ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭВМ

Урок 1. ОСНОВЫ ЛОГИКИ

ЛОГИКА – наука о формах и способах мышления.
Logos (древнегр.) – слово, мысль, закон**.**

Основоположник классической (формальной) логики – древнегреческий ученый Аристотель –384-322 до н.э. По определению Аристотеля **Логика** – наука о выводе одних умозаключений из других сообразно их логической форме.

Постепенно логика попадает под влияние математики: появляется ***математическая логика***.

Основоположник **математической логики** - Вильгельм Лейбниц – немецкий философ и математик, предложил использовать в логике математическую символику и высказал мысль о применении двоичной системы счисления.

Английский математик **Джордж Буль** (19 в.) создал математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логическое высказывание.

ЛОГИКА **– наука о формах и способах мышления.**

Формы мышления

Мышление всегда осуществляется в каких то формах. Основные формы мышления:

- **понятие** – фиксируются основные, существенные признаки объекта;
- **высказывание** – что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними;
- **умозаключение** – когда из одного или нескольких суждений может быть получено новое заключение.

Понятие – имеет две стороны: **содержание и объем.**

Содержание - <u>совокупность</u> существенных признаков объекта. <u>Например</u>: ПК – универсальное электронное устройство для автоматической обработки информации, предназначенное для одного пользователя.

Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которую оно распространяется (количество экземпляров). <u>Например</u>: сотни миллионов ПК.

Основной элемент логики – высказывание.

Высказывание – это повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно. (Истина обозначается 1, Ложь – 0)**.**

Не являются высказыванием:

- ничего не утверждающие предложения («*Ученик десятого класса*»);
- предложения, использующие неопределенные понятия (много, мало, тепло, холодно, недавно) (*Информатика – интересный предмет*);
- вопросительные или восклицательные предложения (*Как здорово!);*
- когда для выяснения истинности требуются дополнительные сведения (Пр. *В городе А более миллиона жителей, У него голубые глаза*).

Определите, какое предложение можно назвать высказыванием, а какое – нет и почему?

1. В Ленинградской области листья на деревьях опадают осенью.	+
2. Сегодня выпадет много снега.	-
3. x<5	+
4. Число 2 делится на 5 нацело.	+
5. Мойте руки перед едой.	-
6. На улице тепло.	-
7. Москва – столица России.	+
8. Кто не хочет быть счастливым?	-
9. Скоро кончатся уроки.	-
10. Все дети любят школу.	+

Подсказка: у слов «давно», «недавно», «много», «мало», «тепло», «холодно» - неопределенные значения, поэтому невозможно определить истинность или ложность этих предложений.

Высказывания бывают простыми и сложными.

Слова и словосочетания (логические связки) ***«не», «и», «или», «если…то», «тогда и только тогда»*** позволяют из уже заданных высказываний строить новые. ***Высказывание*** содержащее в себе несколько простых высказываний, соединенных ***логическими связками***, называется ***Сложным***.

Примеры:

1. **Если** идет дождь, **то** солнце не светит.
2. Квадрат – это ромб **и** Волга впадает в Черное море.

Для связок введена специальная терминология:

Логические связки и кванторы	Название
и, $\wedge$, and, x	конъюнкция
или, $\vee$, OR, +	дизъюнкция
не, | $\overline{\ }$	отрицание
Если…то, «из…следует», $\Rightarrow$	импликация
Тогда и только тогда, необходимо и достаточно $\leftrightarrow$	эквиваленция
Все, каждый, $\forall$	Квантор общности
Некоторые, существуют, $\exists$	Квантор существования

Основная задача логики – на основании истинности простых высказываний определять истинность сложных.

Определите, какие высказывания являются простыми, а какие – сложными и какие логические связки в нем используются.

Высказывание	Вид	Связки
1. Сегодня в школу не пойду.	П	Отр
2. Сегодня в школу не пойду, и мне не придется писать контрольную.	С	Кон
3. Если не пойду в школу, то контрольную придется писать после уроков.	С	Имп
4. Я хорошо подготовился к зачету по физике.	П	
5. Я хорошо подготовился к зачету по физике и по математике.	С	Кон
6. Сегодня вторым уроком будет физика.	П	
7. Сегодня вторым уроком будет физика или химия.	С	Диз
8. Если светит солнце, то дождя нет и тепло.	С	Импл
9. Сейчас идет дождь.	П	

Булева алгебра

Булева алгебра или алгебра логики – это математический аппарат, рассматривающий зависимость одних высказываний от других.

Основная задача логики – на основании истинности простых высказываний определить истинность сложных.

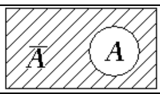
На самом деле у высказываний есть два значения: смысловое и истинностное.

В алгебре логики учитывается только истинность высказываний, а не его смысловое значение.

Чтобы обращаться к высказываниям, им назначают имена (A, B, C).

Основные логические функции

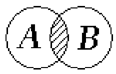
1. НЕ (инверсия, отрицание)

Обозначение:	$\overline{A}$ неA	Таблица истинности:
Геометрический вид:		

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

<u>Пример</u>: Неверно, что 2х2=5.
Завтра мы не пойдем на улицу. Луна – не спутник Земли.
Если высказывание А – истинно, то НЕ А – ложно.

