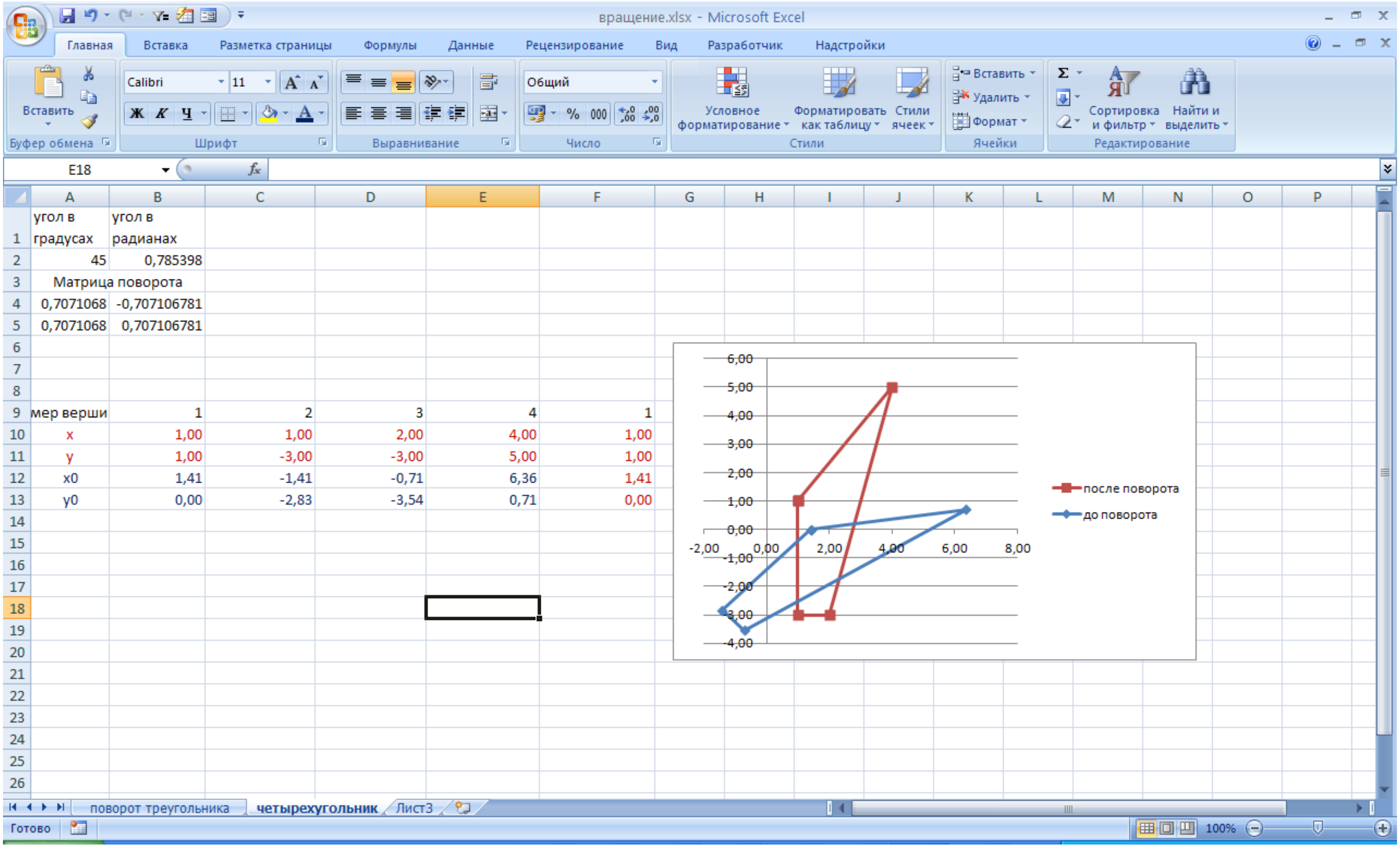
Т.е., например, методом обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} x_0^{(i)} \\ y_0^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \end{pmatrix}$$

Решение задачи представлено на рабочем листе в режиме формул:



И в обычном режиме


вращение.xlsx - Microsoft Excel
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Разработчик
Надстройки
E18
угол в градусах
угол в радианах
45
0,785398
Матрица поворота
0,7071068
-0,707106781
0,7071068
0,707106781
мер верши
1
2
3
4
1
x
1,00
1,00
2,00
4,00
1,00
y
1,00
-3,00
-3,00
5,00
1,00
x0
1,41
-1,41
-0,71
6,36
1,41
y0
0,00
-2,83
-3,54
0,71
0,00
после поворота
до поворота
поворот треугольника
четырехугольник
Лист3
Готово
100%