

Алгоритмы на графах

Модуль 2. Кратчайшие расстояния.

Лекция 5.

Минимальные остовные деревья.

Адигеев Михаил Георгиевич

2024

План лекции

1. Минимальное остовное дерево
 - ✓ Необходимые определения.
 - ✓ Постановка задачи.

Пример задачи

Пусть имеется несколько населённых пунктов и схема дорог, соединяющих населённые пункты между собой. Стоит задача провести ремонт части дорог таким образом, чтобы

- 1) Можно было проехать от любого населённого пункта в любой другой населённый пункт по отремонтированным дорогам.
- 2) Стоимость ремонта была минимальна. Стоимость ремонта каждого участка дороги известна заранее.

Построим математическую модель задачи.

Входные данные представляем в виде связного неориентированного графа $G(V, E)$ и функцией весов $w: E \rightarrow R_+$.

Каким должно быть решение?

Пример задачи

Решение задаётся множеством рёбер E' . Рассмотрим частичный граф $G'(V, E')$.

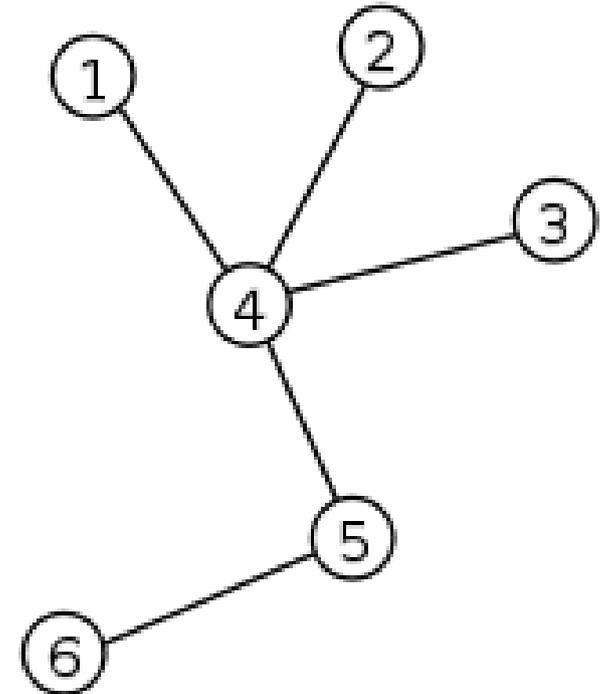
Какими свойствами он должен обладать? Посмотрим на требования:

- 1) Можно было проехать от любого населённого пункта в любой другой населённый пункт по отремонтированным дорогам. => **граф $G'(V, E')$ должен быть связным.**
- 2) Стоимость ремонта была минимальна. Стоимость ремонта каждого участка дороги известна заранее. => **нужен минимальный связный граф.**

Деревья

Деревом называется связный ациклический (не содержащий циклов) граф.

Ациклический граф называется **лесом**.

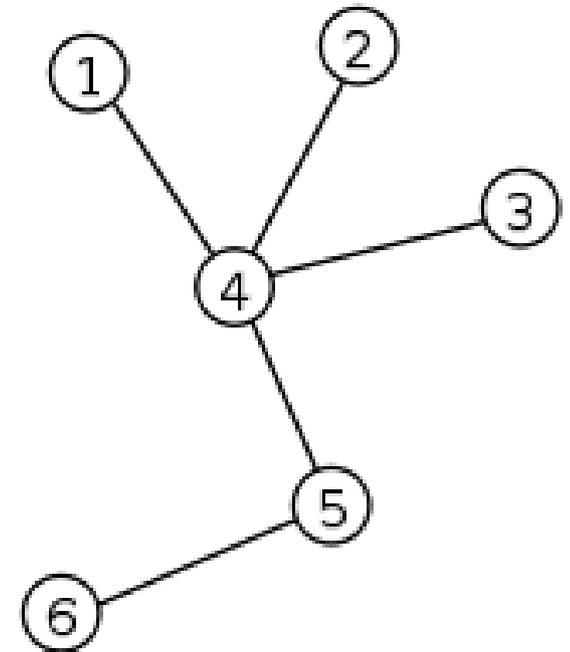


Деревья

Теорема о деревьях.

Для конечного графа $G(V, E)$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G — дерево.
- 2) G — не содержит циклов и $|E| = |V| - 1$.
- 3) G — связен и $|E| = |V| - 1$.
- 4) G — связен и каждая дуга является мостом.
- 5) Любые две вершины можно соединить единственной простой цепью.
- 6) G не содержит циклов, и добавление к нему любой новой дуги приводит к образованию единственного простого цикла.