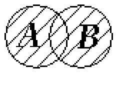
2. И (конъюнкция (*соединение*), логическое умножение)

Обозначение:	АиВ A·B AB A&B A∧B	Таблица истинности:
Геометрический вид:		

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

<u>Пример:</u> Закончились уроки, и ученики пошли домой
A = Закончились уроки
B = Ученики пошли домой.
Высказывание A·B истинно только в том случае, когда истинны оба высказывания.

3. ИЛИ (дизъюнкция, логическое сложение)

Обозначение:	АилиВ A+B A∨B	Таблица истинности:
Геометрический вид:		

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

<u>Пример:</u> В природе бывает так, что солнце при дожде светит или прячется в тучах
A = В природе бывает, что солнце при дожде светит
B = В природе бывает, что солнце при дожде прячется в тучах
Высказывание A∨B ложно только в том случае, когда ложны оба высказывания.

4. Импликация (логическое следование)

Образуется соединением двух высказыванием в одно с помощью оборота «если…, то…». Обозначается A→B

Обозначение:	A→B	Таблица истинности:

		A	B	A→B
Геометрический вид:	нет	0	0	1
		0	1	1
		1	0	0
		1	1	1

Импликация A → B истинна всегда, за исключением случая, когда A – истинно, а B – ложно.
Пример: Если будет хорошая погода, то мы пойдем гулять.
Если 2+3=4, то 2х2=5

5. Эквивалентность (логическое равенство)

Образуется соединением двух высказыванием в одно с помощью оборота «тогда и только тогда, когда…».

Обозначение:	**A↔ B**	Таблица истинности:		
Геометрический вид:	нет	**A**	**B**	A-B
		0	0	1
		0	1	0
		1	0	0
		1	1	1

Эквивалентность истинна только тогда, когда оба высказывания либо истинны, либо ложны.

Используя основные логические операции, можно построить более сложные высказывания, например:

(A^B) ∨ (A∨B) ∨ ($\overline{A}$ ^C)

Указанные высказывания называются формулами алгебры высказываний.
Формулы состоят из:
- простых высказываний;
- знаков логических операций;
- скобок;

Приоритет выполнения логических операций:
1. операции в скобках
2. отрицание (НЕ)
3. конъюнкция (И)
4. дизъюнкция (ИЛИ)

В алгебре высказываний все логические функции могут быть сведены к трем базовым: **логическому умножению, сложению и логическому отрицанию**.

Методом сравнения таблиц истинности убедимся, что операция импликация A→B равносильна выражению $\overline{A}\vee$B

Таблица истинности

A	**B**	$\overline{A}$	$\overline{A}\vee$B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Закон	Для ИЛИ	Для И
Переместительный Закон коммутативности	$x \vee y = y \vee x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Сочетательный	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Распределительный	$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$	$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$
Правила де Моргана	$\overline{x \vee y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$	$\overline{x \cdot y} = \overline{y} \vee \overline{x}$
Идемпотенции	$x \vee x = x$	$x \cdot x = x$
Поглощения	$x \vee (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x \vee y) = x$
Склеивания	$(x \cdot y) \vee (\overline{x} \cdot y) = y$	$(x \vee y) \cdot (\overline{x} \vee y) = y$
Операция переменной с ее инверсией	$x \vee \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Операция с константами	$x \vee 0 = x;\ x \vee 1 = 1$	$x \cdot 1 = x;\ x \cdot 0 = 0$
Двойного отрицания	$\overline{\overline{x}} = x$	

Урок 2. Построение логических схем высказываний

1. Опрос по пройденному материалу:
   - ✓ Тест в программе Квестор
   - ✓ Самостоятельная работа.

1. Поставьте знак минус там, где указано предложение не являющееся высказыванием.

№ п/п	Предложение	Тип
1.	Луна – спутник Земли	
2.	Все ученики нашей школы любят математику	
3.	Принеси мне книгу	-
4.	Некоторые люди имеют голубые глаза	
5.	Вы были в театре?	-
6.	Завтра я не пойду на каток	
7.	Мойте руки перед едой!	-
8.	Если будет дождь, то мы поедем за грибами.	
9.	Завтра я либо сдам экзамен, либо останусь на второй год	
10.	Существуют такие люди, которые не любят животных	
11.	Если я поеду туда, то смогу ли вернуться?	-

Задание 2. Укажите простые и сложны е высказывания.

	Высказывания	Тип
1.	Если две прямые параллельны, то они пересекаются	с
2.	Идет дождь	
3.	Все мышки серые, кошки тоже бывают серые	с
4.	На следующем уроке будет контрольная или свободный урок	с
5.	Завтра или сегодня брат придет к нам в гости	с
6.	Треугольники с равными сторонами не равнобедренны	
7.	Число 3 больше числа 2	
8.	Когда я вас вижу, у меня нет слов, чтобы высказать это	с
9.	Завтра в нашем театре премьера	
10.	Это число не простое	
11.	Когда горит свет – это означает надежду	с
12.	Завтра или сегодня или через три дня он позвонит	с

Задание 3. Укажите связующие слова или союзы и наименование связки

	Высказывания	Союз	Операция
1.	Если горит свет, то электроэнергия поступает		
2.	Всякий прямоугольник имеет прямые углы и параллельные друг другу стороны		
3.	Если будет хорошая погода, то вы поедите туда		
4.	Треугольники с равными сторонами не являются равнобедренными		
5.	На следующем уроке будет химия или история		
6.	Завтра я пойду в школу и в библиотеку		
7.	Он заболел или забыл о нашей договоренности		
8.	Неверно то, что Саша приходил вчера ко мне		
9.	Зимой мы обычно ходим на лыжах или катаемся на коньках на нашем пруду		
10.	Когда горит свет – это означает надежду		
11.	Завтра или сегодня или через три дня он позвонит		

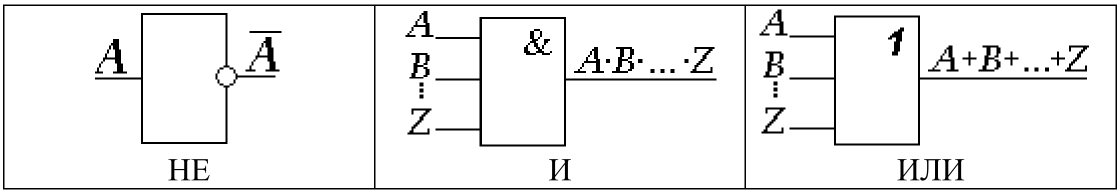
Теория: Математический аппарат алгебры логики очень удобен для описания того, как функционируют аппаратные средства компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, а значений логических переменных тоже два: "1" и "0".

Из этого следует два вывода:

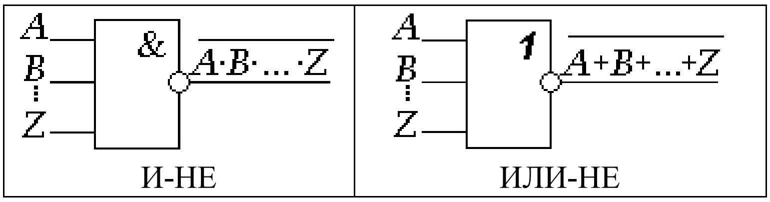
1. одни и те же устройства компьютера могут применяться для обработки и хранения как числовой информации, представленной в двоичной системе счисления, так и логических переменных;
2. на этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики позволяет значительно упростить логические функции, описывающие функционирование схем компьютера, и, следовательно, уменьшить число элементарных логических элементов, из десятков тысяч которых состоят основные узлы компьютера.

<u>*Логический элемент компьютера*</u> — это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.

Схемы строятся из **логических блоков**. Каждой функции соответствует свой логический блок:



Существуют и сложные блоки:



Построим схему следующего высказывания:

$y = \overline{A} + B \cdot \overline{C}$

Порядок действий будет следующий:

1. $\overline{A}$ - НЕ
2. $\overline{C}$ - НЕ
3. $B \cdot \overline{C}$ - И (логическое умножение)
4. $\overline{A} + B \cdot \overline{C}$ - ИЛИ (логическое сложение)

Блоки, соответствующие этим действиям:

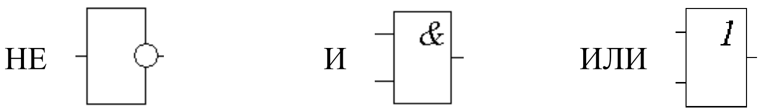
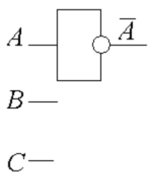
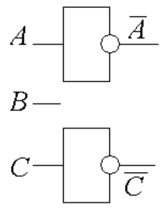
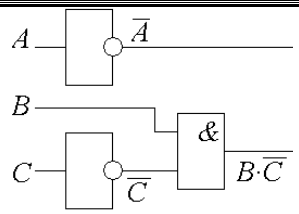
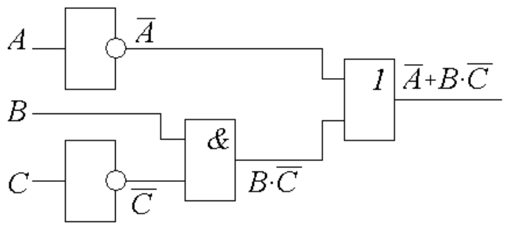
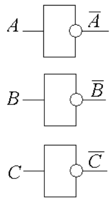
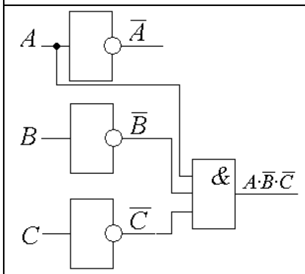
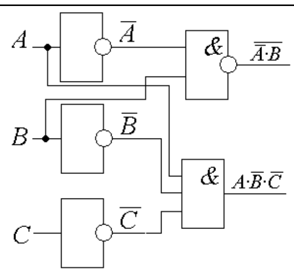
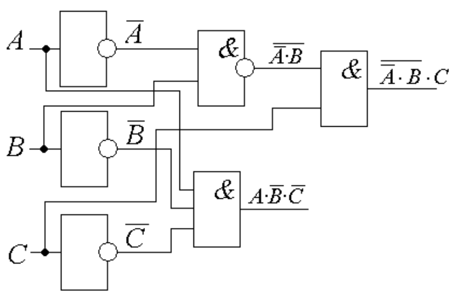
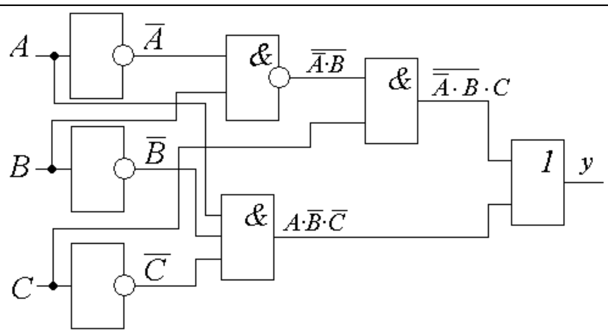