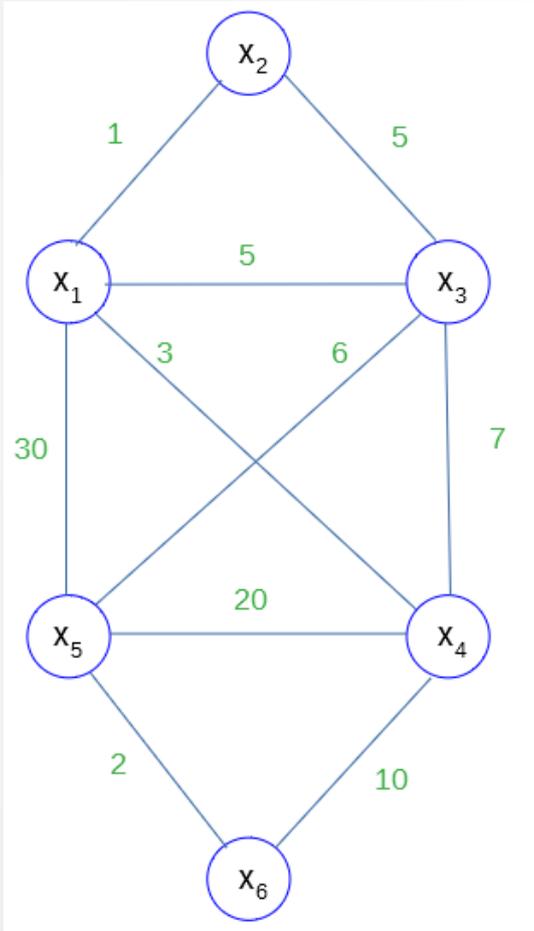
Минимальное остовное дерево

Решением задачи должно быть *минимальное остовное дерево*.

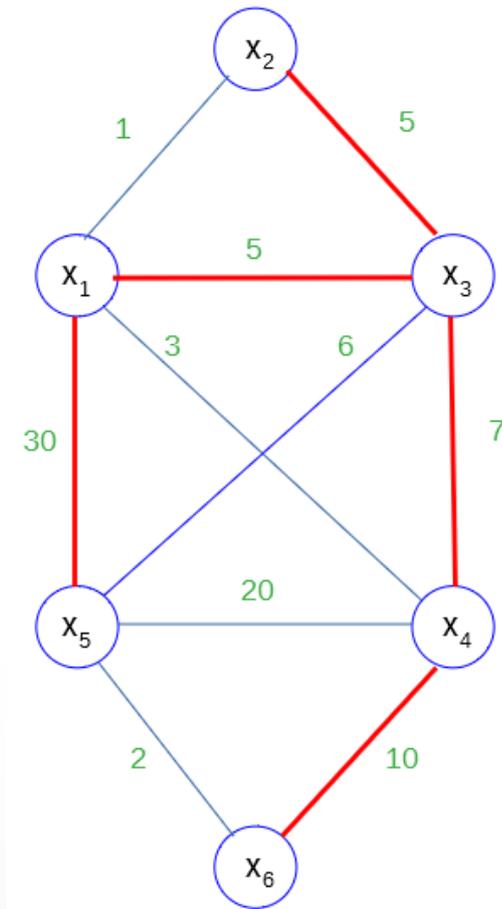
- ✓ Дерево, т.е. связный ациклический подграф.
- ✓ Остовное дерево. *Остовным* называется связный подграф, содержащий все вершины графа.
- ✓ Минимальное остовное дерево = остовное дерево минимального веса.

Минимальное остовное дерево

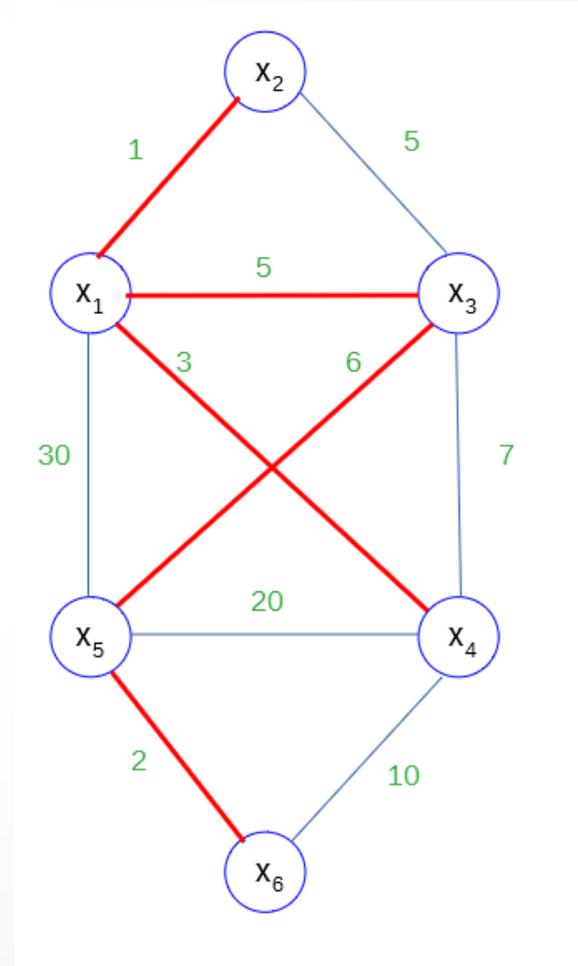
Взвешенный граф



Остовное дерево, вес = 57



Мин.О.Д., вес = 17



Минимальное остовное дерево

Как найти/построить минимальное остовное дерево для заданного графа?

✓ Полный перебор всех остовных деревьев.

Но теорема Кэли утверждает, что в худшем случае (для полного графа G) количество остовных деревьев равно n^{n-2} .

✓ Применить более эффективный алгоритм.

Для задачи построения минимального остовного дерева можно применить ***жадную стратегию***.

Минимальное остовное дерево

Жадный алгоритм — однопроходный итерационный алгоритм. Строит решение, добавляя на каждом шаге к текущему частичному решению новый элемент. Добавляемый элемент выбирается на основе локального оптимума («наилучший на текущем шаге»).

Жадные алгоритмы:

- ✓ Дают точное решение для задач на матроидах (с аддитивной целевой функцией)
- ✓ Для некоторых задач дают приближённое решение с гарантированной (не обязательно константной) оценкой приближения
- ✓ В общем случае используются как эвристики