Схема составляется, как конструктор, и строится слева направо:

Шаг 1. Рисуем три входных высказывания:	**Шаг 2.** Строим блок «НЕ» $\overline{A}$
A— B— C—	
Шаг 3. Строим блок «НЕ» $\overline{C}$	**Шаг 4.** Строим блок «И» $B \cdot \overline{C}$

	
Шаг 5. Строим блок «ИЛИ» $\overline{A}+B\cdot\overline{C}$. Схема готова.	
	

Построим схему другого высказывания: $y = A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{\overline{A}\cdot B}\cdot C$

Шаг 1. Рисуем три входных высказывания:	**Шаг 2.** Строим блоки «НЕ» $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$
A — B — C —	
Шаг 3. Строим блок «И»: умножаем A на $\overline{B}$ и на $\overline{C}$	**Шаг 4.** Строим блок «И-НЕ» $\overline{\overline{A}\cdot B}$
 Обратите внимание, что место соединения линий отмечено точкой.	 Обратите внимание, что место, где линии не пересекаются, а скрещиваются, точкой не отмечается.
Шаг 4. Строим блок «И»: умножаем $\overline{\overline{A}\cdot B}$ на C	**Шаг 5.** Осталось последнее действие: Строим блок «ИЛИ»: складываем $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ и $\overline{\overline{A}\cdot B}\cdot C$. Схема готова.
	

Самостоятельно построить схему следующих высказываний:

1. $y = A\cdot B+\overline{A}\cdot C$	7. $y=(A+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})\cdot A$
2. $y=(A+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B)$	8. $y=\overline{\overline{A}+B\cdot D}$

3. $y=A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B\cdot C$	9. $y=\overline{C}\cdot\overline{B\cdot\overline{A}}+C\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}$
4. $y=\overline{(A+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B})}$	10. $y=\overline{\overline{B\cdot A}+C\cdot\overline{A}}$
5. $y=\overline{A}\cdot B+\overline{A\cdot\overline{B}\cdot C}$	11. $y=\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}}\cdot\overline{A}+A\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}$
6. $y=\overline{\overline{A}\cdot B}+A\cdot\overline{B}+\overline{\overline{B}\cdot C}$	12. $y=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C$

Урок 3. Логическая формула. Анализ логических схем

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой.

Определение <u>*логической формулы*</u>:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") — формулы.
2. Если A и B — формулы, то $\overline{A}$, $A \cdot B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ — формулы.
3. Никаких других формул в алгебре логики нет.

Определить значение истинности логического выражения можно двумя способами:

1. С помощью таблиц истинности;
2. С помощью анализа логических схем.

Анализ с помощью таблиц истинности

1. Найти значение выражения **для формулы F=** $\overline{x} \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$ **, если x=1, y=0.**

Переменные		Промежуточные логические формулы					Формула F
x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \cdot y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot y \vee \overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

2. **Таблица истинности для формулы F=**$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$**:, где x=1, y=1**

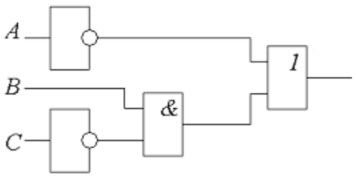
Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула F
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{y}$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

3. **Таблица истинности для формулы F=** $\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z$***:, x=0, y=0, z=1.***

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	z	$\overline{y}$	$x \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee \overline{y}}$	$\overline{x}$	$\overline{x} \cdot z$	$\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Анализ с помощью схем

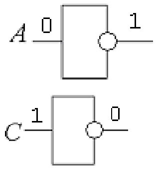
Пусть дана схема:



Определить, какое значение (истина или ложь) будет на выходе схемы, если известны значения на ее входах: *A=0 B=1 C=1.*

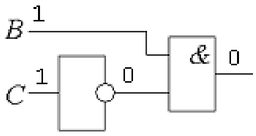
Проанализируем блоки «инверсия»:

По таблице истинности для этой функции $\overline{0}=1$, а $\overline{1}=0$, значит на выходе этих блоков будут 1 – для ***A*** и 0 для ***C***:



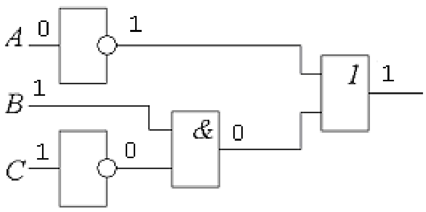
Проанализируем блок «дизъюнкция» (умножение)

По таблице истинности для этой функции 1·0=0, значит, на выходе этого блока будет 0:



Проанализируем блок «конъюнкция» (сложение)

По таблице истинности для этой функции 1+0=1, значит на выходе этого блока (и всей схемы) будет 1:



Проверьте истинность предыдущих формул, построив схемы.

1. Для формулы F= $\overline{x} \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$, если x=1, y=0.
2. Для формулы F=$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$:, где x=1, y=1
3. Для формулы F= $\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z$:, *x=0, y=0, z=1.*

Самостоятельно проанализируйте схемы, построенные вами в предыдущем задании, если даны следующие входные значения:

1. *A=0 B=0*	5. *A=0 B=1 C=0*	9. *A=1 B=0 C=1*
2. *A=0 B=0 C=1*	6. *A=1 B=1 C=1*	10. *A=0 B=0 C=1*
3. *A=0 B=1 C=1*	7. *A=1 B=1*	11. *A=1 B=1 C=0*
4. *A=1 B=0 C=0*	8. *A=0 B=0 D=0*	12. *A=1 B=0 C=0*

Урок 4. Решение логических задач

Для решения логических задач можно использовать:

- средства алгебры логики;
- табличный способ;
- способ с помощью рассуждений.

I. Решение логических задач средствами алгебры логики

Обычно используется следующая схема решения:

1. Изучается условие задачи;
2. Вводится система обозначений для логических высказываний;
3. Конструируется логическая формула, описывающая логические связи между всеми высказываниями условия задачи;
4. Определяются значения истинности этой логической формулы;
5. Из полученных значений истинности формулы определяются значения истинности введённых логических высказываний, на основании которых делается заключение о решении.

Задача 1. Трое друзей, болельщиков "Формулы-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.
— Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.
— Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.
Питер, к которому обратился Ник, возмутился:
— Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину.
По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

Решение. Введем обозначения для логических высказываний:

Ш — победит Шумахер; **Х** — победит Хилл; **А** — победит Алези.

Реплика Ника "Алези пилотирует самую мощную машину" не содержит никакого утверждения о месте, которое займёт этот гонщик, поэтому в дальнейших рассуждениях не учитывается.
Зафиксируем высказывания каждого из друзей:

$$\text{Джон: } \overline{\text{Ш}}\cdot \text{Х},\quad \text{Ник } \text{Ш}\cdot\overline{\text{А}},\quad \text{Питер}: \overline{\text{Х}}.$$

Учитывая то, что предположения двух друзей подтвердились, а предположения третьего неверны, запишем и упростим истинное высказывание

$$(\overline{\text{Ш}}\cdot \text{Х})\cdot(\text{Ш}\cdot\overline{\text{А}})\cdot\overline{\overline{\text{Х}}}\vee(\overline{\text{Ш}}\cdot \text{Х})\cdot\overline{(\text{Ш}\cdot\overline{\text{А}})}\cdot\overline{\text{Х}}\vee\overline{(\overline{\text{Ш}}\cdot \text{Х})}\cdot(\text{Ш}\cdot\overline{\text{А}})\cdot\overline{\text{Х}}=(\text{Ш}\vee\overline{\text{Х}})\cdot\text{Ш}\cdot\overline{\text{А}}\cdot\overline{\text{Х}}\cdot=\text{Ш}\cdot\overline{\text{А}}\cdot\overline{\text{Х}}$$

Высказывание $\text{Ш}\cdot\overline{\text{А}}\cdot\overline{\text{Х}}$ истинно только при **Ш=1, А=0, Х=0.**

Ответ. Победителем этапа гонок стал Шумахер.

Задача 2. Борису, Дмитрию и Сергею предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Борис показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Дмитрий сказал, что это был черный «Крайслер», а Сергей утверждал, что это был «Форд» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо ее цвет. Определите цвет и марку автомобиля.

Выделим из текста задачи несколько простых высказываний:

A = «машина синего цвета»
B = «машина марки Бьюик»
C = «машина черного цвета»
D = «машина марки Крайслер»
E = «машина марки Форд»

Известно, что каждый из подозреваемых назвал правильно либо только марку машины, либо ее цвет. Поэтому, мы можем записать:

1. $A+B=1 \quad C+D=1 \quad E+\overline{A}=1$

2. $(A+B)\cdot(C+D)\cdot(E+\overline{A})=1$

3. Раскрываем скобки:
$(AC+BC+AD+BD)\cdot(E+\overline{A}) = ACE+BCE+ADE+BDE+AC\overline{A}+BC\overline{A}+AD\overline{A}+BD\overline{A}=1$

4. Анализируем получившееся выражение:
$A\cdot\overline{A}=0$ т.к. хотя бы один из сомножителей равен 0
$A\cdot C=0$ т.к. машина не может быть синего и черного цвета одновременно.
$B\cdot D=0$ т.к. машина не может быть одновременно марки Бьюик и Крайслер.
$B\cdot E=0$ т.к. машина не может быть одновременно марки Бьюик и Форд.
$D\cdot E=0$ т.к. машина не может быть одновременно марки Крайслер и Форд.

5. Исключаем из выражения, полученного в п.3 все слагаемые равные 0, остается только слагаемое:
$B\cdot C\cdot\overline{A}=1$

Таким образом получаем ответ: *машина марки бьюик, черного цвета.*
Высказывание $\overline{A}$ только подтверждает этот ответ: машина была *не синего цвета*.

Задача 3. При составлении расписания на один день учителя математики, истории и литературы высказали пожелания, чтобы:

математику поставили первым или вторым уроком;
историю – первым или третьим уроком;
литературу – вторым или третьим уроком.

Определите, какие могут быть варианты расписания.
Решение: Обозначим
A – математика первый
B – математика второй
C – история первый
D – история третий
E – литература второй
F – литература третий

(A+B)(C+D)(E+F)=1

ACE+ACF+ADE+ADF+BCE+ BCF +DBE+BDF=1

Т.к. одновременно не может быть двух разных предметов в одно время, удаляем слагаемые **ACE, ACF, ADF, BCE, DBE, BDF**. Осталось два варианта – **ADE** и **BCF.**

Задача 4. Виктор, Роман, Леонид и Сергей заняли на математической олимпиаде четыре первых места. Когда их спросили, как распределились места, они ответили:

Сергей – первое место, Роман – второе.
Сергей – второе место, Виктор – третье.
Леонид – второе место, Виктор – четвертое.

Известно, что в каждом ответе только одно утверждение истинно. Определите, как распределились места.

Задача 5. Некий любитель приключений отправился в кругосветное путешествие на яхте, оснащённой бортовым компьютером. Его предупредили, что чаще всего выходят из строя три узла компьютера — ***a***, ***b***, ***c***, и дали необходимые детали для замены. Выяснить, какой именно узел надо заменить, он может по сигнальным лампочкам на контрольной панели. Лампочек тоже ровно три: ***x***, ***y***

и **z**.

Инструкция по выявлению неисправных узлов такова:

1. если неисправен хотя бы один из узлов компьютера, то горит, по крайней мере, одна из лампочек ***x***, ***y***, ***z***;
2. если неисправен узел ***a***, но исправен узел ***c***, то загорается лампочка ***y***;
3. если неисправен узел ***c***, но исправен узел ***b***, загорается лампочка ***y***, но не загорается лампочка ***x***;
4. если неисправен ***b***, но исправен узел ***c***, то загораются лампочки ***x*** и ***y*** или не загорается лампочка ***x***;
5. если горит лампочка ***x*** и при этом либо неисправен узел ***a***, либо все три узла ***a***, ***b***, ***c*** исправны, то горит и лампочка ***y***.

В пути компьютер сломался. На контрольной панели загорелась лампочка ***x***. Тщательно изучив инструкцию, путешественник починил компьютер. Но с этого момента и до конца плавания его не оставляла тревога. Он понял, что инструкция несовершенна, и есть случаи, когда она ему не поможет. Какие узлы заменил путешественник?

Решение. Введем обозначения для логических высказываний:
a — неисправен узел ***a***; ***x*** — горит лампочка ***x***;
b — неисправен узел ***b***; ***y*** — горит лампочка ***y***;
c — неисправен узел ***c***; ***z*** — горит лампочка **z**.
Правила 1–5 выражаются следующими формулами:

$$a \vee b \vee c \rightarrow x \vee y \vee z \qquad (1)$$
$$a \cdot \bar{c} \rightarrow y \qquad (2)$$
$$c \cdot \bar{b} \rightarrow y \cdot \bar{x} \qquad (3)$$
$$b \cdot \bar{c} \rightarrow (x \cdot y \vee \bar{x}) \qquad (4)$$
$$(a \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) \cdot x \rightarrow y \qquad (5)$$

Формулы 1–5 истинны по условию, следовательно, их конъюнкция тоже истинна:

$$(a \vee b \vee c \rightarrow x \vee y \vee z) \cdot (a \cdot \bar{c} \rightarrow y) \cdot (c \cdot \bar{b} \rightarrow y \cdot \bar{x}) \cdot (b \cdot \bar{c} \rightarrow x \cdot y \vee \bar{x}) \cdot ((a \vee \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) \cdot x \rightarrow y) = 1$$

Выражая импликацию через дизъюнкцию и отрицание (напомним, что $(a \rightarrow b) = (\bar{a} \vee b)$), получаем:

$$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee x \vee y \vee z) \cdot (\bar{a} \vee c \vee y) \cdot (\bar{c} \vee b \vee y \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{b} \vee c \vee x \cdot y \vee \bar{x}) \cdot (\overline{(a \vee \bar{a}) \cdot (a \vee \bar{b}) \cdot (a \vee \bar{c}) \cdot x} \vee y) =$$
$$= (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \vee x \vee y \vee z) \cdot (\bar{a} \vee c \vee y) \cdot (\bar{c} \vee b \vee y \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{b} \vee c \vee x \cdot y \vee \bar{x}) \cdot (\bar{a} \cdot b \vee \bar{a} \cdot c \vee \bar{x} \vee y) = 1$$

Подставляя в это тождество конкретные значения истинности *x*=1, *y*=0, *z*=0, получаем:

$$(\bar{a} \vee c) \cdot (\bar{c} \vee b) \cdot (\bar{b} \vee c) \cdot (\bar{a} \cdot b \vee \bar{a} \cdot c) = (\bar{a} \cdot \bar{c} \vee \bar{a} \cdot b \vee c \cdot b) \cdot (\bar{b} \cdot \bar{a} \cdot c \vee c \cdot \bar{a} \cdot b \vee \bar{a} \cdot c) = \bar{a} \cdot b \cdot c = 1$$

Отсюда следует, что **a=0, b=1, c=1.**

Ответ на первый вопрос задачи: нужно заменить блоки *b* и *c*; блок *a* не требует замены.

II. Решение логических задач табличным способом

При использовании этого способа условия, которые содержит задача, и результаты рассуждений фиксируются с помощью специально составленных таблиц.

Задача 1. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Борю, Сашу и Витю, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе.

Известно, что:

1. Саша самый высокий;
2. Играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
3. Играющие на скрипке и флейте и Боря любят пиццу;
4. Когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Саша мирит их;
5. Боря не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

Решение. Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

Так как музыкантов трое, инструментов шесть и каждый владеет только двумя инструментами, получается, что каждый музыкант играет на инструментах, которыми остальные не владеют.

Из условия 4 следует, что Саша не играет ни на альте, ни на трубе, а из условий 3 и 5, что Боря не умеет играть на скрипке, флейте, трубе и гобое. Следовательно, инструменты Бори — альт и кларнет. Занесем это в таблицу, а оставшиеся клетки столбцов "альт" и "кларнет" заполним нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Боря	0	0	1	1	0	0
Саша			0	0		0
Витя			0	0		

Из таблицы видно, что на трубе может играть только Витя.

Из условий 1 и 2 следует, что Саша не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Боря, ни Саша, то скрипачом является Витя. Оба инструмента, на которых играет Витя, теперь определены, поэтому остальные клетки строки " Витя " можно заполнить нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Боря	0	0	1	1	0	0
Саша	0		0	0		0
Витя	1	0	0	0	0	1

Из таблицы видно, что играть на флейте и на гобое может только Саша.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Боря	0	0	1	1	0	0
Саша	0	1	0	0	1	0
Витя	1	0	0	0	0	1

Ответ: Боря играет на альте и кларнете, Саша — на флейте и гобое, Витя — на скрипке и трубе.

Задача 2. Три одноклассника — Влад, Тимур и Юра, встретились спустя 10 лет после окончания школы. Выяснилось, что один из них стал врачом, другой физиком, а третий юристом. Один полюбил туризм, другой бег, страсть третьего — регби.

Юра сказал, что на туризм ему не хватает времени, хотя его сестра — единственный врач в семье, заядлый турист. Врач сказал, что он разделяет увлечение коллеги.

Забавно, но у двоих из друзей в названиях их профессий и увлечений не встречается ни одна буква их имен.

Определите, кто чем любит заниматься в свободное время и у кого какая профессия.

Решение. Здесь исходные данные разбиваются на тройки (имя — профессия — увлечение). Из слов Юры ясно, что он не увлекается туризмом и он не врач. Из слов врача следует, что он турист.

Имя	Юра		
Профессия		врач	
Увлечение		туризм	

Буква "а", присутствующая в слове "врач", указывает на то, что Влад тоже не врач, следовательно, врач — Тимур. В его имени есть буквы "т" и "р", встречающиеся в слове "туризм", следовательно, второй из друзей, в названиях профессии и увлечения которого не встречается ни одна буква его имени — Юра. Юра не юрист и не регбист, так как в его имени содержатся буквы "ю" и "р". Следовательно, окончательно имеем:

Имя	Юра	Тимур	Влад
Профессия	физик	врач	юрист
Увлечение	бег	туризм	регби

Ответ. Влад — юрист и регбист, Тимур — врач и турист, Юра — физик и бегун.

Пример 3. Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

1. *Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;*
2. *парижанка не снимается в кино;*
3. *та, кто живет в Риме, певица;*
4. *Линда равнодушна к балету.*

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

Решение. Составим таблицу и отразим в ней условия 1 и 4, заполнив клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			
			Айрис			
	0		Линда		0	

Так как Линда живет не в Риме, то, согласно условию 3, она не певица. В клетку "Пение" ставим 0. Из таблицы видно, что Линда киноактриса, а Джуди и Айрис не снимаются в кино.

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0			Джуди			0
			Айрис			0
	0		Линда	0	0	1

Согласно условию 2, парижанка не снимается в кино, следовательно, Линда живет не в Париже. Но она живет и не в Риме. Следовательно, Линда живет в Чикаго. Так как Линда и Джуди живут не в Париже, там живет Айрис. Джуди живет в Риме и, согласно условию 3, является певицей. А так как Линда киноактриса, то Айрис балерина.

В результате постепенного заполнения получаем следующую таблицу:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
0	0	1	Джуди	1	0	0
1	0	0	Айрис	0	1	0
0	0	1	Линда	0	0	1

Ответ. Айрис балерина. Она живет в Париже.

III. Решение логических задач с помощью рассуждений

Этим способом обычно решают несложные логические задачи.

Задача 1. Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

Решение. Имеется три утверждения:

1. Вадим изучает китайский;
2. Сергей не изучает китайский;
3. Михаил не изучает арабский.

Если **верно** первое утверждение, то **верно** и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение **ложно**.

Если **верно** второе утверждение, то первое и третье должны быть **ложны**. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно. Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе — ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

Ответ: Сергей изучает китайский язык, Михаил — японский, Вадим — арабский.

Задача 2. В поездке пятеро друзей — Антон, Борис, Вадим, Дима и Гриша, знакомились с попутчицей. Они предложили ей отгадать их фамилии, причём каждый из них высказал одно истинное и одно ложное утверждение:

Дима сказал: "Моя фамилия — Молотов, а фамилия Бориса — Хрущев". Антон сказал: "Молотов — это моя фамилия, а фамилия Вадима — Брежнев". Борис сказал: "Фамилия Вадима — Тихонов, а моя фамилия — Молотов". Вадим сказал: "Моя фамилия — Брежнев, а фамилия Гриши — Чехов". Гриша сказал: "Да, моя фамилия Чехов, а фамилия Антона — Тихонов".

Какую фамилию носит каждый из друзей?

Решение. Обозначим высказывательную форму "юноша по имени А носит фамилию Б" как А$_{Б}$, где буквы А и Б соответствуют начальным буквам имени и фамилии.

Зафиксируем высказывания каждого из друзей:

1. Д$_{М}$ и Б$_{Х}$;
2. А$_{М}$ и В$_{Б}$;
3. В$_{Т}$ и Б$_{М}$;
4. В$_{Б}$ и Г$_{Ч}$;
5. Г$_{Ч}$ и А$_{Т}$.

Допустим сначала, что истинно Д$_{М}$. Но, если истинно Д$_{М}$, то у Антона и у Бориса должны быть другие фамилии, значит А$_{М}$ и Б$_{М}$ ложно. Но если А$_{М}$ и Б$_{М}$ ложны, то должны быть истинны В$_{Б}$ и В$_{Т}$, но В$_{Б}$ и В$_{Т}$ одновременно истинными быть не могут.

Значит, остается другой случай: истинно Б$_{Х}$. Этот случай приводит к цепочке умозаключений: Б$_{Х}$ истинно □ Б$_{М}$ ложно □ В$_{Т}$ истинно □ А$_{Т}$ ложно □ Г$_{Ч}$ истинно □ В$_{Б}$ ложно □ А$_{М}$ истинно.

Ответ: Борис — Хрущев, Вадим — Тихонов, Гриша — Чехов, Антон — Молотов, Дима — Брежнев.

Задача 3. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты соглашения о полном разоружении, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: "Чей именно проект был принят?", министры дали такие ответы:

Россия — "Проект не наш, проект не США";
США — "Проект не России, проект Китая";
Китай — "Проект не наш, проект России".

Один из них (самый откровенный) оба раза говорил правду; второй (самый скрытный) оба раза говорил неправду, третий (осторожный) один раз сказал правду, а другой раз — неправду.

Определите, представителями каких стран являются откровенный, скрытный и осторожный министры.

Решение. Для удобства записи пронумеруем высказывания дипломатов:

Россия — "Проект не наш" (1), "Проект не США" (2);
США — "Проект не России" (3), "Проект Китая" (4);
Китай — "Проект не наш" (5), "Проект России" (6).

Узнаем, кто из министров самый откровенный.

Если это российский министр, то из справедливости (1) и (2) следует, что победил китайский проект. Но тогда оба утверждения министра США тоже справедливы, чего не может быть по условию.

Если самый откровенный — министр США, то тогда вновь получаем, что победил китайский проект, значит оба утверждения российского министра тоже верны, чего не может быть по условию.

Получается, что наиболее откровенным был китайский министр. Действительно, из того, что (5) и (6) справедливы, следует, что победил российский проект. А тогда получается, что из двух утверждений российского министра первое ложно, а второе верно. Оба же утверждения министра США неверны.

Ответ: Откровеннее был китайский министр, осторожнее — российский, скрытнее — министр США.

Задача 4. Для полярной экспедиции из восьми претендентов (обозначим их A, B, C, D, E, F, G и H) надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять E и G; гидролога - F и B; синоптика - F и G; радиста – C и D; механика – C и H; врача – A и D. Хотя некоторые претенденты могут выполнять две обязанности, в экспедиции они должны выполнять только одну. При этом: F не может ехать без B; D не может ехать без H и C; C не может ехать вместе с G; A не может ехать вместе с B.

Урок 5. Варианты ЕГЭ